Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100855**

ID профиля: **85992**

Вариант 22

Чистовик ①

№1.

1) Из условия $S=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$, т.к. $n=15$, то $S=\frac{2a_1+d\cdot 14}{2}\cdot 15 = (a_1+7d)\cdot 15$, где d – разность прогрессии, причём d – целое, т.к. $d = a_{n+1}-a_n$, а a_{n+1} и a_n – целые числа по условию, и $d>0$, т.к. прогрессия возрастающая. Запишем через a_1 и d условия задачи:

$$\begin{cases} (a_1+6d)\cdot(a_1+15d) > (a_1+7d)\cdot 15-24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < (a_1+7d)\cdot 15+4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1+6d)(a_1+15d)+24 > (a_1+10d)(a_1+11d)-4$$

$$a_1^2+21da_1+90d^2+24 > a_1^2+21a_1d+110d^2-4$$

$28 > 20d^2$, т.к. d – целое и $d>0$, то подходит только $d=1$. Перепишем условие задачи:

$$\begin{cases} (a_1+6)\cdot(a_1+15) > (a_1+7)\cdot 15-24 \quad (1) \\ (a_1+10)(a_1+11) < (a_1+7)\cdot 15+4 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+105-24 \Rightarrow a_1^2+6a_1+9<0$

$(a_1+3)^2 > 0 \Rightarrow a_1\neq -3$

(2): $a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+105+4 \Rightarrow a_1^2+6a_1+1<0$

$D=36-4=32 \Rightarrow a_1=\frac{-6\pm 4\sqrt{2}}{2} = -3\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1\in(-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$, т.к. a_1 – целое, то $a_1\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$ ~~0; 1;~~. Т.к. из (1) $a_1\neq -3$, то $a_1\in\{-5;-4;-2;-1\}$

Чистовик ②

Ответ. $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

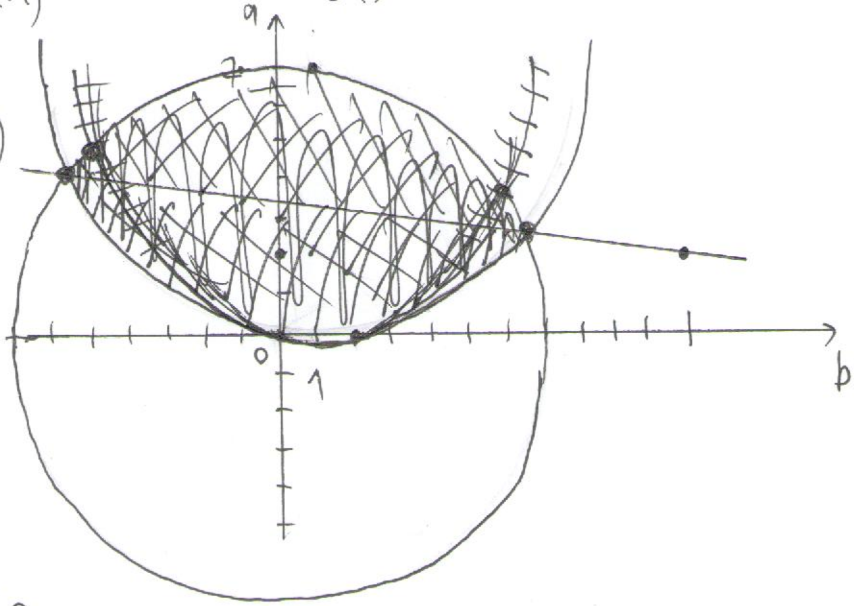
Чистовик 3

№3.

1) Перепишем наше условие в другом виде:

$$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 50 \quad (3) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 14a+2b<50 \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 14a+2b \geq 50 \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases} \quad (2) \end{array} \right. \end{cases}$$

2) Изобразим в координатах $(a; b)$ совокупность систем (1) и (2):

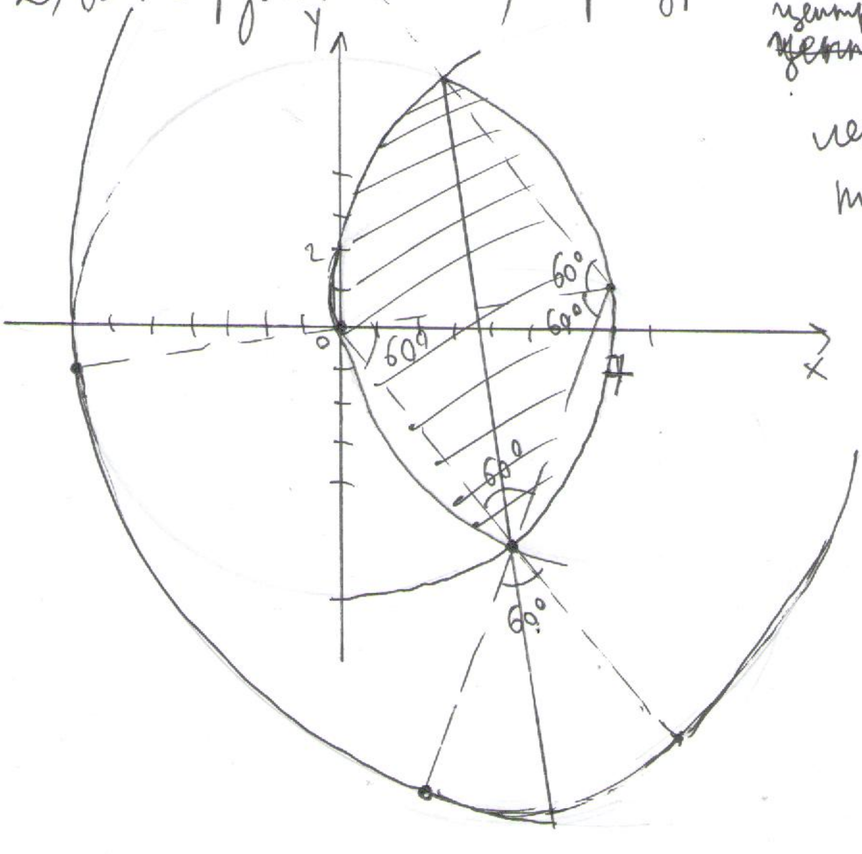


$a^2+b^2 \le 14a+2b \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

Прямая $14a+2b=50$ проходит через т. пересечения окружностей, т.к. тогда $(a-7)^2+(b-1)^2=a^2+b^2 \Rightarrow 14a+2b=50$. Штриховкой закрашена область, задаваемая совокупностью.

2) В координатах xOy фигура M выглядит так:



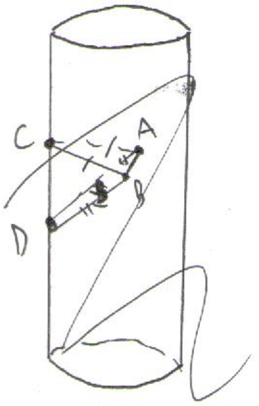
~~центры окружности~~ центры окружностей (3) уравнения лежат только внутри заштрих. области. Тогда найдем площадь фигуры M, как сумму частей круга:

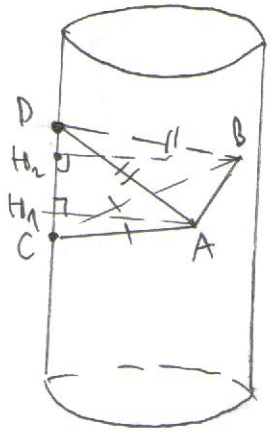
$$S = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (2\sqrt{50})^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi (\sqrt{50})^2 = 50 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot \pi = 150\pi$$

Ответ. $S_M = 150\pi$.

Чистовик ④

№2.



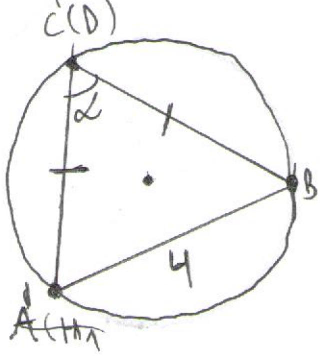


1) Опустим перпендикуляры на прямую CD из т. A и B. Тогда

$H_2H_1 = \cancel{CH_1}\ CH_2 - CH_1 =$

$= DH_1 - DH_2$

2) Спроецируем тетраэдр на плоскость основания:

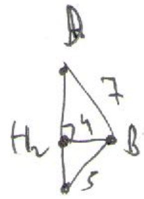


3) Т.к. △DBC = △DCA (по 3 сторонам), то $H_1A = H_2B = C'A' = C'B'$, $\Rightarrow A'B' =$

$= AB$.

4) $2R = \frac{4}{\sin\alpha} \Rightarrow R$ мин. тогда,

когда $\sin\alpha$ – макс., $\Rightarrow \alpha = 90° \Rightarrow R = 2$



5) Из △DBH_2, где $H_2 = H_1$, $CD = \sqrt{7^2 - 4^2} + \sqrt{5^2 - 4^2} =$

$= 3 + \sqrt{12}$

Ответ. $CD = 3 + \sqrt{12}$.

ЧЕРНОВИК

№1. $a_1, a_2, a_3, \dots$ $a_1 - ?$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$a_1, a_1+d, a_1+2d \dots$ 1 3 5

$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\frac{6}{2} = 3 \cdot 3 = 9$

$S = \frac{2a_1 + d \cdot 14}{2} \cdot 15 = 15(a_1 + 7d)$

$\times \begin{array}{r} 15 \\ 6 \\ \hline 90 \end{array}$ $\times \begin{array}{r} 15 \\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > 15(a_1+7d) - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < 15(a_1+7d) + 4 \end{cases}$$

$a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24$

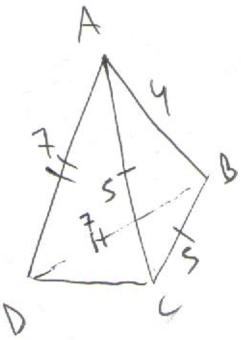
$a_1^2 + 21d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4$

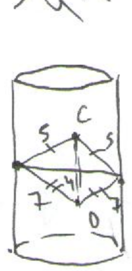
$90d^2 + 24 > 110d^2 - 4$

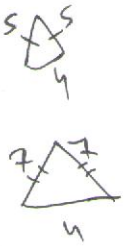
$28 > 20d^2$

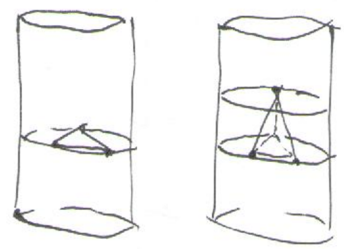
№2.

$+\begin{array}{r} 25 \\ 16 \\ \hline 41 \end{array}$









$-14a + 49 - 2b + 1 = 0$

$50 = 14a + 2b$

$$\begin{cases} (a-7)^2 + (b-1)^2 = 50 = \\ = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Черновик.

№3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$ $\rightarrow$ $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50$

$2b+14a=k$

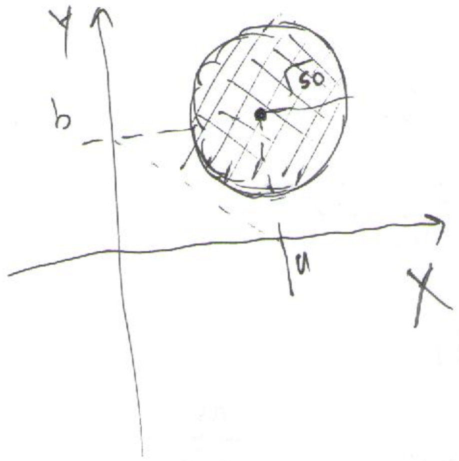
$b=\frac{k}{2}-7a$

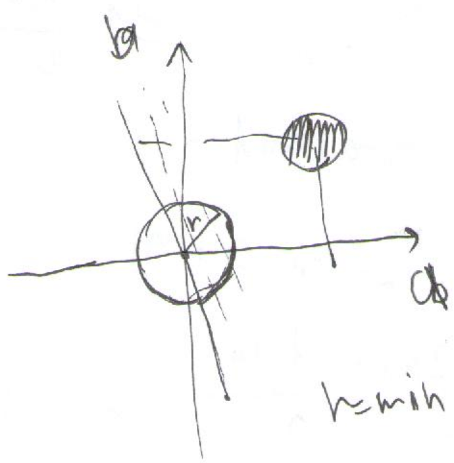
~~$14a+2b=k$~~

~~$14a=k-2b$~~

~~$a=\frac{k}{14}-\frac{1}{7}b$~~

Если есть x и y, то a и b тоже найдутся





$h=\min(14a+2b, 50)$

$\overset{8}{3 \quad 5} \quad \overset{16=24}{7 \quad 9}$

$S=\frac{\cancel{2\cdot 3+2\cdot 3}}{\cancel{2}}\cdot \cancel{4}^2=12\cdot 2=24$

$\begin{array}{r} 105 \\ -\ 24 \\ \hline 81 \end{array}$

$a^2+b^2 \le 14a+2b$ $\quad 90-81=9$

$a^2-14a+49+b^2-2b+1$

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$

$2\cdot 7$

$2\sqrt{2} \vee 2$

7

$\left[\begin{array}{l} \{ -14a+2b < 50 \\ \{ \end{array}\right.$

$-6 \quad -5$

$-3-2\sqrt{2} \quad -4$

$< \quad 5$

$-3-2\sqrt{2} \vee -4$

$<$

$-3+2\sqrt{2} \vee 1$

$2\sqrt{2} \vee 4$

$\sqrt{2} \vee 2$

$\cdot 1$

$-2\sqrt{2} \vee -1$

$1 \vee 2\sqrt{2}$

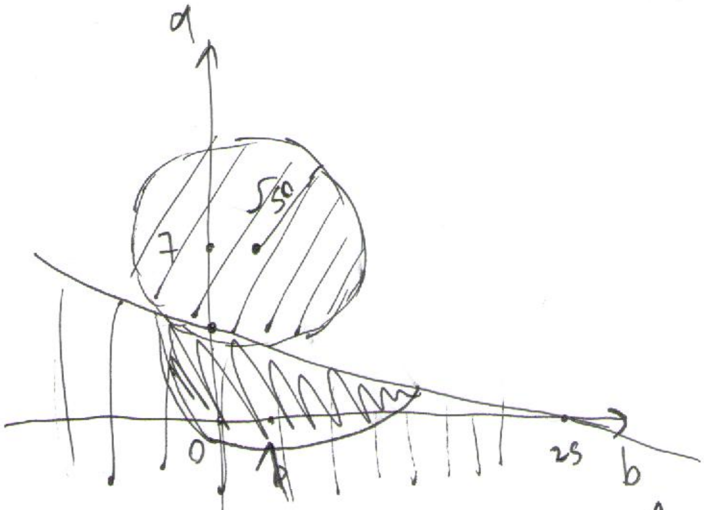
$<$

$3 \vee 2\sqrt{2}$

$9 \overset{>}{\vee} 8$

$2\sqrt{2} \overset{< 3}{\vee} 0$

ЧЕРНОВИК



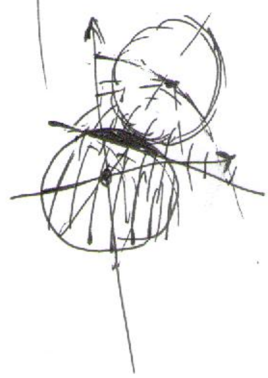
$7a+b<25$

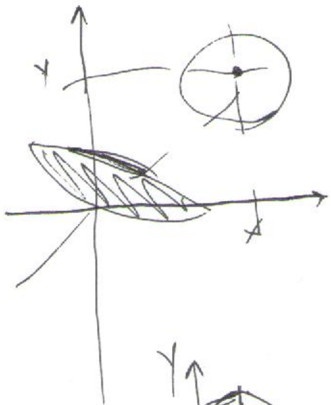
$b<25-7a$

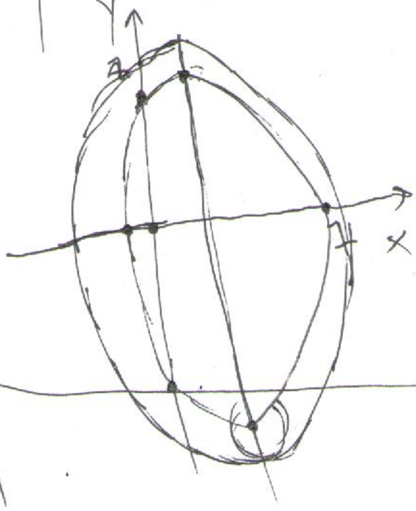
$7a=25$

$a=\frac{25}{7}$

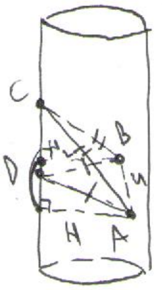
$a \le \frac{25-b}{7}$

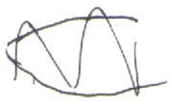






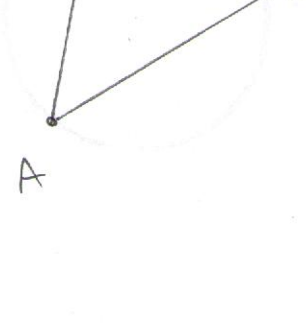
28
-16
$\overline{12}$





$(5^2-H_1^2)+(4^2-H_2^2)=(5^2-H_1^2)-$

$-(7^2-H_2^2)=4^2-AB^2$



$200\cdot 2=400$

$50-H_2^2=H_2^2$

$H_2=5$

$\frac{400}{3}+\frac{50}{3}=\frac{450}{3}\pi=$

$=30\cdot 5\cdot \pi=$

$90\cdot 5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100855**

ID профиля: **85992**

Вариант 22

Чистовик ①

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=14 \\ \text{НОК}(a,b,c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases} \Rightarrow a=14\cdot k_1,\ b=14\cdot k_2,\ c=14\cdot k_3, \text{ и } \text{НОД}(k_1,k_2,k_3)=1, \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{НОК}(k_1,k_2,k_3)=2^{16}\cdot 7^{17}$. k_1, k_2 и k_3 могут быть 4 видов: $2^{16}\cdot 7^k$, $7^{17}\cdot 2^t$, $2^{16}\cdot 7^{17}$, $7^k\cdot 2^t$, где $k\in[0;17]$, $t\in[0;16]$, и k,t – целые. Пусть это числа вида a, b, c и d соответственно. Возможны случаи:

A) aba, abb, abd, cab, cad, cbd, cdd, caa (нет), cbb (нет), cca (нет), ccb (нет), ccd (нет); – без учёта порядка.

1. aba – с учётом порядка $6\cdot 18\cdot \cancel{17}$ $(2^{16}\cdot 7^k, 7^{17}, 2^{16})$
2. abb – $6\cdot 17$ $(2^{16}, 7^{17}\cdot 2^t, 7^{17})$
3. ~~abd~~ cab – $(2^{16}\cdot 7^{17}, 2^{16}, 7^{17})$ – 6
4. ~~cab~~abd – $(7^k\cdot 2^t, 2^{16}, 7^{17};\ 7^k\cdot 2^t, 2^{16}\cdot 7^k, 7^{17};\ 7^k, 2^{16}, 7^{17}\cdot 2^t)$ –

– $6(17\cdot 18+17\cdot 18+17\cdot 18-2)$

5. cad $(2^{16}\cdot 7^{17}, 2^{16}\cdot 7^k, 7^k\cdot 2^t)$ – $6\cdot 18+6\cdot 18$
6. cbd – $6\cdot 17+6\cdot 17$
7. cdd – $6\cdot 18\cdot 17$
8. ccd – $1\cdot 6$

$$6\cdot 18+6\cdot 17+6+18\cdot 17\cdot 18-12+6\cdot 18\cdot 2+2\cdot 6\cdot 17+6\cdot 18\cdot 17+1=$$

$$=18\cdot 18+18\cdot 17+18\cdot 17\cdot 24-6+1=18\cdot 35+18\cdot 17\cdot 24-5=443\cdot 18-5=$$

$$=7969+5=79\cancel{64}\,74$$

Ответ. ~~7969~~ 7974.

Чистовик ②

№5.

1) Найдем ограничения на x:

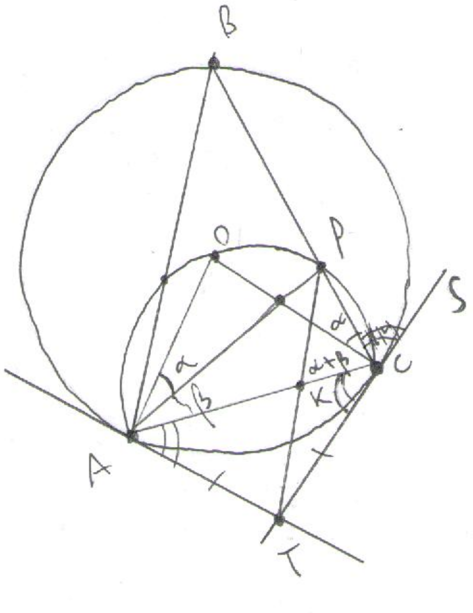
$$\begin{cases} \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6>0 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 \\ \frac{x}{2}+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{17}{14} \\ x\neq 0 \\ x\neq 1{,}5 \\ x>4 \\ x\neq \frac{14}{3} \\ x>-2 \end{cases}$$

2) Рассмотрим все варианты. Обозначим $a=\frac{x}{2}+1$, $b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$, $c=\frac{3x}{2}-6$. Тогда даны числа:

$\log_{a^2} b$, $\log_{\sqrt{b}} c^2$, $\log_{\sqrt{c}} a$

1. $$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 4\log_b c \\ 4\log_b c = 1+2\log_c a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 8\log_b c\cdot \log_b a \\ 4\log_b c = 1+2\cdot\frac{\log_b a}{\log_b c} \end{cases} \Leftrightarrow \Big\{$$



№6.

Решение.

1) $\frac{S_{\triangle PKC}}{S_{\triangle APK}} = \frac{\frac{1}{2}h\cdot KC}{\frac{1}{2}\cdot AK\cdot h} \Rightarrow \frac{KC}{AK}=\frac{5}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{PK}{KT}=\frac{5}{7}$, т.к. $\triangle APCT$ — вписан., т.к. $\angle PAT = 90^\circ-\alpha = \angle PCS$ — признак впис. четырёхуг., $\Rightarrow \frac{PC}{AT}=\frac{5}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\triangle CKT = 7$, $S_\triangle AKT = \frac{7}{5} S_\triangle APK = \frac{49}{5}$

2) $\triangle PKC \sim \triangle ABC$, $\Rightarrow \frac{S_\triangle PKC}{S_\triangle ABC} = \left(\frac{CK}{CA}\right)^2 = \frac{25}{144} \Rightarrow S_\triangle ABC = \frac{144}{5} =$

$= 28{,}8.$

Черновик

№5. $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

1) ОДЗ: ...

2) $\log_{a^2} b^2$, $\log_{\sqrt{b}} c^2$, $\log_{\sqrt{c}} a$

$\log_a b = \log_c a$

$\log_b c = 1 + 2\log_a b$

$2\log_a b$, $\log_b c$, $\cancel{\frac{1}{2}}\, 2\log_c a$

$\cancel{\log}\ \frac{1}{\log_c a}$ $\quad \frac{\log_a c}{\log_a b}$ $\quad \cancel{\log}\ \frac{2}{\log_a c}$

с учётом что $\quad 2\log_a b$

№4. $\begin{cases} \text{НОД } a, b, c = 14 \\ \text{НОК } (\ldots) = 2^{17}\cdot 7^{18} = 14\cdot k_1\cdot k_2\cdot k_3 \end{cases}$

k_1, k_2, k_3 – вз. простые ч.

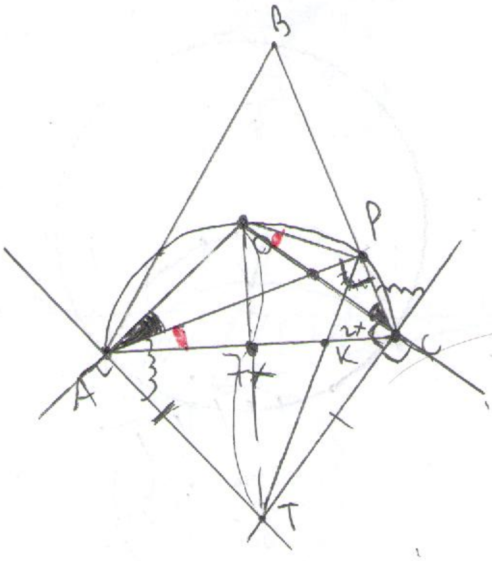
$14\cdot k_1$, $14\cdot k_2$, $14\cdot k_3$

$2^{16}\cdot 7^{17} = k_1\cdot k_2\cdot k_3$

2 7 1

$18 \times 16 = 108 + 18\cdot 10 = 288$ $\quad 4$

$288 \times 12 = 576 + 2880 = 3456$



$\triangle APCT$ – впис.

7

$\uparrow,\ 2\cdot 7$

1

$144 : 5 = 28{,}8$

-10, 44, -40, 40

$2^{16}\ \ldots;\ 7^{18};$

$\cancel{2^{16}}$

$\log_a b = 8\log_b c$

$\frac{1}{\log_b a} = 8\log_b c$

$4\log_b c = 1 + 2\cdot\frac{\log_b a}{\log_b c}$

$1 = 8k\cdot t$

$4k = 1 + \frac{t}{k} \Rightarrow 4k = 1 + \frac{1}{8k^2} \ \Big|\ 32k^3$