Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100758**

ID профиля: **882559**

Вариант 22

Олимпиада „Физтех" по математике
11 класс. Вариант 22. Часть 1.

Черновик

При $d=1$

$$\begin{cases} a_1^2+21a_1+90>15a_1+105-24 \\ a_1^2+21a_1+110<15a_1+105+4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}$$

$(a_1+3)^2>0$ при любых $a_1 \neq -3$

$a_1^2+6a_1+1<0$

$a_1^2+6a_1+1=0$

$D=36-4=32$

$a_1=\frac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=\frac{-6\pm4\sqrt{2}}{2}=-3\pm2\sqrt{2}$

$a_1\in(-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2})$, но $a_1\in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=-5;-4;-2;-1$

Ответ: $-5;-4;-2;-1$.

21100758 (U882559 M1301223)

Вариант 22 часть 1. Чистовик

№1.

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$n = 15$

$$S = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = 15a_1 + 105d$$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{16} = a_1 + 15d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ -a_1^2 + 21a_1 d - 110d^2 > -15a_1 - 105d - 4 \end{cases}$$

$-20d^2 > -28$

$20d^2 < 28$

$d^2 < 1,4$

$d < \sqrt{1,4}$, но т.к $\{a\}$ - возрастающая последовательность из целых чисел, то $d \geq 1 \Longrightarrow d = 1$

При $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}; \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

$(a_1+3)^2 > 0$ при любых $a_1 \neq -3$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 = 0$

$D = 36 - 4 = 32$

$a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$ Чистовик

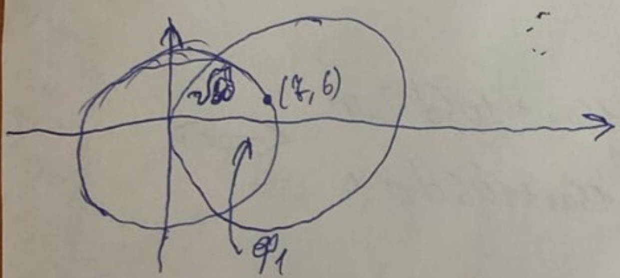
$a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$, но $a_1 \in Z \Rightarrow a_1 = -5; -4; -2; -1$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$.

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 = 14a+2b \Longleftrightarrow (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le 50\end{cases}$$

Рассмотрим плоскость aob и параметры (x.y)



$(a-x)^2+(b-y)^2 \le 50$ – круг радиуса $\sqrt{50}$ с плавающим центром.

Необходимо найти все центры окружности радиуса $\sqrt{50}$, которые пересекают $Ф_1$. Это все точки отстающие от 2-ух окружностей $\le \sqrt{50} \Longleftrightarrow$ все точки отстающие от центров 2-ух окружностей $\le 2\sqrt{50} \Longleftrightarrow$ все точки лежащие на пересечении кругов:

$$\begin{cases}x^2+y^2 \le (2\cdot 50)^2 \\ (x-7)^2+(y-1)^2 \le (2\cdot 50)^2\end{cases}$$

Найдем площадь этого пересечения

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100758**

ID профиля: **882559**

Вариант 22

11 класс. Вариант 22. Часть 2. Чистовик

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Пусть:

$a=2^{a_1}\cdot 7^{a_2}$

$b=2^{b_1}\cdot 7^{b_2}$

$c=2^{c_1}\cdot 7^{c_2}$

Тогда: $НОД(a,b,c)=2^{min(a_1,b_1,c_1)}\cdot 7^{min(a_2,b_2,c_2)}$.

$min(a_1,b_1,c_1)=1$

$max(a_1,b_1,c_1)=17$

$min(a_2,b_2,c_2)=1$

$max(a_2,b_2,c_2)=18$

1) Рассмотрим a_1, b_1, c_1

1.1) Пусть $a_1<b_1<c_1$, тогда:

$a_1=1$

$c_1=17$

$b_1\in[2;16]$, таких случаев 15 штук.

Умножим на количество перестановок: $15\cdot 6$

1.2) Пусть $a_1=b_1<c_1$ или $a_1<b_1=c_1$, таких случаев всего 6 штук

1.3) Всего вариантов для a_1, b_1, c_1: $15\cdot 6+6=16\cdot 6$.

2) Рассмотрим a_2, b_2, c_2

Рассуждаем аналогично:

2.1) $16\cdot 6$ $(a_2<b_2<c_2)$

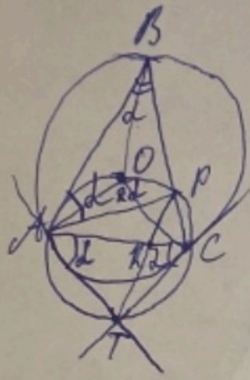
2.2) 6 $(a_2=b_2<c_2$ или $a_2<b_2=c_2)$

2.3) $16\cdot 6+6=17\cdot 6$

3) Всего случаев $16\cdot 6\cdot 17\cdot 6=9792$

Ответ: 9792

№6 Чистовик



Пусть $\angle ABC = \angle\alpha$

$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle\alpha$ (центр и впис угол)

$\angle APC = \angle AOC = 2\angle\alpha$ (впис угол опир на одну дугу)

$\angle ATC = 180 - 2\alpha$ (угол между 2-мя касат)

$\angle BPA = 180 - 2\alpha$

В $\triangle ABP$: $\angle ABP + \angle BPA + \angle PAB = 180°$

$\alpha + 180 - 2\alpha + \angle PAB = 180°$

$\angle PAB = \alpha$.

$\angle TAC = \angle ABC = \angle\alpha$

$\angle TAC = \angle ABC = \angle\alpha$ (угол между касательной и хордой)

$\angle ATC + \angle APC = 180°$

$\angle ATC + \angle AOC = 180°$ $\Longrightarrow$ точки A, O, P, C, T лежат на одной окружности.

Тогда $\angle APT = \angle ACT = \angle\alpha$ (как углы, опирающ на дугу AT) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \angle TPC = 2\alpha - \alpha = \alpha$

Имеем $\angle BAP = \angle TPC = \angle\alpha \Longrightarrow \angle BAP$ и $\angle TPC$ — леж при AP и PT и сек AP

$AB \parallel PT$ (по признаку)

$\triangle CPK \sim \triangle CBA$ (по 2-ум углам)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot h = 12$

$S_{PKC} = \frac{1}{2} KC \cdot h = 5$ $\Longrightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{12}{5} = k$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = k^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Longrightarrow S_{ABC} = \frac{5 \cdot 144}{25} = \frac{144}{5}$

Черновик

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14, \\ НОК(a;b;c)=2^{14}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

НОК – наименьшее общее кратное
НОД – наибольший общий делитель

$$16 \times 6 = 96$$

$$14 \times 6 = 102$$

$$102 \times 96 = 9792$$

№5

$$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2=\frac{x^2}{4}+\frac{2x}{2}+1=\frac{x^2}{4}+x+1$$

$$\left(\frac{7x}{2}-\frac{14}{4}\right)^2=\frac{14x}{4}-\frac{17}{4}-?$$

$$\log\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 \quad \left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$$

$$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$$

9792

$$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

№5

Чистовик

~~$a \neq$ Аeg~~ $a = \log_{(\frac{x}{2}+1)} = \left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)$

$b = \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2 = 4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2} - 6\right)$

№6 (пункт б)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot h = 12$

$S_{PKC} = \frac{1}{2}KC \cdot h = 5$

$\Longrightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{12}{5} = 2,4 = k$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = k^2 = 5,76 \Rightarrow S_{ABC} = 5 \cdot 5,76 = 28,8.$

$S_{ABC} = 28,8, \; S_{ABP} = 28,8 - 12 = 16,8$

$S_{ABP} = \frac{AB^2}{5 \cdot ctg\alpha} = \frac{AB^2 + tg\alpha}{5} = \frac{AB^2 \cdot 3}{20} = 16,8.$

$AB = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$

Проведём высоту PH, $O \in PH$, $\triangle ABP$ – равноб $PH = \frac{AB}{2} tg\alpha = \frac{4\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$, $\angle OPT = 90°$ угол между биссектрисами $\Rightarrow$

NPKA – прямоуг трап