Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100821**

ID профиля: **867601**

Вариант 22

1

Чистовик

1) $S_{15}=\frac{2a_1+14d}{2}\cdot 15=(a_1+7d)15=15a_1+105d$

$a_7a_{16}=(a_1+6d)(a_1+15d)=a_1^2+21a_1d+90d^2$

$a_{11}a_{12}=(a_1+10d)(a_1+11d)=a_1^2+21a_1d+110d^2$

$a_7a_{16}>S-24$

$a_1^2+21a_1d+90d^2>15a_1+105d-24$

$a_{11}a_{12}<S+4$

$a_1^2+21a_1d+110d^2<15a_1+105d+4$ (1)

$15a_1+105d-24<a_1^2+21a_1d+90d^2$ (2)

Сложим (1) и (2)

$\cancel{15a_1}+\cancel{105d}-24+110d^2<\cancel{15a_1}+\cancel{105d}+4+90d^2$

$20d^2<28.$

$d^2<\frac{7}{5}$

$0<d<\sqrt{\frac{7}{5}}$ (т.к прогрессия возрастающая)

Решим нер-во (1) отн/a_1

$a_1^2+(21d-15)a_1+110d^2-105d-4<0.$

$a_{1,2}=\frac{15-21d\pm\sqrt{(21d-15)^2-4(110d^2-105d-4)}}{2}=$

$=\frac{15-21d\pm\sqrt{441d^2+225-630d-440d^2+420d+16}}{2}=$

$=\frac{15-21d\pm\sqrt{d^2-210d+241}}{2}$

(2)

Чистовик

1) Т.к прогрессия сост. из целых чисел, то $d = 1$ т.к $2 > \sqrt{\frac{7}{5}}$

Подставим возможное d в (1) и (2).

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \\ 15a_1 + 105 - 24 < a_1^2 + 21a_1 + 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 114 - 105 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \\ (a_1 + 3)^2 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2}$$

$$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = -3 \pm \sqrt{8}$$

$-3 - \sqrt{8}$ $\quad$ $-3 + \sqrt{8}$

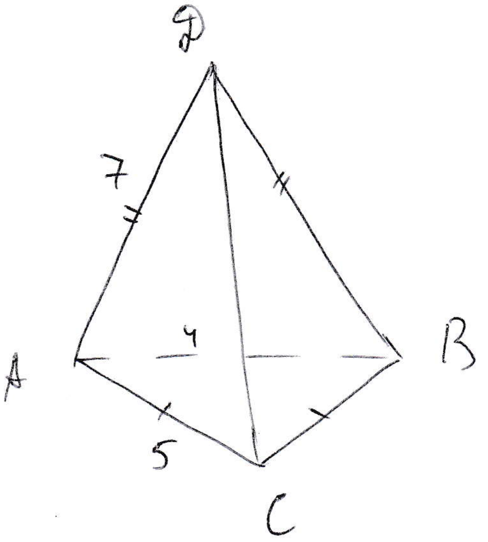
Значит a_1 лежит $(-3 - \sqrt{8}; -3 + \sqrt{8})$, при этом является целым

$2 < \sqrt{8} < 3$, значит a_1 мин равно -5, а a_1 мах равно -1.

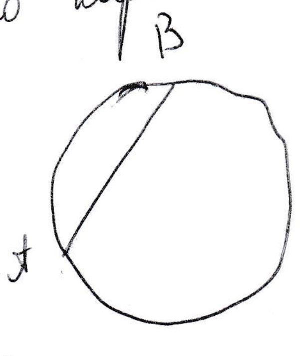
Ответ: $-5; -4; -3; -2; -1$.

③ Чистовик

2) Раз наш тетраэдр вписан так, что CD параллельно оси, то во-первых CD лежит на боковой пов-сти, а во вторых ⊥ основанию.



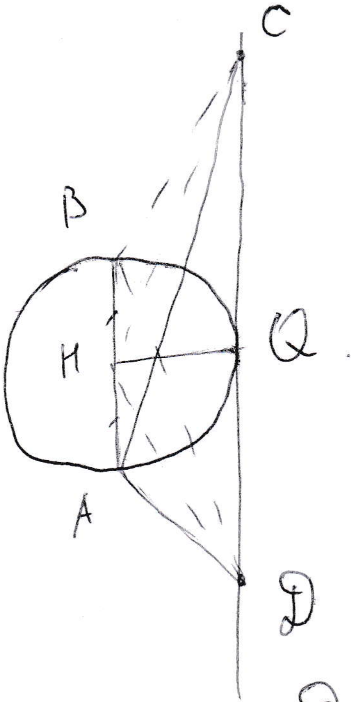
Наша фигура симметрична отн CD, т.к $\triangle ADC = \triangle CDB$.
Значит точки A и B равно-удалены от плоскости основания цилиндра => AB ∥ плоскости основания
Если через AB провести плоскость ∥ плоскости основания то картинка следующая.

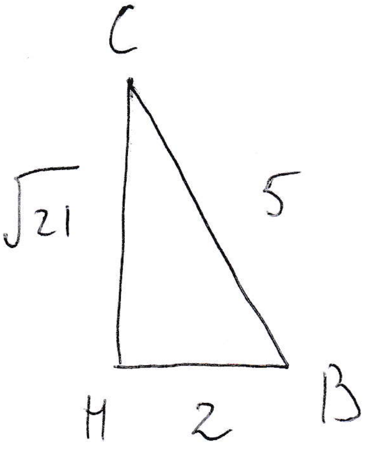


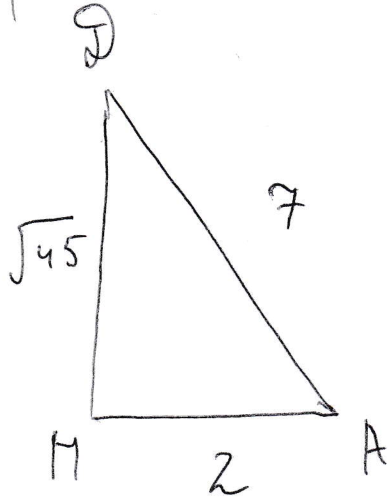
Видно, что радиус будет минимальным, когда он равен $\frac{AB}{2}$, т.е 2.

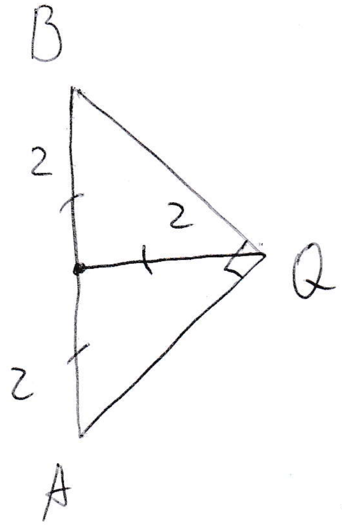
4

Чистовик.

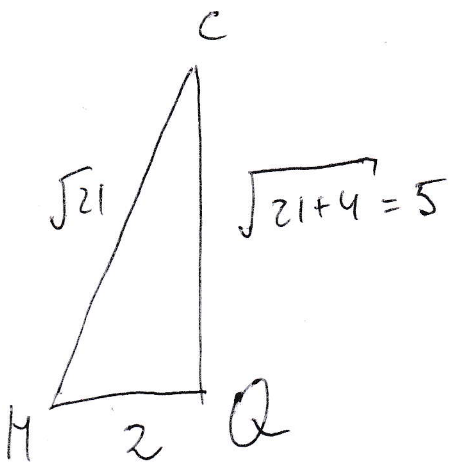


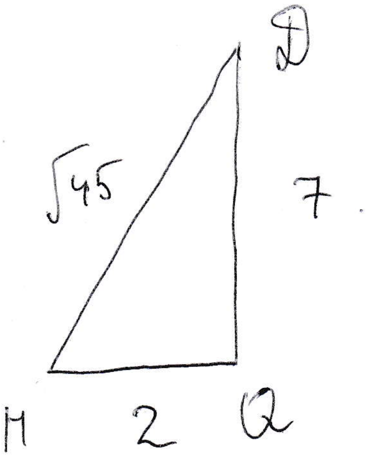






$\angle BQA = 90^\circ$ опирается на диаметр AB.





$CD = CQ + QD = 5 + 7 = 12.$

~~Ответ~~ Но точки C и D могли лежать по одну сторону от Q, тогда $CD = DQ - CQ = 7 - 5 = 2.$

Ответ: 2; 12.

5

Чистовик

2) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$

$a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\ 50)$. — возможные случаи раскрытия min.

$a^2+b^2 \le 14a+2b$.

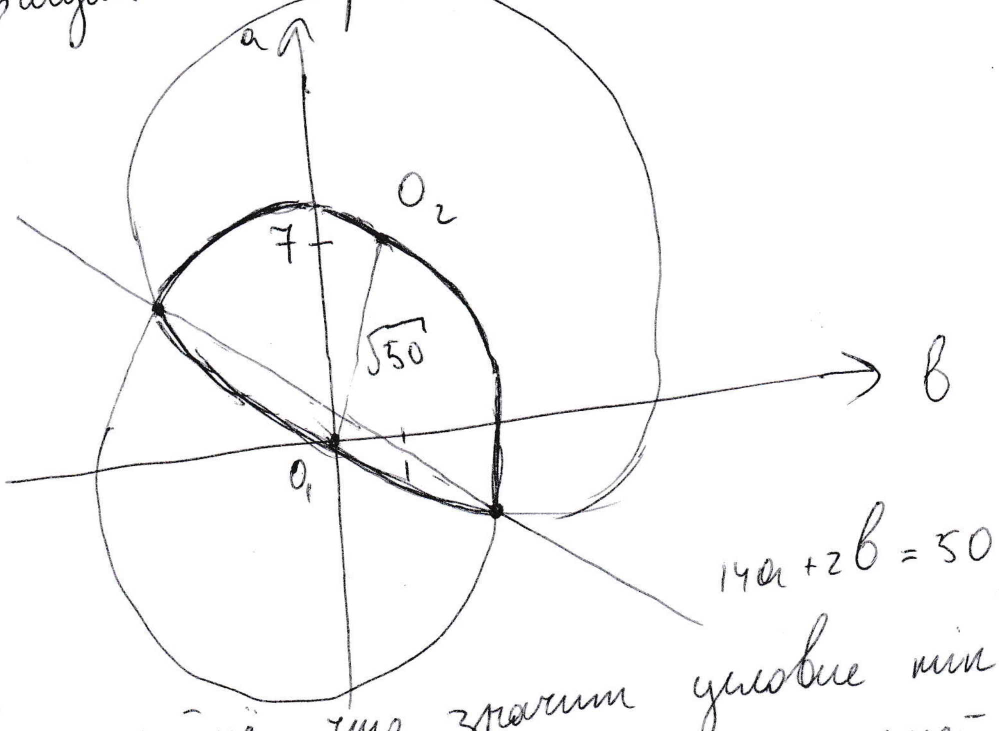
$a^2-14a+49+b^2-2b+1 \le 50$.

$(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$. (1)

$a^2+b^2 \le 50$. (2)

Видим, что условие $a^2+b^2 \le 50$ приоритетнее, т.к условие (1) это то же условие (2) только при больших a и b.

Нарисуем в координатах a(b) мн-ва (1) и (2).



Теперь поймём, что значит условие min.

Запишем условие пересечения окружностей.

$(a-7)^2+(b-1)^2 = a^2+b^2$

$-14a+49-2b+1=0$.

$14a+2b=50$.

Значит прямая $14a+2b=50$ проходит через точки пересеч. окружностей

(6) Чистовик

2) Т.к выше этой прямой будет приоритетным условие $a^2+b^2 \le 50$, а ниже $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$.

Наше исходное ~~окружно~~ условие $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$ – внутренность круга с центром $(a;b)$

Т.к это фигура с центром который двигается по ширной линии (см. чертёж) и ~~зона~~ может находиться внутри этой фигуры (в любой точке) Объясняется это условиями (1) и (2) т.к подходят точки внутри окружностей, по условию минимума подпрорентировало мн-во точек

Теперь нужно понять какая часть каждой полуокружности заштрихована жирным. Заметим, что достаточно определить только для одной окр-сти, т.к для второй окр. автоматически, т.к от одинакового радиуса.

Найдём координаты точек пересечения.

$a^2+b^2=50 \Rightarrow a=\pm\sqrt{50-b^2} \Rightarrow$ $\sqrt{50-b^2}=\frac{50-2b}{14}$

$14a+2b=50 \Rightarrow a=\frac{50-2b}{14}$ $\quad -\sqrt{50-b^2}=\frac{50-2b}{14}$

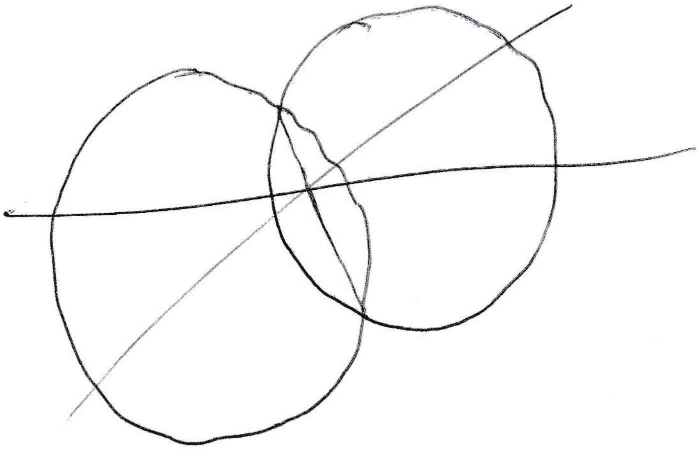
$50-b^2=\frac{4b^2-20b+2500}{196}$

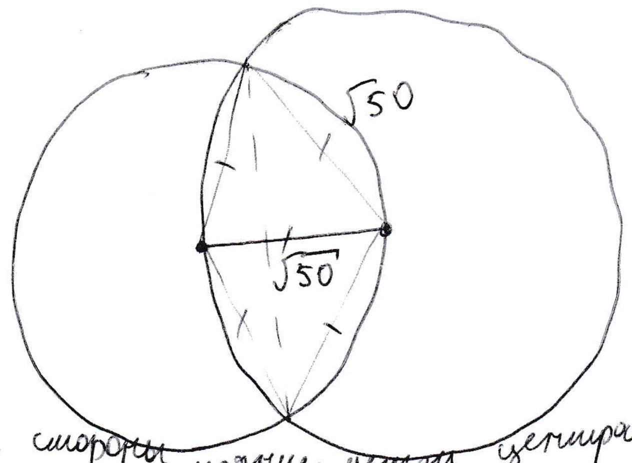
$196\cdot 50-50b^2=4b^2-20b+2500.$

$54b^2-20b-7400=0.$

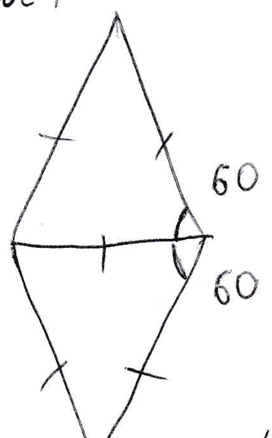
7

Чистовик.



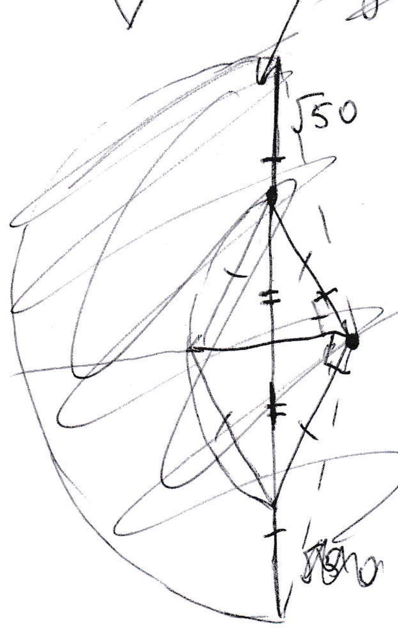


ромб, т.к. стороны – радиусы, а расстояние между центрами тоже радиус.

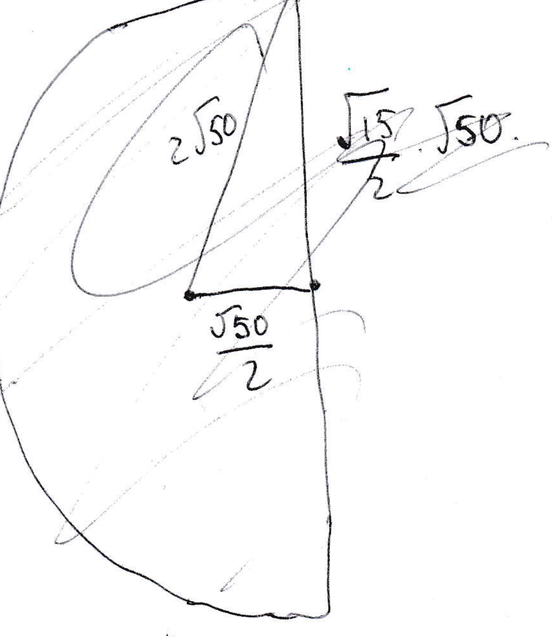


Значит каждая заштрихованная дуга составляет $\frac{1}{3}$ от всей длины окружности (центральный угол 120°)

~~одна половинка искомой площади~~.

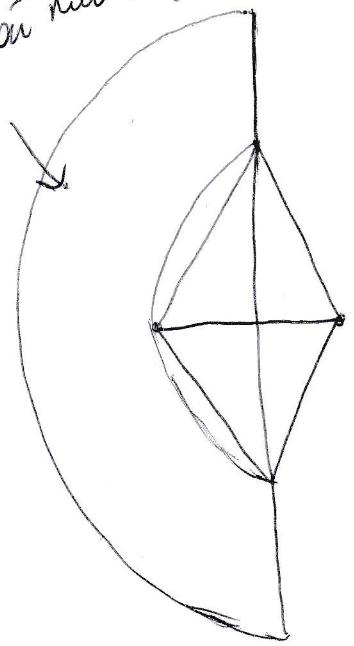


=>

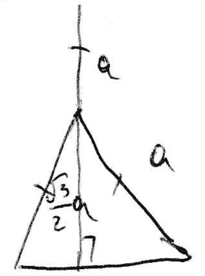


(8) Черновик

одна половинка искомой площади



① Большая половинка подобна меньшей с коэффициентом



$$K = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a + a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

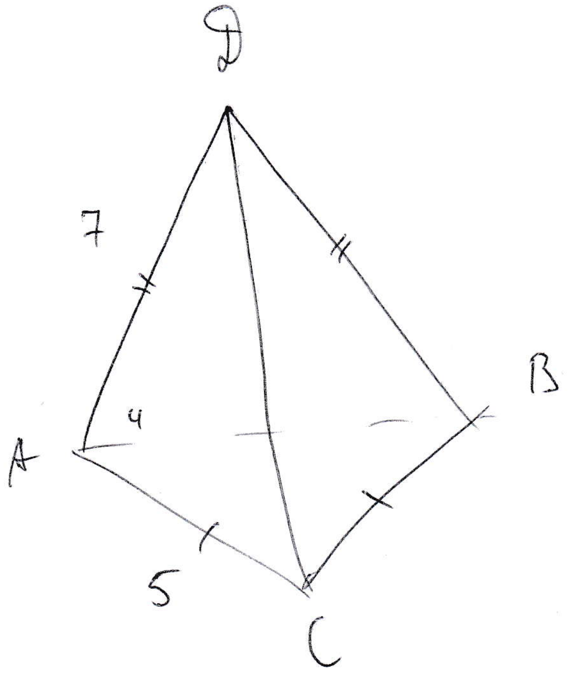
$$S_{\text{меньшей}} = \frac{1}{3}\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 50 = \frac{50}{3}\pi.$$

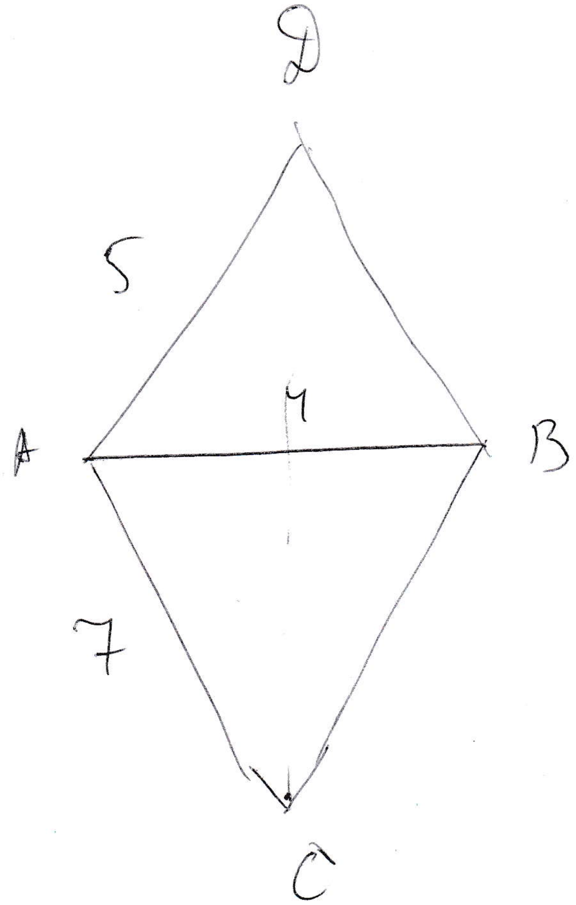
$$S_{\text{большей}} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{50}{3}\pi$$

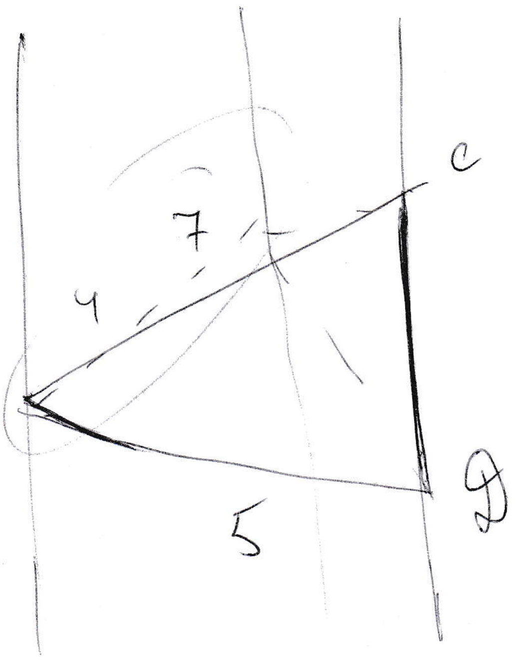
② Вся площадь нужной фигуры состоит из 2-х больших кусочков $S = \frac{100}{3}\pi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

Отв: $\frac{100}{3}\pi\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

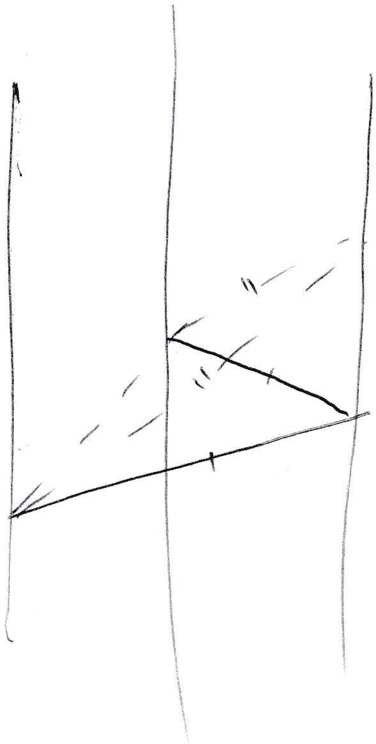
$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$$
$$a^2+b^2 \le \min(14a+2b,\ 50)$$

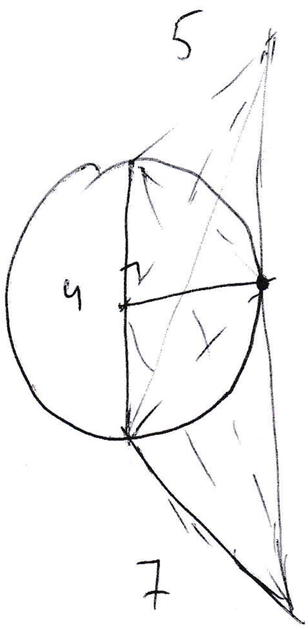


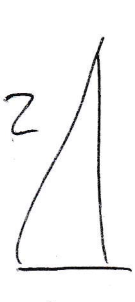




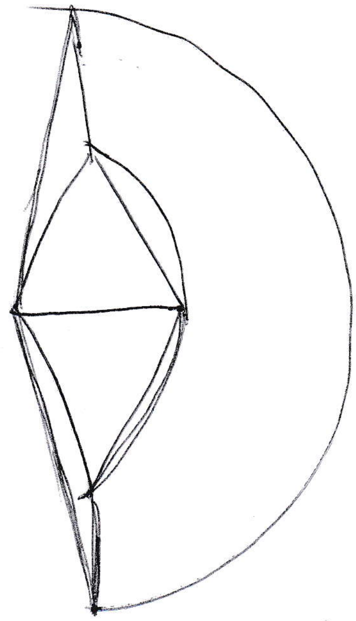
$\frac{3}{[illegible]}$, 5.

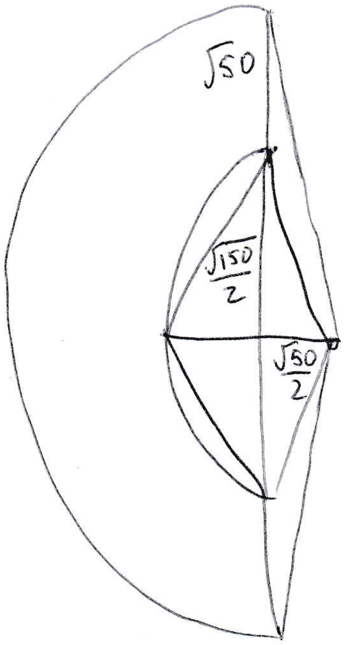


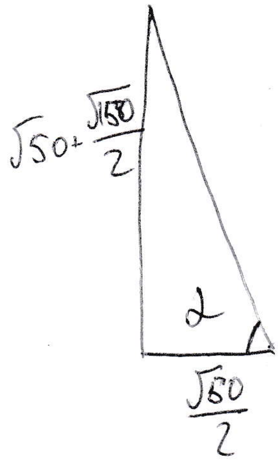




$4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$







$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{50} + \frac{\sqrt{150}}{2}}{\frac{\sqrt{50}}{2}}$$

8.

Черновик

г) Но точки C и D могли лежать по одну

$$\begin{array}{r} 43 \\ 416 \times 196 \\ 5 \\ \hline 9800 \\ -\,2500 \\ \hline 7400 \end{array}$$

S_{15}

$S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 =$

$a_7 a_{16} > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4$

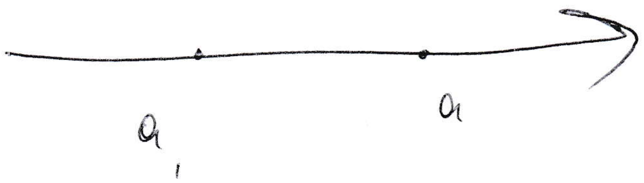
$a_1 - ?$

$-14a + 49 - 2b + 1 = 0.$

$\underline{14a + 2b = 50.}$

$a_1^2 + (21d - 15)a_1 + 110d^2 - 105d - 4 < 0.$

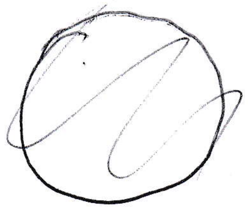
$a_1 = \frac{-21d + 15 \pm \sqrt{(21d-15)^2 - 4 \ldots}}{}$



$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 21 \\ \hline 21 \\ +\ 42\ \ \\ \hline 441 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \times\ 30 \\ \hline 630. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ +\ 16 \\ \hline 241 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \times\ 30 \\ \hline 0 \\ 63\ \ \\ \hline \end{array}$$

32 | 4   48

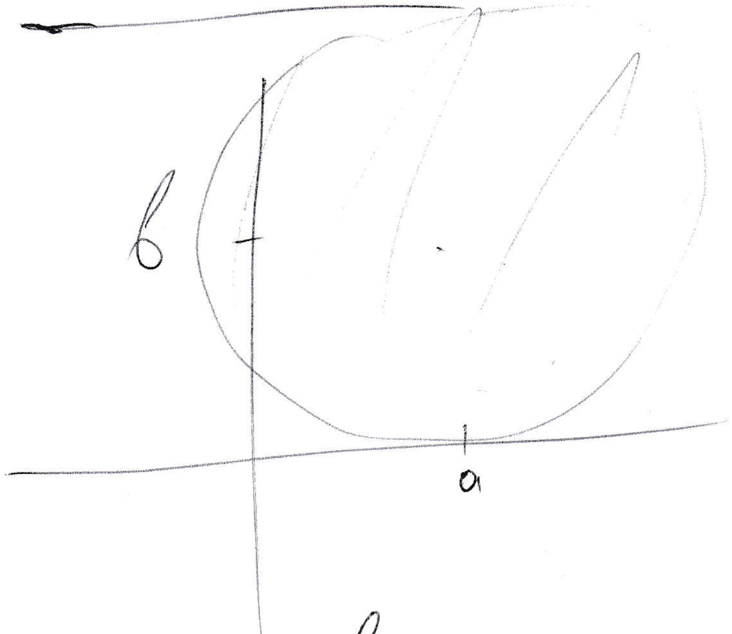
5



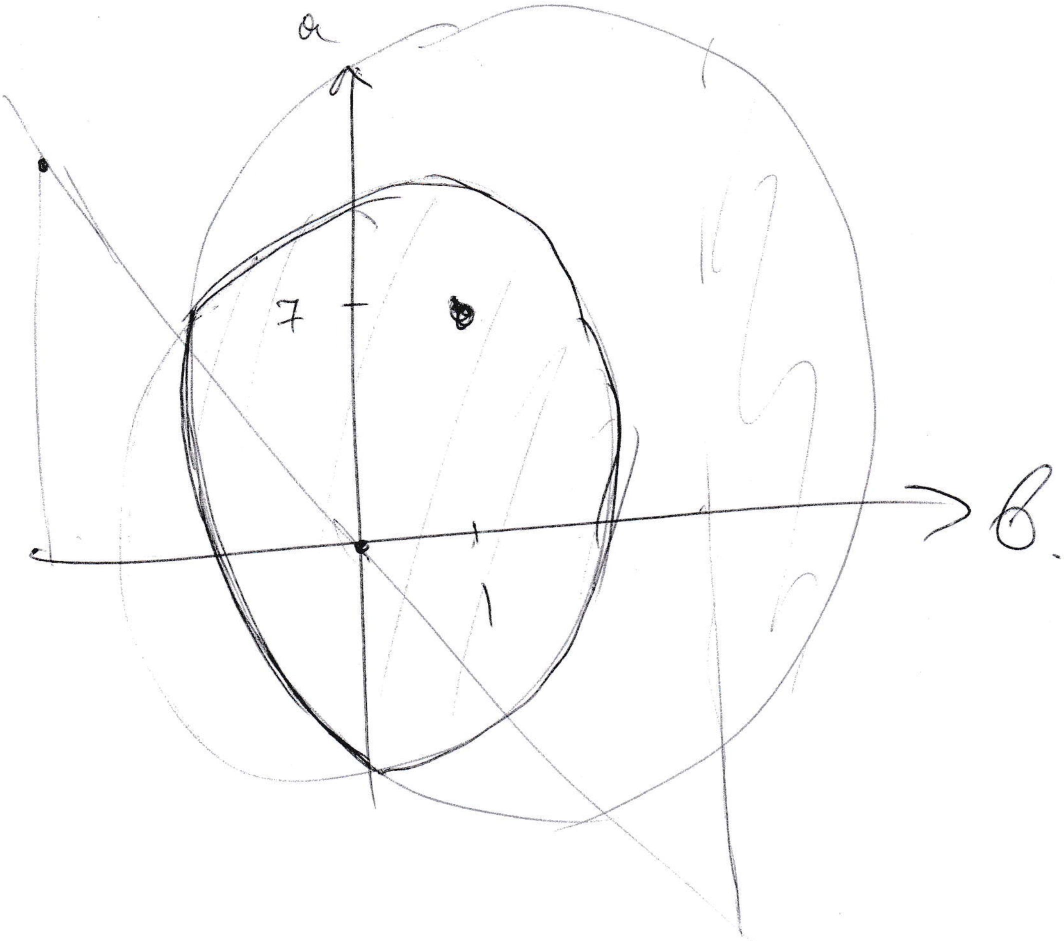
$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50$

$a^2+b^2 \leq \min(14a+2b\ ;\ 50)$

$a^2+b^2 \leq 14a+2b.$



$a^2-14a+b^2-2b.$



a
7
1
b

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100821**

ID профиля: **867601**

Вариант 22

① Чистовик

4) Заметим, что 3 числа удовлетворяющих этому условию имеют вид $2\cdot 7^n$; $2^m\cdot 7$; $2^k 7^l$ где $n, m, k, l \in N$. при этом $n \le 18$, $m \le 17$, $k \le 17$, $l \le 18$. При этом какие-то степени при 2 и 7 должны быть максимальными, чтобы НОК получился.

а) Предположим n и m максимальны. Всевозможных троек таких чисел $k\cdot l = 17\cdot 18$

б) Предположим n и k максимальны. Всевозможных троек таких чисел $m\cdot l = 17\cdot 18$.

в) Предположим m и l максимальны. Всевозможных троек таких чисел $n\cdot k = 18\cdot 17$

г) Предположим k и l максимальны. Всевозможных троек таких чисел $n\cdot m = 18\cdot 17$

Итого всего возможных троек $4\cdot 18\cdot 17$.

Но мы не учли возможные пересечения, ведь возможны совпадения 1 и 3 числа, 2 и 3 числа. Таких совпадений 1 и 3 числа 18 раз, 1 и 2 числа 17 раз.

Для случая а возможны $17+18$ совпадающих троек чисел, для б ~~одна такая тройка~~, для в тоже 1, а для г таких совпадений не бывает.

т.е. всевозможных различных неупорядоченных троек

$4\cdot 18\cdot 17 - 4$

(2) Чистовик

Посчитаем возможные совпадения

Для случая а: $2\cdot7^{18}$, $2^{17}\cdot7$, $2^{k}\cdot7^{e}$ Возможно совпадение 1 и 3, а также 2 и 3 числа, т.е 2 раза нужно вычесть

Для случая б: $2\cdot7^{18}$, $2^{m}\cdot7$, $2^{17}\cdot7^{k}$ Возможно совпадение 2 и 3 числа, т.е 1 раз нужно вычесть.

Для случая в: $2\cdot7^{n}$, $2^{17}\cdot7$, $2^{n}7^{17}$ Возможно совпадение 1 и 3 числа, т.е. 1 раз нужно вычесть.

Для случая г: совпадения невозможны: $2\cdot7^{n}$, $2^{m}\cdot7$, $2^{17}\cdot7^{18}$.

~~Итого разных неупорядоченных троек~~

~~$4\cdot17\cdot18-4=4(17\cdot18-1)$~~

~~А упорядоченных в 6 раз больше, т.е. $24(17\cdot18-1)=24\cdot305=$~~

~~$=7320$.~~

~~Ответ: 7320.~~

Итого троек с разными числами $4\cdot17\cdot18-4$ неупорядоченных, упорядоченных в 6 раз больше. Также нужно добавить кол-во разных троек, где есть 2 совпадения на каждый такой случай возможно 3 разных упорядоченных, значит суммарно нужно добавить 12.

$$(4\cdot17\cdot18-4)\cdot6+12=24\cdot305+12=7320+12=7332.$$

Ответ: 7332

Чистовик

3

5) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{1}{2}\log_a b$; $4\log_b c$; $2\log_c a$

где $a=\frac{x}{2}+1$, $b=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$, $c=\frac{3x}{2}-6$

~~Если 2 числа равны, то их отношение равно 1.~~

~~1)~~ $\cancel{\frac{\frac{1}{2}\log_a b}{4\log_b c}=1}$

Условие можно переформулировать так: произведение 2-х log равно 3-му log плюс 1 в квадрате.

1) $\frac{1}{2}\log_a b\cdot 4\log_b c=(2\log_c a+1)^2$

$2\log_a c=(2\log_c a+1)^2$

$\log_a c=t$

$2t=\left(\frac{2}{t}+1\right)^2 \Leftrightarrow 2t=\frac{4}{t^2}+1+\frac{4}{t} \Leftrightarrow 2t^3=4+t^2+4t$

$2t^3-t^2-4t-4=0$

$t=2$ - решение

$$\begin{array}{l|l} 2t^3-t^2-4t-4 & t-2 \\ \hline -\;2t^3-4t^2 & 2t^2+3t+2 \\ \quad -\;3t^2-4t & \\ \quad\;\; 3t^2-6t & \\ \qquad 2t-4 & \end{array}$$

$2t^2+3t+2$ — $D=9-16<0$, т.е. $t=2$ ед. корень

т.е. $\log_a c=2$

(4)

Чистовик

2) $4\log_b c \cdot 2\log_c a = \left(\frac{1}{2}\log_a b + 1\right)^2$

$8\log_b a = \left(\frac{1}{2}\log_a b + 1\right)^2$

$\log_b a = t$.

$8t = \left(\frac{1}{2t} + 1\right)^2$

$8t = \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t} + 1 \Leftrightarrow 32t^3 = 1 + 4t + 4t^2$

$32t^3 - 4t^2 - 4t - 1 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ - корень.

$$
\begin{array}{r|l}
32t^3 - 4t^2 - 4t - 1 & t - \frac{1}{2} \\
\cline{2-2}
-\ 32t^3 - 16t^2 & 32t^2 + 12t + 2 \\
\cline{1-1}
12t^2 - 4t & \\
-\ 12t^2 - 6t & \\
\cline{1-1}
2t - 1 & \\
2t - 1 & \\
\cline{1-1}
0 & \\
\end{array}
\qquad D = 144 - 8 \cdot 32 < 0
$$

$t = \frac{1}{2}$ - единственный корень.

$\log_b a = \frac{1}{2}$

(5)

Чистовик

3) $\frac{1}{2}\log_a b \cdot 2\log_c a = (4\log_b c + 1)^2$

$\log_c b = (4\log_b c + 1)^2$

$\log_c b = t$.

$t = \left(\frac{4}{t} + 1\right)^2$

$t = \frac{16}{t^2} + \frac{8}{t} + 1 \Leftrightarrow t^3 = 16 + 8t + t^2$

$t^3 - t^2 - 8t - 16 = 0$.

$$
\begin{array}{r|l}
t^3 - t^2 - 8t - 16 & t-4 \\
-\ t^3 - 4t^2 & t^2 + 3t + 4 \\
\hline
3t^2 - 8t & \\
-\ 3t^2 - 12t & \\
\hline
4t - 16 &
\end{array}
$$

$D = 9 - 16 < 0$

$t = 4$ - единственный корень.

$\log_c b = 4$.

(6) Чистовик

4) $\log_a c = 2$

$\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{3x}{2}-6\right) = 2$ $\quad \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \frac{3x}{2} - 6$ $\quad \frac{x^2}{4} + 1 + x = \frac{3x}{2} - 6$

$x^2 - 2x + 28 = 0$ $\quad - D < 0$ корней нет.

$\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 7 = 0$

$\log_b a = \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{2}$ $\quad \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$

$\frac{x^2}{4} + 1 + x = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$ $\quad \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + \frac{21}{4} = 0$

$x^2 - 10x + 21 = 0$ $\quad x_1 = 3 \quad x_2 = 7.$

$\log_c b = 4$

$\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = 4$

$\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^4 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \iff \frac{(3x-12)^4}{4} = \frac{14x-17}{4}$

~~$(3x-12)^4 = 14x - 17 \iff 81x^4 + 12\ldots$~~

~~$\left((3x-12)^4\right)' = 4(3x-12)^3 \cdot 3$~~

~~$(14x-17)' = 14.$~~

$(3x-12)^4 - 14x + 17 = g(x)$

$(3x-12)^4 - 14x + 17 = 0.$

$g'(x) = 4(3x-12)^3 \cdot 3 - 14 = 0.$

$12(3x-12)^3 = 14.$

$(3x-12)^3 = \frac{7}{6}$

$3x - 12 = \sqrt[3]{\frac{7}{6}}$

$3x = \sqrt[3]{\frac{7}{6}} + 12.$

$x = \sqrt[3]{\frac{7}{6}} / 3 + 4$

(7)

Чистовик

$$\begin{array}{ccc} - & & + \end{array} \quad g'(x)$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{6}}/3+4 \quad \leftarrow \text{точка минимума.}$$

$$\searrow \qquad \nearrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{3\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{6}}}{3}-12\right)^4}_{>0} - \underbrace{\frac{14\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{6}}}{3}+17}_{>0} > 0 \Rightarrow \text{корней нет.}$$

ОДЗ изначального от log.

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1 > 0, \ \neq 1 \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} > 0, \ \neq 1 \\ \frac{3x}{2}-6 > 0, \ \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \neq \frac{14}{3} \end{cases}$$

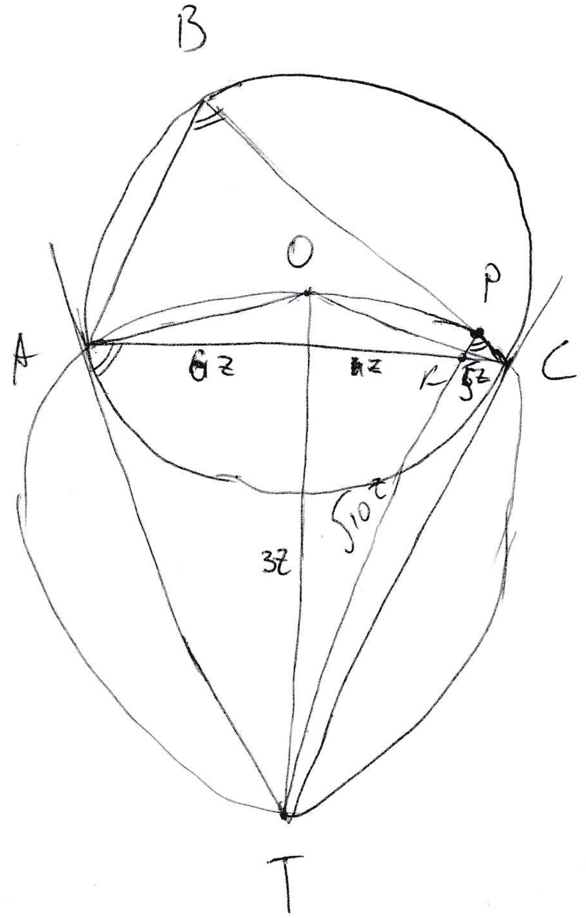
Значит подходит только $x = 7$.

Ответ: 7.

(8) Чистовик

$S_{APK}=7$ $S_{KPC}=5$.

б)



Заметим, что AOCT — вписанный четырёхугольник т.к $\angle A=90$ и $\angle C=90$ (касательная $\perp$ радиусу) $\Rightarrow$

$\angle TAC = \angle TPC$ как опирающиеся на одну дугу.

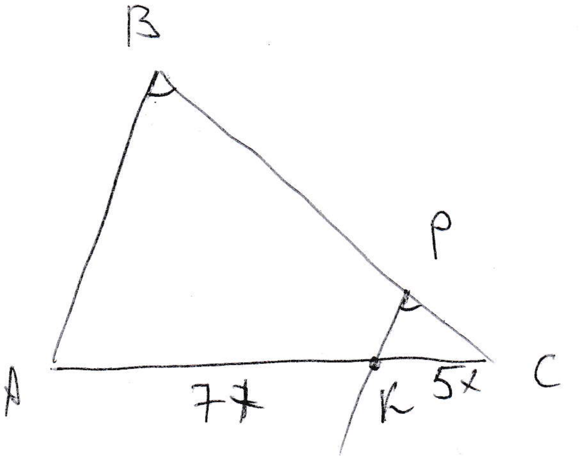
$\angle TAC = \angle ABC$ как угол между касательной и хордой AC - хорда AT - касательная

$\Rightarrow \angle ABC = \angle KPC \Rightarrow$

$\Rightarrow KP \parallel AB$.

$$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{7}{5}$$

(имеют общую высоту)



$\triangle ABC \sim \triangle KPC$

$$k = \frac{KC}{AC} = \frac{5x}{12x} \to$$

$$S_{ABC} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot S_{KPC} = \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{144}{5}.$$

Ответ: а) 144/5.

На чертеже z - пробег пункта б. не успел.

a, b, c

НОД (abc) = 14

НОК (abc) = $2^{17} \cdot 7^{18}$

$2^{16} \cdot 7^{17}$

$2 \cdot 7$ $\quad$ $\underline{2 \cdot 7}$

$2 \cdot 7$ $\quad$ $2 \cdot 7$

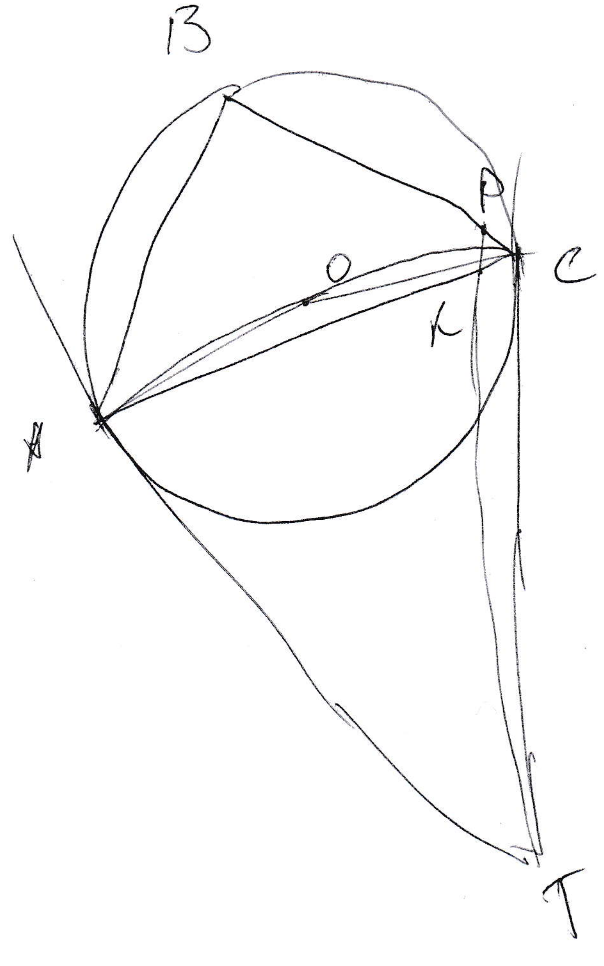
$2 \cdot 7$ $\quad$ $2 \cdot 7$

$\underline{2^{17} \cdot 7^{18}}$

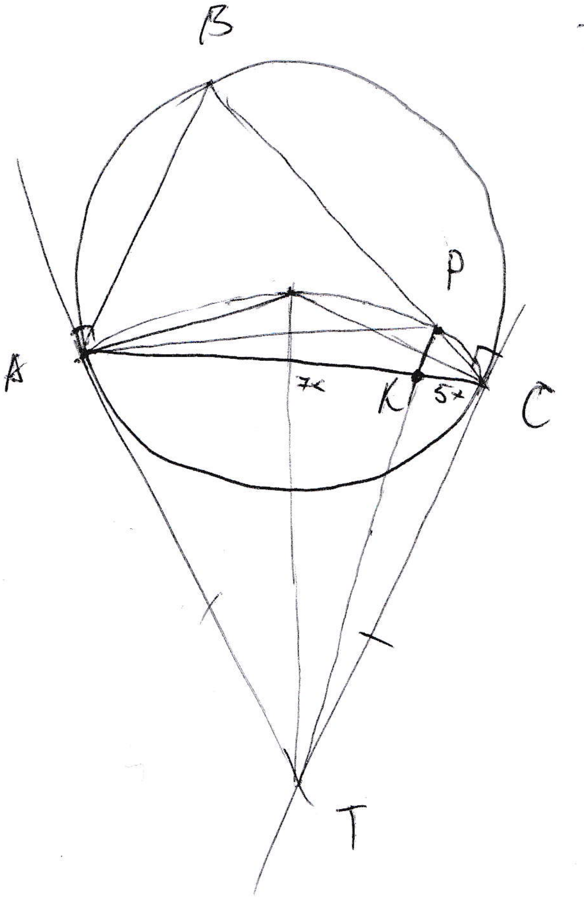
$2 \cdot 7^{\dots}$

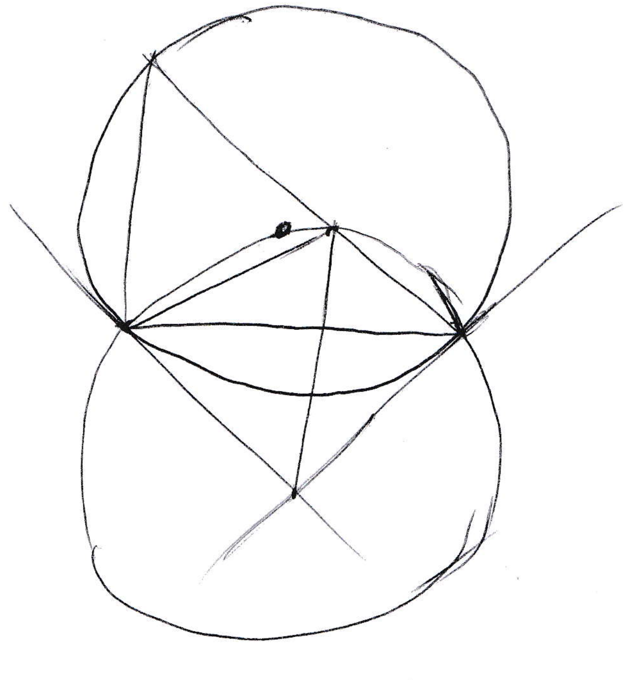
$2^{\dots} \cdot 7$

$2^{\dots} \cdot 7^{\dots}$



$\frac{BP}{PC} - ?$





4) Теперь решим полученные уравнения

$\log_a c = 2$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 2.$$

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+1+x = \frac{7}{2}x-\frac{17}{4}$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{5}{2}x+\frac{21}{4}=0 \qquad x^2-10x+21=0 \qquad x_1=3 \quad x_2=7.$$

$\log_b a = \frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} =$$

$$\left(\frac{3x}{2}-6\right)^4 = \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$$

$$(3x-12)^4 - 14x+17 = 0.$$

a b c

$3 \cdot 2 \cdot 1$.

$$\begin{array}{r} \overset{5}{18} \\ \times\ 17 \\ \hline 126 \\ +\ 18\ \ \\ \hline 306 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 305 \\ \times\ 24 \\ \hline 1220 \\ +\ 610\ \ \\ \hline 7320 \end{array}$$

$2 \cdot 64 - 16 - 16 - 4$.

$16 - 4 - 8 - 4$.

$32 \cdot \frac{1}{8} - 4\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2} - 1 =$

$= 4 - 1 - 2 - 1$.

$64 - 16 - 32 - 16$.