Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101002**

ID профиля: **854028**

Вариант 22

чистовик

№ 1 Вариант 22

Часть 1

Решение: $a_n = a_1 + (n-1)d$; $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$; $S_{15} = 15a_1 + 105d$

$a_{11} \cdot a_{12} = (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 21da_1 + 110d^2$

$a_7 \cdot a_{16} = (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) = a_1^2 + 21da_1 + 90d^2$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21da_1 + \cancel{110}^{90}d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21da_1 + \cancel{90}^{110}d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} ① \; a_1^2 + 21da_1 + \cancel{110}^{90}d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ ② \; -(a_1^2 + 21da_1) - 90d^2 > -(15a_1 + 105d) - 4 \end{cases}$$

сложим бо́льшую часть ① с большей частью ② и их меньшие части

$a_1^2 + 21da_1 - (a_1^2 + 21da_1) - 20d^2 > -28$

$20d^2 < 28$

$d^2 < \frac{7}{5}$

$d \in \left(-\sqrt{\frac{7}{5}}; \sqrt{\frac{7}{5}}\right)$

нам известно, что $d > 0$ (т.к. прогрессия возрастает) ~~следовательно~~ и что d – ~~натурально~~ целое (т.к. все члены последовательности целые), следовательно $d = 1$ подставим $d = 1$ в ① и ②

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + \cancel{90}^{110} < 15a + 105 + 4 \end{cases}; \begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ a^2 + 6a + 1 < 0 \end{cases};$$

$D = 36 - 4 = 2^2 \cdot 2$

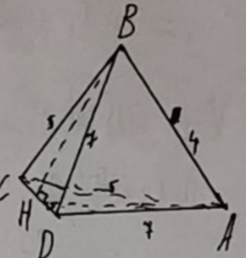
$$\begin{cases} a_1 \neq -3 \\ a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + \sqrt{2} \cdot 2) \end{cases}$$

т.к. нам известно, что a – целое подходят только $a_1 = -5; -4; -2; -1$

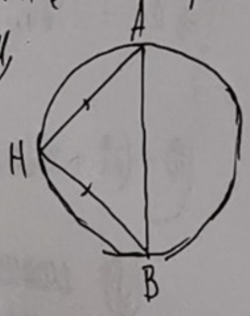
Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1$

чистовик № 2 Вар 22

Решение: $\triangle CBD = \triangle CAD$ (по трем сторонам)



проведем высоты в этих △-ках (BH_1 и AH_1)
~~они упадут~~ т.к. △-ки равны высоты делят CD ~~в одинаков на~~ одинаково $\Rightarrow$
$\Rightarrow H$ это $H_1 \Rightarrow AH$ это AH_1. А плоскость $BAH \perp CD$ т.к. пл. содержит 2 перпендикулярные CD прямые. Из этого следует, что сечение цилиндра пл. ABH получится окружность, соответствующая окружностям в основ. цилиндра. Нетрудно заметить, что $AH = BH$ (высоты в равных △-ках)
Так же очевидно, что $R_{окр}$ будет минимален ~~при~~, когда AB — радиус, ~~тогд~~ тогда очевидно, что $AH = HB = 2\sqrt{2}$ (т.к $AB = 4$,



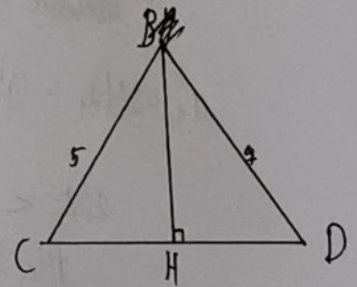
сл1: ABH — вписан), тогда $CD = CH + HD$

по т. Пифагора:

$CH = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$

$HD = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$,

тогда $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$



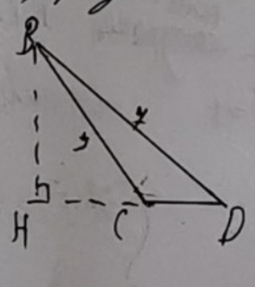
сл2: Рассмотрим случай, когда BH и AH попадают на продолжение CD. Рассуждая аналогично, придем к выводу, что $AH = BH = 2\sqrt{2}$, тогда $CD = DH - CH$

по т.П

$CH = \sqrt{17}$

$DH = \sqrt{41}$

$CH = \sqrt{41} - \sqrt{17}$



Ответ: $CH = \sqrt{41} + \sqrt{17}$; $\sqrt{41} - \sqrt{17}$

~~$CH = \sqrt{2}$~~

2

чистовик. №3 Вар 22

Решение:
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+28,\ 50) & (2) \end{cases}$$

ОДЗ

~~1) а это функция включает в себя точки разделим (2) на 2 сл~~

(2) эквивалентно:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+28b & (3) \\ a^2+b^2 \le 50 & (4) \end{cases}$$

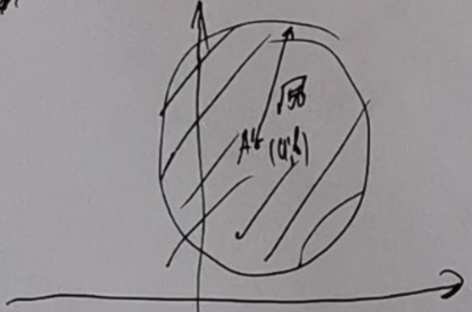
~~Рассмотрим 1)~~ Рассмотрим (3)

$$(a-1)^2 + b - 14a - 1 \le 0$$

$$D = 196+4 = 200$$

$$(a-1)^2 + \left(b - \frac{14-\sqrt{200}}{2}\right)\left(b - \frac{14+\sqrt{200}}{2}\right) \le 0$$

Рассмотрим 1): $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$ это график включает в себя точки лежащие внутри окружности с центром в $x=a$ $y=b$ (точки самой окр тоже включены)



3

21101002 (U854028 M1297927)

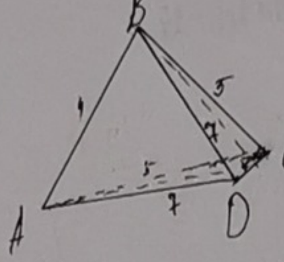
Чернетка

$S = 15d + 105c$

$S = 15d + (0c + c + 2c \ldots + 14c)$

$a_{11} = d + 10c$

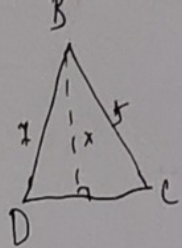
$a_{12} = d + 11c$



$\overbrace{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14}$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$\underbrace{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14}_{14}$

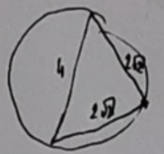


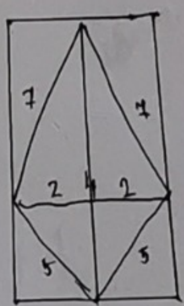
12

$7 \cdot 14 + 7 = 7 \cdot 15$

$7 \cdot 15$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$





$a_7 = d + 6c$

$a_{16} = d + 15c$

$4 \cdot 2 + 4 \cdot 2$

$16 = 2x^2$

$x = \sqrt{8}$

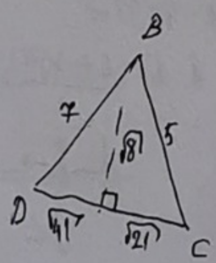
$d^2 + 21cd + 90c^2 > 15d + 105c - 24$

$d^2 + 10cd + 11cd + 110c^2 < 15d + 105c + 4$

$d^2 + 21cd + 110c^2 < 15d + 105c + 4$

$49 - 4 = 45 = 5 \cdot 9$

$25 - 4 = 21 = 7 \cdot 3$



$25 - 8 = 17$

$48 - 8 = 41$

$42 = 21 \cdot 2 = 7 \cdot 3 \cdot 2$

черновик

$d^2 + 21cd + 110c^2 < 15(d+7c) + 4$

$-\ d^2 + 21cd + 90c^2 > 15(d+7c) - 24$

$a_1 = d$

$a_2 =$

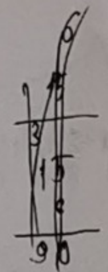
$a_{11} = d + 10d$

$20c^2 < 28$

$c^2 < \frac{7}{5}$

$-\sqrt{\frac{7}{5}} < c < \sqrt{\frac{7}{5}}$

d



$d^2 + 21cd + 110c^2 < 15d + 7c + 4$

$c = 1$

$d^2 + 21 + 90 > 15d + \overbrace{105 - 24}^{81}$

a.

$d^2 + 21d + 110 < 15d + 105 + 4$

$d^2 + 6d + 1 < 0$

$4 \cdot 8 = 32$

$16 \cdot 2$

$D = 36 - 4 = 32 =$

$d_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$

$d^2 + 6d + 9 > 0$

~~$d \in [-3 - 2\sqrt{2}$~~

$d \neq -3$

$d \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$

$-7 ? -3$

$-6 ? -3 - 2\sqrt{2}$

$-5 ? -3 - 2\sqrt{2}$

$-3 ? -2\sqrt{2}$

$-2 ? -2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2} ? 2$

$2\sqrt{2} ? 3$

$-5 >$

$8 < 9$

21101002 (U854028 M1297927)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101002**

ID профиля: **854028**

Вариант 22

чистовик №4 Вар. 22

Решение: по условию: $a=2^{x_1}\cdot 7^{y_1}$, $b=2^{x_2}\cdot 7^{y_2}$, $c=2^{x_3}\cdot 7^{y_3}$. Из того, что ~~НОД~~ НОД$(a,b,c)=2\cdot 7$ следует, что хотя бы один x_n и один y_n равны 1. Из того, что НОК$(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18}$ следует, что хотя бы 1 x_n равен 17, а один $y_n=18$. Рассмотрим ~~для~~ случай для x нужно подставить 1 в один из трех них, потом 17 - в один из двух оставшихся x_n и в последний x_n подставить одно из чисел от 1 до 17. Итого вариантов:

$$3\cdot 2\cdot 17=102$$

Рассуждаем аналогично, для y_n, $y_k=1$, $y_i=18$, $y_s=$ от 1 до 18

Итого: $2\cdot 3\cdot 18=108$

т.к. x и y мы можем расставлять независимо друг от друга, всего вариантов расстановки: $102\cdot 108$.

Но при ~~такой~~ ~~мы~~ нам подсчете существуют случаи, учтенные более 1-го раза.

1) Тройки чисел (a,b,c) в которых два числа ~~равны~~ x равны 1 и 17, а третье $x\in[2;16]$ (15 чисел), но все 3 числа y равны либо 1 либо 18 учтены по 2 раза. Выбрать такую ~~из~~ тройку можно $\underline{3\cdot 2\cdot 15\cdot 2\cdot 3}$ способами.

2) Тройки ~~из~~ (a,b,c), в которых два y_n равны 1 и 18, а еще один $y_n\in[2;17]$ (16 чисел), все 3 числа x равны 1 или 17 учтены по 2 раза количество таких случаев: $\underline{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 16}$ ~~раз~~

3) ~~трой~~ Тройки (a,b,c) в которых все x_n равны 1 или 17 (две 17 одно 1 или одно 17, две 1) ~~или две~~ и все y равны 1 либо 18 (две 18 одно 1 или две 1 и одно 18) учтены по 4 раза. Количество таких чисел $\underline{3\cdot 2\cdot 2\cdot 3}$

Итого с учетом повторов: $102\cdot 108-3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 16-3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 15-3\cdot(3\cdot 2\cdot 3\cdot 2)=$
$=11016-816=10200$

Ответ: 10200

1

21101002 (U854028 M1297928)

чистовик №5 Вар. 22

Решение: ~~ОДЗ~~ ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{7}{2}x - \frac{17}{4} > 0 \\ \sqrt{\frac{7}{2}x - \frac{17}{4}} \neq 1 \\ \frac{3x}{2} - 6 > 0 \\ \sqrt{\frac{3x}{2} - 6} \neq 1 \\ \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \neq 1 \\ \frac{x}{2}+1 > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3}; \frac{21}{4} \end{cases}$$

Пусть $a = \frac{x}{2}+1$; $b = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$; $c = \frac{3x}{2} - 6$

~~Пусть $u = \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}$~~

Пусть: $v = \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{2}\right) = \frac{1}{2}\log_a b$

$u = \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}+\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2 = 4\log_b c$

$w = \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2\log_c a$

заметим, что $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a c \cdot \log_c a = 1$

Тогда $u \cdot v \cdot w = 4$

Рассмотрим 3 случая:

сл1: $u = v = w+1$, тогда $u \cdot u \cdot (u-1) = 4$

$u^3 - u^2 - 4 = 0$ расписываем таблицу Горнера:

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

$\Rightarrow (u-2)(u^2+u+2) = 0$, $D = 1-8<0$

~~$(u-2)(u+2)(u+1)=0$~~

$u=2$ ~~$\log$~~ $\log_{\sqrt{\frac{7}{2}x+\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right) = 2$

$\frac{7}{2}x + \frac{17}{4} = \left(\frac{3}{2}x - 6\right)^2$; $14x+17 = (3x-12)^2$;

$14x + 17 = 9x^2 - 72x + 144$; $9x^2 - 86x + 127$

сл 2: $v = w = u+1$

$$u^2+2u+1$$

$$(u+1)(u+1)\cdot u = u^3+2u^2+u=4;$$

$$u^3+2u^2+u-4=0$$

таблица Горнера:

	1	2	1	-4
1	1	3	4	0

т.е. $(u-1)(\underset{D<0}{u^2+3u+4})=0$

$u=1$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}+\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=1$$

$$\sqrt{\frac{7x}{2}+\frac{17}{4}}=\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$$

сл3: $(v+1)=u=w$

$u \cdot u \cdot u-1=4$

$(u-2)(u^2+u+2)$

3

21101002 (U854028 M1297928)

№1.

Черновик части 2 Вар 22

$a = 2^{x_1} \cdot 7^{y_1}$

$b = 2^{x_2} \cdot 7^{y_2}$

$c = 2^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

хотя бы один $x=1$ один $y=1$

хотя бы 1 $x=17$ один $y=18$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

для x: $C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 17$

$3 \cdot 2 \cdot 17 = 102$

$3 \cdot 2 \cdot 18$

для y

$$\begin{array}{r} 18 \\ 6 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{2}\right) = \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ 102 \\ \hline 216 \\ 000 \\ 108 \\ \hline 11016 \end{array}$$

$$\frac{7}{2}x - \frac{17}{2} = \left(\frac{x}{2}+1\right)^{2\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3}{2}-6\right)^2}$$

$$\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}+1\right)+1 = \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{2}\right)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 24 \\ \hline 136 \\ 68 \\ \hline 816 \end{array}$$

$$\left(\sqrt{\frac{3x}{2}-6}\right)\left(\frac{x}{2}+1\right) - \sqrt{\frac{3x}{2}-6} \quad \log_{(x+1)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17x}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r} 11016 \\ 816 \\ \hline 10200 \end{array}$$

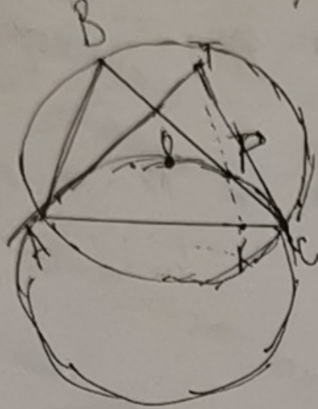
$6 \cdot 4 = 24$

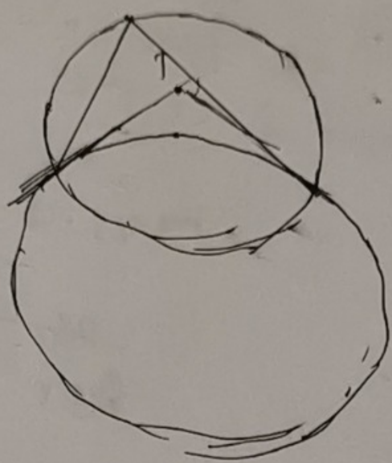
$24 \cdot 24$

$16 + 15 + 3 = 34$

21101002 (U854028 M1297928)

черновик часть 2 Вар № 22





№17

$14x > 17$

$x > \frac{17}{14}$

$\frac{7}{2}x \neq \frac{17}{4} + 1$

$14x \neq 21$

$x \neq \frac{21}{4}$

НОД$(a,b,c) = 2 \cdot 7$ $\quad x \vdots 14$

$a = 2 \cdot 7 \cdot x$

$b = 2 \cdot 7 \cdot y$

$c = 2 \cdot 7 \cdot z$

$2^{17} \cdot 7^{18} \vdots x \cdot 2 \cdot 7$

$2^{17} \cdot 7^{18} \vdots y \cdot 2 \cdot 7$

$2^{17} \cdot 7^{18} \vdots z \cdot 2 \cdot 7$

$2^{17} \cdot 7^{18}$

$2^{17} \cdot 7^{18} = k \cdot x \cdot 2 \cdot 7$

$14^{16} \cdot 7^{2} = k \cdot x$

$k = 2^{16} \cdot 7^{17}$

$\frac{3x}{2} - 6 > 0$

$3x > 12$

$x > 4$

$\frac{3x}{2} - 6 \neq 1$

$3x \neq 12 + 2$

$x \neq \frac{14}{3}$

$12 \cdot 6 = 72$

ЗН: $x \vdots 7$, $x \vdots 2$, $x \vdots 7, 2$

$x \vdots 7, 2$: $k = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$k \vdots b$

$k \vdots c$

$k = 2^{17} \cdot 7^{18} = 2 \cdot 7 \cdot y \cdot m$ $\quad m = 2^{16} \cdot 7^{17}$

$k = 2^{17} \cdot 7^{18} = 2 \cdot 7 \cdot z \cdot n$ $\quad n = 2^{16} \cdot 7^{17}$

$\frac{x}{2} + 1 > 0$

$x > -2$

$\frac{x}{2} + 1 \neq 1$

$x \neq 0$

21101002 (U854028 M1297928)