Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100720**

ID профиля: **287428**

Вариант 22

N1 Чистовик ①

$$S = \frac{(a_1 + a_{15})\cdot 15}{2} = \frac{(2a_1 + 14d)\cdot 15}{2} = 15(a_1 + 7d)$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > 15(a_1+7d) - 24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < 15(a_1+7d)+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21ad + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \\ a_1^2 + 21ad + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 21ad - 90d^2 < -15a_1 - 105d + 24 \\ a_1^2 + 21ad + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20d^2 < 28 \quad (1) \\ a_1^2 + 21ad + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4 \quad (2) \end{cases}$$

$-a_1^2 - 21ad - 90d^2 < -15a_1 - 105d + 24$

(1): Т.к. $a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{Z}$, то $d \in \mathbb{Z}$, =>

$=> 20d^2 < 28 <=> d^2 < \frac{7}{5} <=> \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=-1 \end{array}\right.$ ~~(Т.к. посл-ть в~~

Т.к. посл-ть возраст., то $d=1$

(2): $\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \quad (1) \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \quad (2) \end{cases}$

(1): $a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 1 = 8$

$a_1 = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{a_1 = -3} \end{array}\right.$

$(a_1 - (-3-2\sqrt{2}))(a_1 - (-3+2\sqrt{2})) < 0$

+ − +

-6 -5 $-3-2\sqrt{2}$ -1 $-3+2\sqrt{2}$ 0

$-3-2\sqrt{2} < -5$

$-2\sqrt{2} < -2$

$2\sqrt{2} > 2$

$-3-2\sqrt{2} > -6$

$-2\sqrt{2} > -3$

$2\sqrt{2} < 3$

$8 < 9$

$-3+2\sqrt{2} > -1$

$2\sqrt{2} > 2$

$-3+2\sqrt{2} < 0$

$2\sqrt{2} < 3$

$8 < 9$

$a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}) \cap \mathbb{Z} <=>$

$<=> a_1 \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$

~~Итак $a_1 \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$~~

(2): $a_1^2 + 6a_1 + 114 - 105 > 0 <=> a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 <=> (a_1+3)^2 > 0 <=> a_1 \neq -3$

Чистовик ②

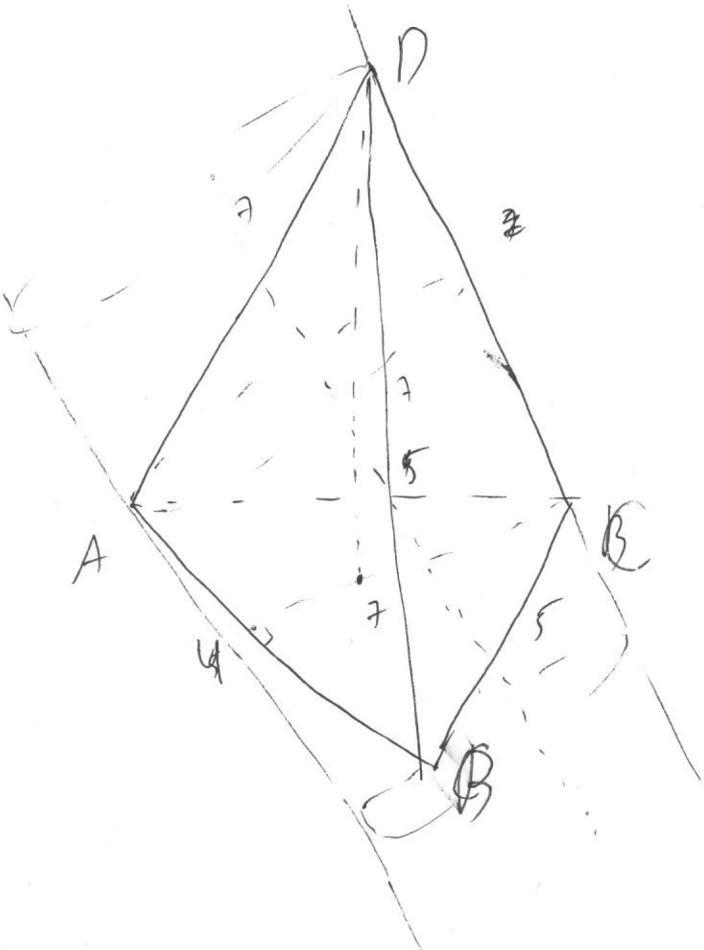
Тогда $\cancel{a_1} \in \begin{cases} a_1 \in \{-5; -4; -3; -2; -1\} \\ a_1 \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$

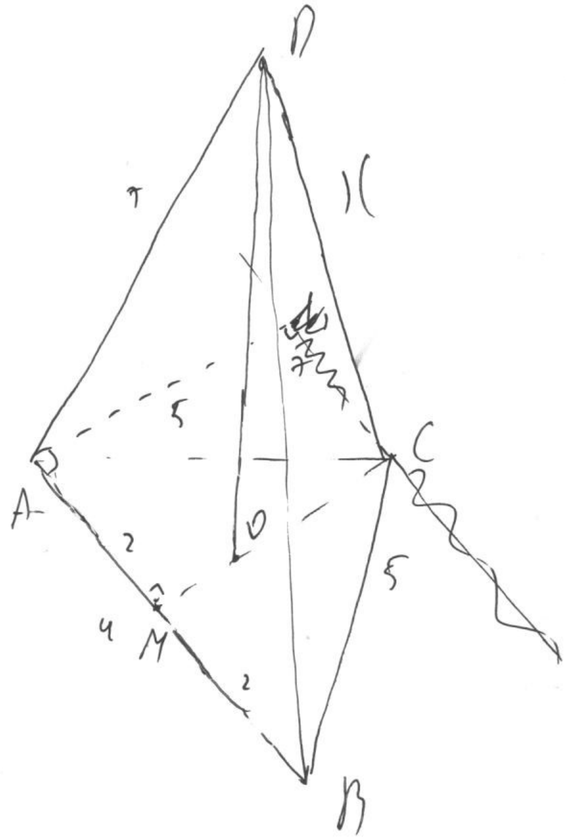
$\Leftrightarrow a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Отв: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

№ 2 $AB=4, AC=CB=5, AD=DB=7$ Чистовик (3)

Т-м тетраэдр с длиной $CD=11$





Пусть DO — высота тетраэдра

1) Т.к. ~~$AD=BD$~~ $DO \perp (ABC)$, $DO \perp AO$ и $DO \perp OB$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2 = AO^2 + OD^2$, $BD^2 = OB^2 + OD^2$, т.к. $AD=BD$, $AO=OB \Rightarrow$

$\Rightarrow O \in CM$, где M — сер-на AB. (CM — бисс-са $\angle C$, т.к. $\triangle ABC$ — р/б) ~~Проведем через M/C~~

~~C прямую $l \parallel AB$. Проведем $AK \perp l$. $AK \perp AB \Rightarrow$~~

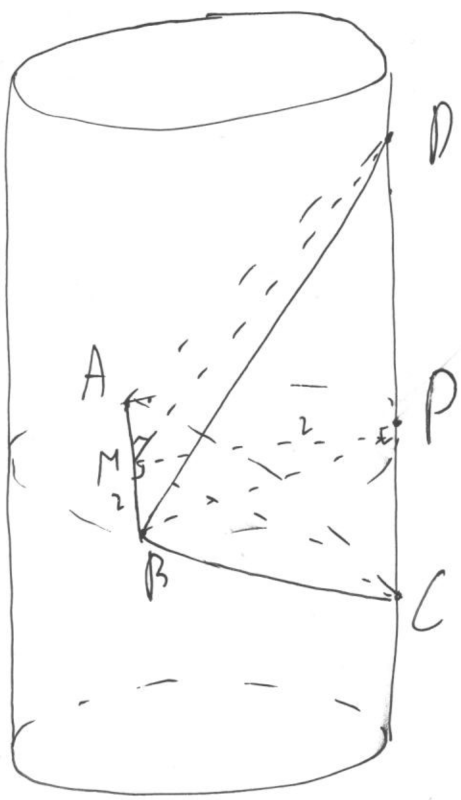
$\Rightarrow$ ~~$AK \parallel CM$. $\angle K, \angle M, \angle A = 90° \Rightarrow AKCM$ прямоугольник $\Rightarrow$~~

$\Rightarrow$ ~~$AK = CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$, а $KC = AM = 2$~~

~~$\angle(AB, DC) = \angle(KC, CD)$, т.к. $KC \parallel AB$ $= \arccos\left(\frac{2}{11}\right)$~~

2) $OC = \text{пр}_{(ABC)} DC$ и т.к. в $\triangle$ OC — б-са в р/б $\triangle$, то $OC \perp AB$, а также $AB \subset (ABC) \Rightarrow CD \perp AB$ по т. о 3х $\perp$-рах. Тогда $AB \subset \alpha \mid \alpha \perp CD$. Т.к. $CD \perp l$, где l — ось цилиндра, то $AB \subset \alpha \mid \alpha \parallel$ осн-ю цилиндра

Черновик (4)



Пусть $P = CD \cap \alpha$.

Т.к. $PD \perp \alpha$, а $BP, AP \subset \alpha$, то $BP, AP \perp PD$. Тогда

$BD^2 = BP^2 + PD^2$, $AD^2 = AP^2 + PD^2$.

Т.к. $BD = AD$, то $AP = BP$.

Тогда $\triangle APB$ – р/б и $MP \perp AB$.

Т.к. $MP \subset \alpha$, то $MP \perp CD \Rightarrow$

$\Rightarrow MP$ – общий $\perp$-р к AB и $CD \Rightarrow$

$\Rightarrow MP = \rho(AB, CD) = \rho(M, CD)$

~~Т.к. MP~~

Пусть $MP = y$ $\quad BP = \sqrt{4+y^2}$

$\sin \angle ABP = \frac{MP}{BP} = \frac{y}{\sqrt{4+y^2}}$

$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BP \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot MP = 2y$

R ~~цилиндра~~ $= R$ окр-ти, опис. около $\triangle ABP =$

$= \frac{AB \cdot BP \cdot AP}{4S} = \frac{4 \cdot (4+y^2)}{4 \cdot 2y} = \frac{4+y^2}{2y}$

R минимален, когда $f = \frac{4+y^2}{y}$ миним-на.

$f' = \frac{(4+y^2)' \cdot y - y'(4+y^2)}{y^2} = \frac{2y^2 - 4 - y^2}{y^2} = \frac{y^2-4}{y^2}$

~~экстремум~~ крит. т-ка f: $f = 0$ $\quad y = \pm 2$

f' $-$ $+$ $-$ $+$

f $\searrow -2 \nearrow 0 \searrow 2 \nearrow$ f

Т.к. $y > 0$, то R мин при $y = 2$

$BP = \sqrt{MB^2 + MP^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. $PD = \sqrt{BD^2 - BP^2} =$

$= \sqrt{49 - 8} = \sqrt{39}$. $CP = \sqrt{MC^2 - MP^2} = \sqrt{(BC^2 - MB^2 - MP^2} =$

Чистовик 8

$= \sqrt{25-4-8} = \sqrt{13}$

Тогда $CD = DP + CP = \sqrt{39} + \sqrt{13} = \sqrt{13}\,(1+\sqrt{3})$

Отв: $\sqrt{13}\,(1+\sqrt{3})$

№ 3. Числовые (б)

$$\begin{cases} (11-a)^2+(4-b)^2 \le 50 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \quad (2) \end{cases}$$

Р-м (2)

$a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50)$

I ~~на~~ $14a+2b \ge 50 \Leftrightarrow b \ge 25-7a$

$\begin{cases} b \ge 25-7a \\ a^2+b^2 \le 50 \end{cases}$ – круг с ц-ром $(0,0)$ и рад. $5\sqrt{2}$.

Найдем т-ки пер-я окр-ти с $b = 25-7a$

$a^2+(25-7a)^2 = 50$

$a^2+625-14\cdot 25a+49a^2 = 50$

$50a^2 - 14\cdot 25a + 23\cdot 25 = 0$

$2a^2-14a+23=0$

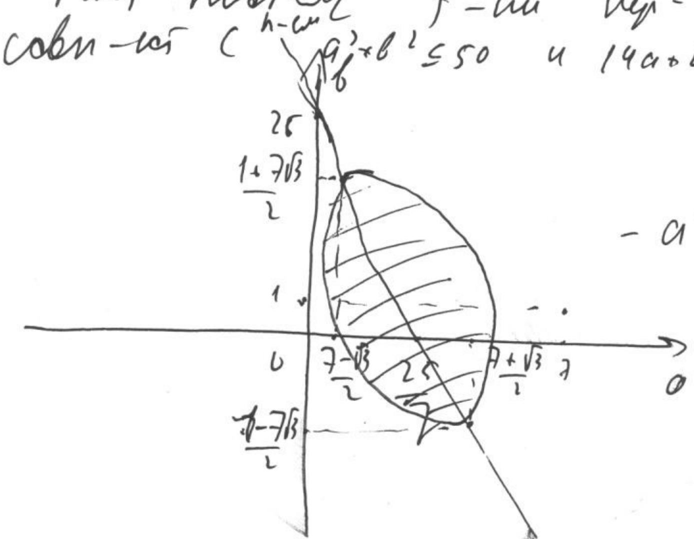
$\frac{D}{4} = 49-46 = 3$

$a = \frac{7 \pm \sqrt{3}}{2} \quad b = 25 - \frac{49 \pm 7\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \mp 7\sqrt{3}}{2}$

II $\begin{cases} b < 25-7a \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 25-7a \\ a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b < 25-7a \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$ – шар с ц-ром в $(7;1)$ и рад. $5\sqrt{2}$

При $14a+2b=50$, $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$ и $a^2+b^2 \le 50$ равносильны, поэтому т-ки пер-я $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$ и $14a+2b=50$ совп-ют с т-ми $a^2+b^2 \le 50$ и $14a+2b=50$



– $a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50)$

Чистовик (7)

~~Если~~

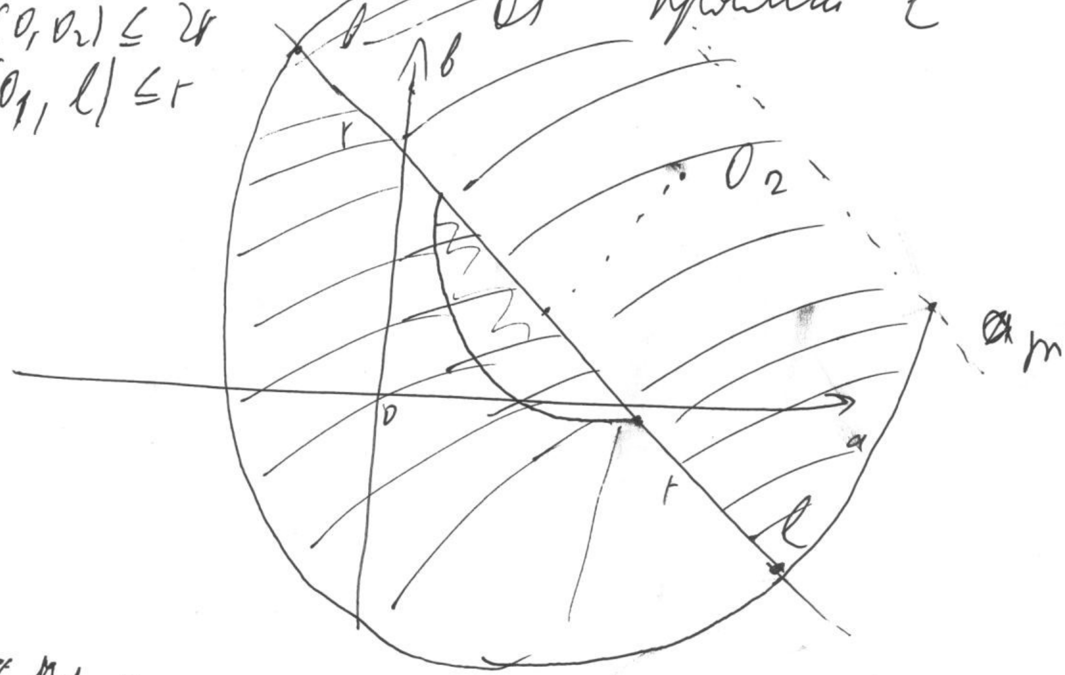
Р: (1): $(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \Leftrightarrow (a-x)^2+(b-y)^2\le 50$ — окр-ть с ц-ром в (x,y) и рад. $5\sqrt{2}$ на плос-ти (a,b)

Тогда нужно найти все (x,y), при пос. о-ти рад. $5\sqrt{2}$ и центром в (x,y) которые пересек. с сегментами окр-тей, задав-ми (2).

Пересечение части о-ти с ц-ром в $O_1(x,y)$ и рад. r с о-тью в ц-ре $O_2(a,b)$ и рад. r_1 лежащей за прямой l будет с-ть тогда и только тогда, когда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}O_1\in X\\ \rho(O_1,O_2)\le 2r\\ O_2\in Y\end{cases}\\ \begin{cases}O_1\in Y\\ O_2\in Y\\ \rho(O_1,O_2)\le 2r\\ \rho(O_1,l)\le r\end{cases}\end{array}\right.$$

, где X, Y — полупл-ти по разные ст-ны от прямой l

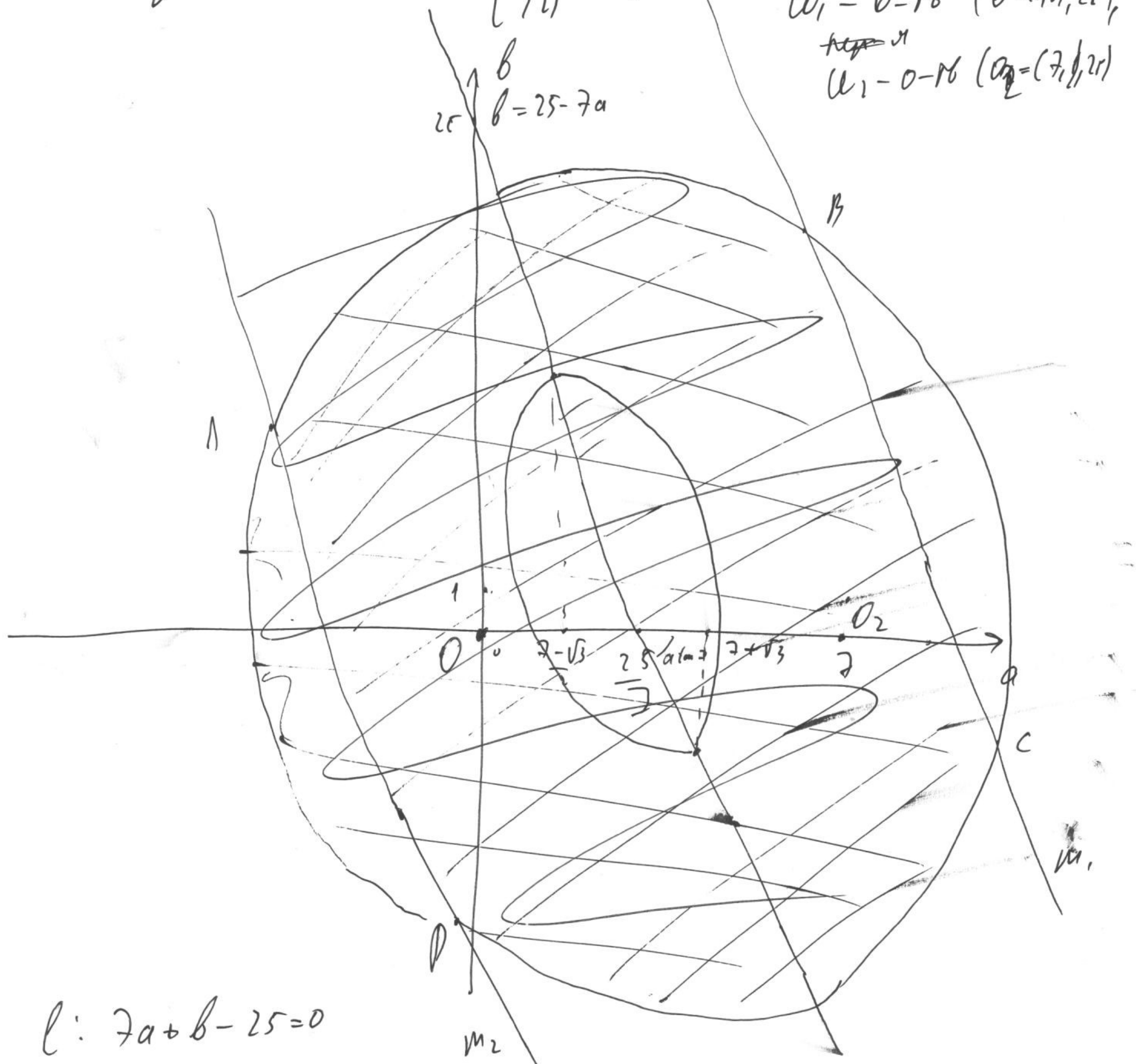


На ~~рис~~ пл-ти этому соотв-ет заштрихованная обл-ть.

Видно, что мн-во возможных ц-ов O_1 соотв-ет окр-ти с ц. в т. O_2 и рад. $2r$, лежащей по ту же сторону от прямой m что и ...

лежит от прямой l, (чистовик 8) где m — такая прямая, что $m \parallel l$ и $\rho(m, l) = r$ и m леж. по ту же сторону от l, что и O_2

Тогда сис-ма $\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases}$: Пусть $r > 5\sqrt{2}$ |
ω_1 — о-ть $(O=(0,0), 2r)$,
ω_2 — о-ть $(O_2=(7,1), 2r)$



$l: 7a + b - 25 = 0$

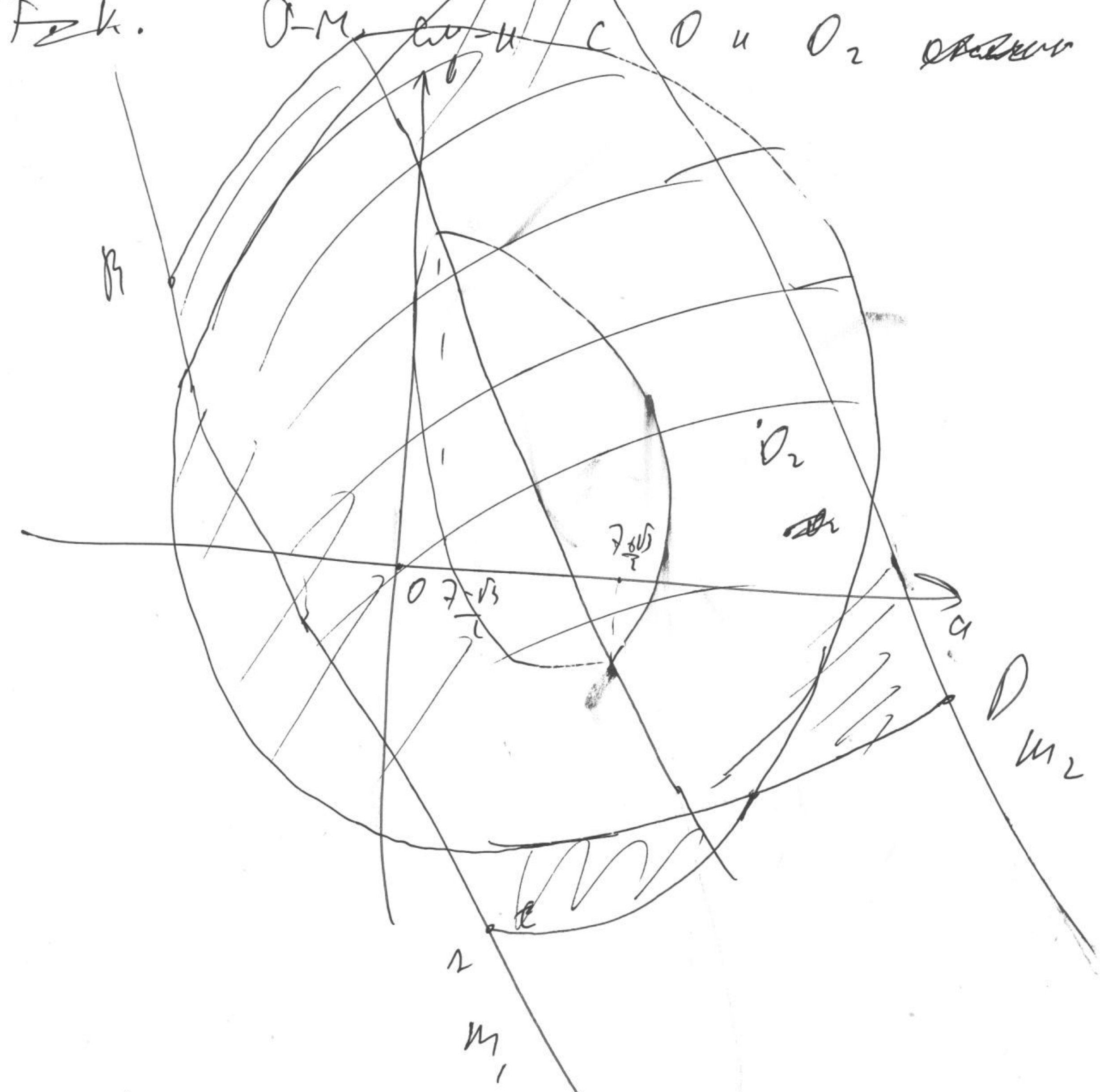
$$\rho(O, l) = \frac{|-25|}{\sqrt{49+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\rho(O_2, l) = \frac{|7\cdot 7 + 1\cdot 1 - 25|}{\sqrt{49+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \rho(O, l) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \rho(O, m_1) = \rho(O_1, m_2)$. Тогда

Чистовик для С   Лист 9

Т.к. О-м, ол-м с O и O_2 ~~[illegible]~~



~~Искомая~~ т.к. $S_1 = S_1$, $S(\overset{\frown}{BO_2A}) = S(\overset{\frown}{COM})$

$S = \vdash$ о-ти с р-м $10\sqrt{2}$

$S = \pi \cdot (10\sqrt{2})^2 = \pi \cdot 200$

Ответ: 200π

Черновик

$a_1^2+6a_1+114-105>0$

$a_1^2+6a_1+9>0$

$(a_1+3)^2>0$

a_1^2+

$a_1=-3: \quad a_{15}=-3+14=11$

$S=\frac{(-3+11)\cdot 15}{2}=4\cdot 15=60$

$a_7=-3+6=3$

$a_{16}=-3+15=12$

$a_7a_{16}=36=60-24$

$a_1=-5$

$a_{15}=-5+14=9$

$S=\frac{(9-5)\cdot 15}{2}=30$

$a_7=-5+6=1$

$a_{16}=-5+15=10$

$10>30-24$

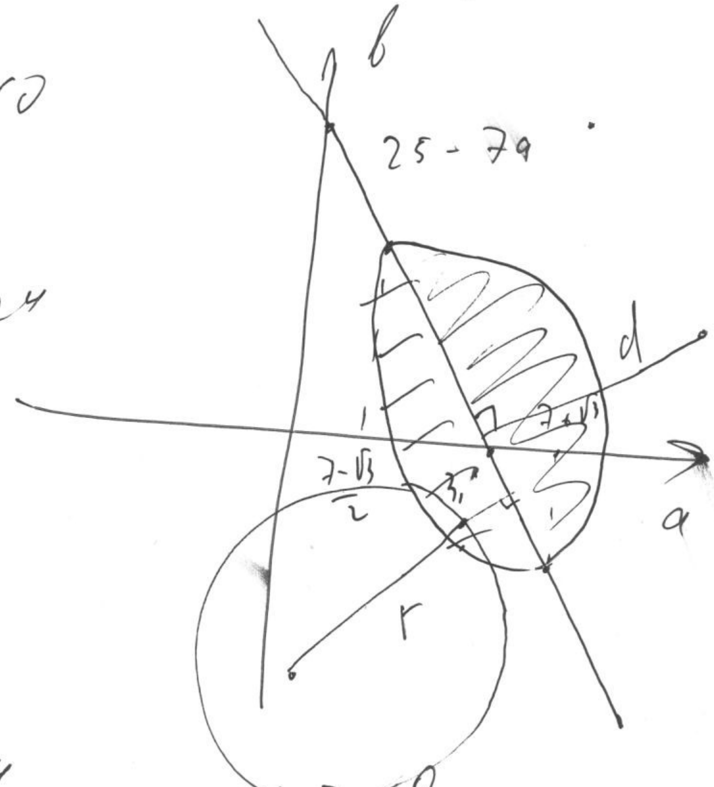
$a_{11}=-5+10=5$

$a_{12}=-5+11=6$

$30<34$

$14a+2b=50$

$b=25-7a$



$25-7a=0$

$a=\frac{25}{7} \quad \sqrt5\sqrt2$

$\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ 14a+2b=50 \end{cases}$

$a^2+(25-7a)^2=50$

$a^2+625-350a+49a^2=50$

$50a^2-350a+575=0$

$2a^2-14a+23=0$

$\frac{D}{4}=49-46=3$

$a=\frac{7\pm\sqrt3}{2}$

$\frac{7+\sqrt3}{2}\approx\frac{8,5}{2}\approx\frac{4,5}{2}$

$\frac{7-\sqrt3}{2}\approx\frac{5}{2}=3,$

$a^2+b^2\leq 14a+2b$

$a^2-14a+b^2-2b\leq 0$

$a^2-14a+49-49+b^2-2b+1-1\leq 0$

$(a-7)^2+(b-1)^2\leq 50$

$(x_0, y_0) \quad 7a+b-25=0$

$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \rho_1=\frac{25}{\sqrt{50}}=$

$\rho_2=\frac{|7\cdot7+1\cdot1-25|}{\sqrt{50}}=\frac{25}{\sqrt{50}}=\frac{25}{5\sqrt2}=\frac{5}{\sqrt2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100720**

ID профиля: **287428**

Вариант 22

№4 Чистовик ①

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=14 \\ НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

Пусть $a=14xkz$
$b=14kmn$ где x, k, z, m, n, t
$c=14znt$, взаимно простые

Каждая из набора x, k, z, m, n, t может задать набор a, b, c, и только один $\Rightarrow$ кол-во наборов (x, k, z, m, n, t) = кол-ву троек (a, b, c)

$НОД(a,b)=14k$ $НОД(b,c)=14n$, $НОД(a,c)=14z$

$НОД(a,b,c)=14$

$$НОК(a,b,c)=НОК(НОК(a,b),c)=$$

$$=\frac{НОК(a,b)c}{НОД(НОК(a,b),c)}=\frac{\frac{ab}{НОД(a,b)}\cdot c}{НОД\left(\frac{ab}{НОД(a,b)},c\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\cancel{14}\cdot xkz\cdot 14kmn}{\cancel{14k}}\cdot 14\cdot znt}{НОД(14xzkmn, 14znt)}=\frac{14xzkmn\cdot 14znt}{14\cdot z\cdot n}=$$

$$=14xzkmnt=2^{17}\cdot 7^{18}$$

$$xzkmnt=2^{16}\cdot 7^{17}$$

Т.к. x, z, k, m, n, t взаимно простые, то одно из этих чисел $=2^{16}$, одно из этих чисел $=7^{17}$, а остальные $=1$. Способов ~~выбрать~~ составить подбора таких равн-м $A_6^2=6\cdot 5=30$

Ответ: 30

№ 5 Числовые ②

$a = \log_{(\frac{\pi}{2}+1)^2}\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\frac{\pi}{2}+1}\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}\right)$ – модуля нет, т.к. $\frac{\pi}{2}+1>0$ и [illegible] числа

$b = 4\log_{\sqrt{\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)^2 = 4\log_{\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)$

$c = \log_{\sqrt{\frac{3\pi}{2}-6}}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = 2\log_{\frac{3\pi}{2}-6}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) =$

$\cancel{c = 2\log_{\frac{3\pi}{2}-6}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = \frac{2}{2\log_{\frac{\pi}{2}+1}\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)} = \frac{1}{a}}$

$\cancel{b = 4\frac{\log_{\frac{\pi}{2}+1}\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)}{\log_{\frac{\pi}{2}+1}\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}\right)}}$

$a = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}$ $b = 4\frac{\ln\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)}{\ln\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}\right)}$

$c = 2\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)}{\ln\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)}$ Пусть $\ln\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{17}{4}\right)=t$,

$\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=w$,

$\ln\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)=u$

$a = \frac{1}{2}\frac{t}{w}$, $b = 4\frac{u}{t}$, $c = 2\frac{w}{u}$, $a, b, c \neq 0$

$\cancel{ab = 2\frac{u}{w} = 2\cdot 2\frac{2}{c}} = \frac{4}{c}$ Т-м [illegible]

Числовые ③

ОДЗ

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+1>0 \\ \frac{7y}{2}-\frac{17}{4}>0 \\ \frac{3y}{2}-6>0 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 \\ \frac{7y}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 \\ y\neq 0 \\ \frac{3y}{2}-6\neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-2 \\ x>\frac{17}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{17}{14} \\ x>\frac{6\cdot 2}{3}=4 \\ x\neq 0 \\ y\neq \frac{21}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3}{2} \\ x\neq \frac{7\cdot 2}{3}=\frac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>4$$

I $\begin{cases} a=c \\ b=a-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{t}{w}=2\frac{w}{u} \\ 4\frac{u}{t}=\frac{1}{2}\frac{t}{w}-1 \end{cases}$ $\frac{t}{w}=4\frac{w}{u}$ $4w^2=tu$ $t=\frac{4w^2}{u}$

$4\frac{u\cdot u}{4w^2}=\frac{1}{2}\cdot 4\frac{w}{u}-1$

$\frac{u^2}{w^2}=2\frac{w}{u}-1$ $q=\frac{u}{w}$

$q^2=\frac{2}{q}-1$ $q^3=2-q$ $q^3+q-2=0$

	1	0	1	-2
1	1	1	2	0

$(q-1)(q^2+q+2)=0$

$D=1-8<0$

$q=1$

$u=w$ $t=\frac{4u^2}{u}=4u$

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{3y}{2}-6\right)=\ln\left(\frac{x}{2}+1\right) \\ \ln\left(\frac{7y}{2}-\frac{17}{4}\right)=4\ln\left(\frac{3y}{2}-6\right) \\ x>4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3y}{2}-6=\frac{y}{2}+1 \\ \frac{7y}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{3y}{2}-6\right)^4 \\ x>4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7 \\ \frac{7y}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{3y}{2}-6\right)^4 \quad (2) \\ x>4 \end{cases}$$

Подставим $x=7$ в (2) проверим → ТКО

$\frac{7\cdot 7}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{3\cdot 7}{2}-6\right)^4$

$\frac{98}{4}-\frac{17}{4}=\left(\frac{21}{2}-\frac{12}{2}\right)^4$ $\frac{81}{4}=\left(\frac{9}{2}\right)^4$

Чистовик (1)

II $\begin{cases} a=b \\ c=a-1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{t}{u} = 4\frac{u}{t} \\ 2\frac{w}{u} = \frac{1}{2}\frac{t}{u} - 1 \end{cases}$ $\frac{t}{w} = 8\frac{u}{t}$ $w = \frac{t^2}{8u}$

$2\frac{t^2}{8u^2} = \frac{1}{2}\frac{t\cdot 8u}{t^2} - 1$

$\frac{t^2}{4u^2} = \frac{4u}{t} - 1$ $\frac{t}{u} = q$

$\cancel{t^3 = 16u^3 - 4u^2 t}$

$\cancel{t^3 = 4u^2(4u - t)}$

$\frac{q^2}{4} = \frac{4}{q} - 1$ $q^3 = 16 - 4q$

$q^3 + 4q - 16 = 0$

$q = 2$

	1	0	4	-16
		2	4	16
2	1	2	8	0

$(q-2)(q^2 + 2q + 8) = 0$

$q = 2$ $\begin{cases} t = 2u \\ w = \frac{4u^2}{8u} = \frac{1}{2}u \end{cases}$

$\begin{cases} \ln\left(\frac{7u}{2} - \frac{17}{4}\right) = 2\ln\left(\frac{3u}{2} - 6\right) \\ 2\ln\left(\frac{u}{2} + 1\right) = \ln\left(\frac{3u}{2} - 6\right) \\ u > 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{7u}{2} - \frac{17}{4} = \frac{9u^2}{4} - 18u + 36 \\ \frac{u^2}{4} + u + 1 = \frac{3u}{2} - 6 \\ u > 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 14u - 17 = 9u^2 - 72u + 144 \\ u^2 + 4u + 4 = 6u - 24 \\ u > 4 \end{cases}$

$43 \times 43 = 129 + 172 = 1849$

$\begin{cases} 9u^2 - 86u + 151 = 0 \\ u^2 - 2u + 28 = 0 \\ u > 4 \end{cases} \Rightarrow u \in \emptyset$

$\cancel{9u^2 - 86u + 151 = 0}$

$\frac{D}{4} = 43^2 - 9\cdot 151 = 1849 - 1359 = 490$

$151 \times 9 = 1359$

$\cancel{\frac{43 - 7\sqrt{10}}{9} < 4}$

$u = \frac{43 + 7\sqrt{10}}{9}$ $43 + 7\sqrt{10}$

IV Чистовик (8)

$$\begin{cases} b = c \\ a = c - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4\frac{u}{t} = 2\frac{w}{u} \\ \frac{1}{2}\frac{t}{w} = 2\frac{w}{u} - 1 \end{cases} \quad 2\frac{u}{t} = \frac{w}{u} \quad \frac{2u}{t} = \frac{w}{u} \quad 2u^2 = wt \quad w = \frac{2u^2}{t}$$

$$\frac{1}{2}\frac{t^2}{2u^2} = 2\cdot\frac{2u}{t} - 1$$

$$\frac{1}{4}\frac{t^2}{u^2} = \frac{4u}{t} - 1$$

$$q = \frac{t}{u} \qquad \frac{1}{4}q^2 = \frac{4}{q} - 1$$

$$q^2 = \frac{16}{q} - 4 \qquad q^3 = 16 - 4q$$

$$q^3 + 4q - 16 = 0$$

$$q = 2$$

$$t = 2u$$

$$w = \frac{2u^2}{2u} = u$$

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{3u}{2} - 6\right) = \ln\left(\frac{u}{2} + 1\right) \\ \ln\left(\frac{7u}{2} - \frac{17}{4}\right) = 2\ln\left(\frac{3u}{2} - 6\right) \\ u > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3u}{2} - 6 = \frac{u}{2} + 1 \\ \frac{7u}{2} - \frac{17}{4} = \left(\frac{3u}{2} - 6\right)^2 \\ u > 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = 7 \\ \frac{7u}{2} - \frac{17}{4} = \left(\frac{3u}{2} - 6\right)^2 \quad (2) \\ u > 4 \end{cases}$$

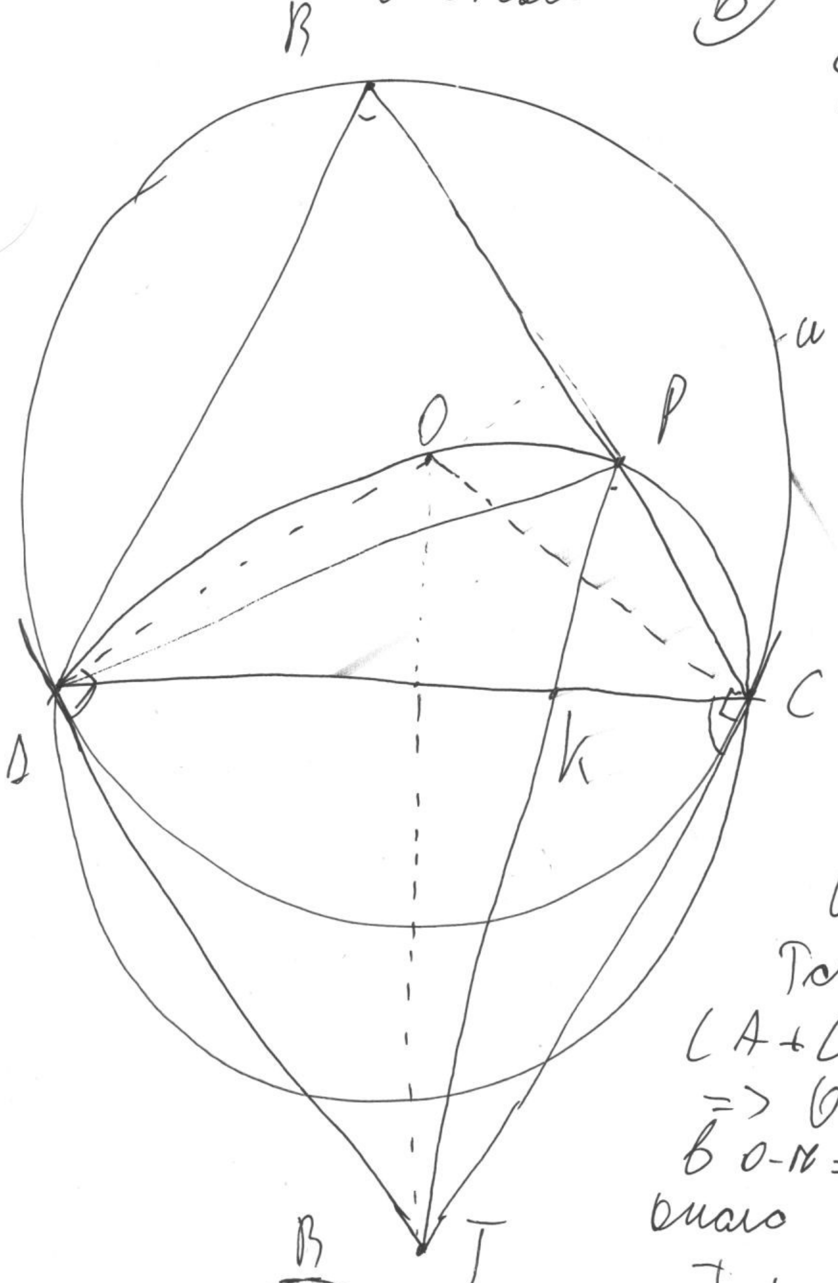
П-сти $u = 7$ в (2): $\frac{7\cdot 7}{2} - \frac{17}{4} = \left(\frac{3\cdot 3}{2} - 6\right)^2$

$$\frac{81}{4} = \frac{81}{4} \Rightarrow u = 7 \text{ искл.}$$

Итого, $u = 7$, ~~$u = \frac{43 + 7\sqrt{16}}{8}$~~

Отв: $u = 7$

Чистовик (б)



$S_{AMK}=7$

$S_{CPK}=5$

а) S_{AKC} – ?

б) $\angle AKC = \operatorname{arcctg} \frac{3}{4}$

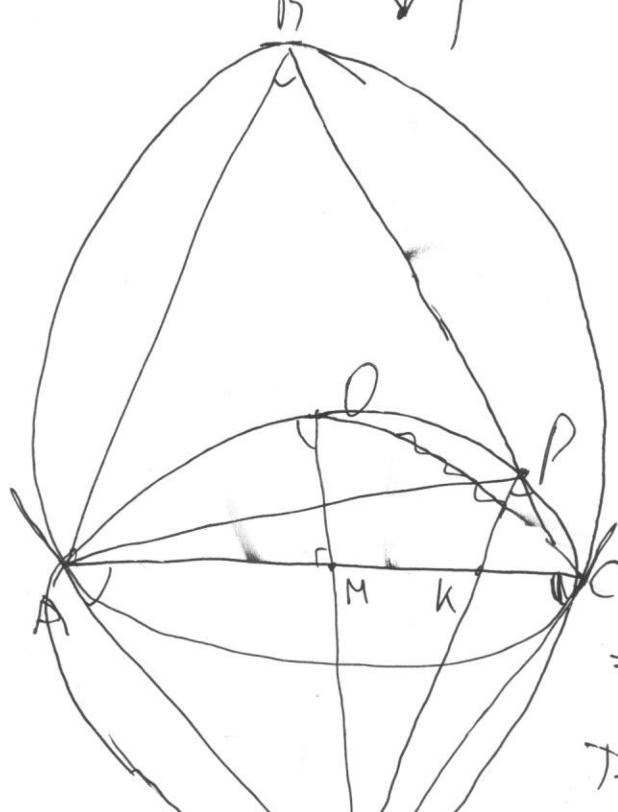
AC – ?

Т.к. AT и TC кас-е к ω, то $OA \perp AT$ и $OC \perp CT$. Тогда в $OATC$, $\angle A + \angle C = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow OATC$ вписан в о-ть $\Rightarrow T \in$ о-ти, опис. около OAC.

Т.к. $\angle TPC$ и $\angle CAT$ опир. на одну и ту же дугу, то $\angle TPC = \angle CAT$. $\angle CAT$ – угол м/у хордой и касат. в $\omega \Rightarrow \angle CAT = \frac{\smile CAT}{2} = \angle B$

Тогда $\triangle CPK \sim \triangle CBA$ по $\angle C$ – общий и $\angle P = \angle B$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{KC}{AC}$ Т.к. $\triangle PAK$ и $\triangle PKC$ имеют



~~Т.к. $\triangle PAK$~~

Черновик (7)

одинаковы высоты, то $\frac{KC}{AK} = \frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{5}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{K_1 C}{AC} = \frac{5}{12}$

Тогда $\frac{CP}{BC} = \frac{5}{12}$. т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle PAC$ им. один. высот,

то $S_{ABC} = S_{PAC} \cdot \frac{BC}{CP}$ $\quad S_{PAC} = S_{APK} + S_{CPK} = 12$

$S_{ABC} = 12 \cdot \frac{12}{5} = \frac{144}{5}$

б) ~~т.к. $\angle ACT$ и $\angle TOA$ опир. на AT,~~

~~то $\angle ACT = \angle AOT = \Rightarrow$~~

~~т.к. AT и TC — кас-е, то $OM = MC$, где~~

~~$TM = OT \cap AC$ и $TM \perp AC$.~~

~~$\triangle CMT = \triangle OMA$ с.~~

~~$OCTA$ — четырехуг. $\angle A = \angle C = 90°$,~~

~~и перпендикулярными диагоналями $\Rightarrow OATC$ — квадрат $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow OC = CT = R$~~ a

~~R_2, где R_2 — рад. опис. ок. OAC о-ки $=$~~

~~$= \frac{OT}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}}$~~

т.к. AT и TC — кас-е, $AT = TC \Rightarrow \breve{AT} = \breve{TC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle TPC \Rightarrow \angle APC = 2\angle ABC = 2\beta$

~~$\beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$~~ $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$ $\quad \sin\beta = \frac{3}{5}$

$\sin 2\beta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

Черновик (8)

Из т. синусов для $\triangle ABC$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R \quad (1)$$

Из т. синусов для $\triangle AOC$

$$\frac{AC}{\sin 2\beta} = 2R_2 \quad (2)$$

$\sin 2\beta = \sin\angle APC$

Чистовик (6)

Т.к. BP – бисс-са, то $\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{5}$

$$AP = \frac{7}{5}PC$$

$$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}\cdot AP\cdot PC\cdot \sin\angle APC$$

$$\cancel{12} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{7}{5}PC^2\cdot\frac{\cancel{24}}{25} \qquad 1 = \frac{7}{5}PC^2\cdot\frac{1}{25}$$

$$\frac{5}{7}\cdot 25 = PC^2 \qquad PC = 5\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$AP = 7\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\cos\angle APC = \sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}} = \cancel{\frac{7}{25}} = 2\cdot\frac{16}{25}-1 = \frac{7}{25}$$

Из т. к-в для $\triangle APC$:

$$AC = \sqrt{AP^2 + PC^2 - 2\cos\angle APC\cdot AP\cdot PC} =$$

$$= \sqrt{49\cdot\frac{5}{7} + 25\cdot\frac{5}{7} - 2\cdot\frac{7}{25}\cdot\cancel{5\cdot 7\cdot\frac{5}{7}}} = \sqrt{35 + \frac{125}{7} - 14} =$$

$$= \sqrt{21+\frac{125}{7}} = \sqrt{\frac{147+125}{7}} = \sqrt{\frac{272}{7}}$$

Ответ: д) $\sqrt{\frac{272}{7}}$ а) $\frac{144}{5}$

~~Чистовик~~ 1

Черновик 1

№ 4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=14 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

$\text{НОК}(x,y)=\frac{xy}{\text{НОД}(x,y)}$

$\text{НОД}(a,b,c)=\text{НОД}(\text{НОД}(a,b),c)$

$\text{НОК}(a,b,c)=\text{НОК}(\text{НОК}(a,b),c)=$

$=\frac{\text{НОК}(a,b)\cdot c}{\text{НОД}(\text{НОК}(a,b),c)}=$

$=\cancel{\text{НОД}(a,b)}$

$=\frac{\frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}\cdot c}{\text{НОД}\left(\frac{ab}{\text{НОД}(a,b)},c\right)}$

пусть $\frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}=t$

$\text{НОК}(a,b,c)=\frac{tc}{\text{НОД}(t,c)}=\text{НОК}(t,c)$

$\text{НОД}(a,b,c)=$

$a=14k$

$b=14y\cancel{k}$, $\text{НОД}(k,y,z)=1$

$c=14\cancel{z}n$

$\text{НОК}(a,b,c)=\frac{\text{НОК}(a,b)\cdot c}{\text{НОД}(\text{НОК}(a,b),c)}=\frac{\frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}\cdot c}{\text{НОД}\left(\frac{ab}{\text{НОД}(a,b)},c\right)}=$

$=\frac{14kky\cdot 14zn}{\text{НОД}(14kky,14zn)}=14kkyzn=2^{17}\cdot 7^{18}$

$kkyzn=2^{17}\cdot 7^{16}$ и k,k,y,z,n

$\cancel{k=2^{a_1}\cdot 7^{a_2}}$ $\cancel{\text{НОД}(k,k),\text{НОД}}$

взаимно просты

~~НЗ~~

Черчаем (2)

$$\log_{\frac{81}{4}}\left(\frac{81}{4}\right) = 1$$

$$\log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 2$$

$\cancel{\log \sqrt{}}$

$$\log_{\sqrt{\frac{9}{2}}} \frac{9}{2} = 2$$

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{7}{5} \qquad AP = \frac{7PC}{5} \quad AK = \frac{7KC}{5}$$

$$\frac{AC}{KT} = \frac{AB}{AK} = \frac{BC}{AT} \qquad \frac{\cancel{AC}}{KT}$$

$$\frac{AT}{PC} = \frac{AK}{PK} = \frac{KT}{KC} \qquad PK = \frac{AK \cdot KC}{KT} = \frac{\frac{7}{5}KC^2}{KT}$$

$$AT = \frac{PC \cdot KT}{KC}$$

$$\frac{AC}{KT} = \frac{AB \cdot 5}{7KC} = \frac{BC \cdot KC}{PC \cdot KT}$$

$\cancel{AC = \frac{AB \cdot KC}{KT}}$

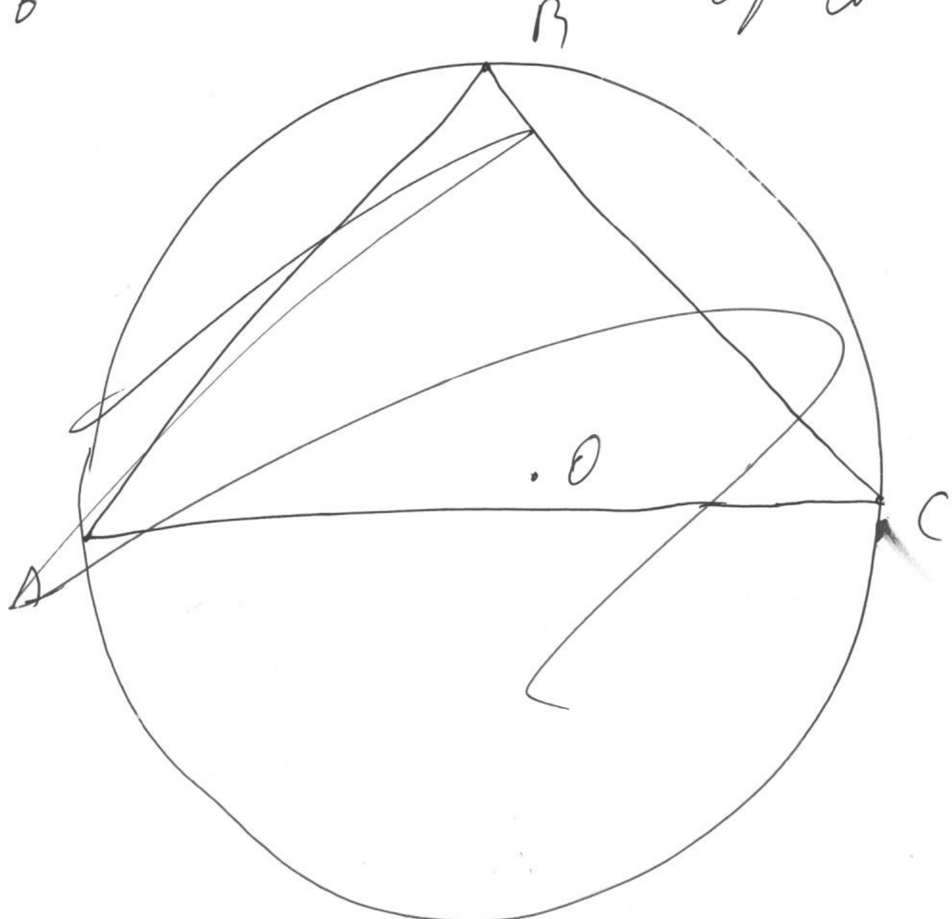
$\triangle BAC \sim \triangle PKC$

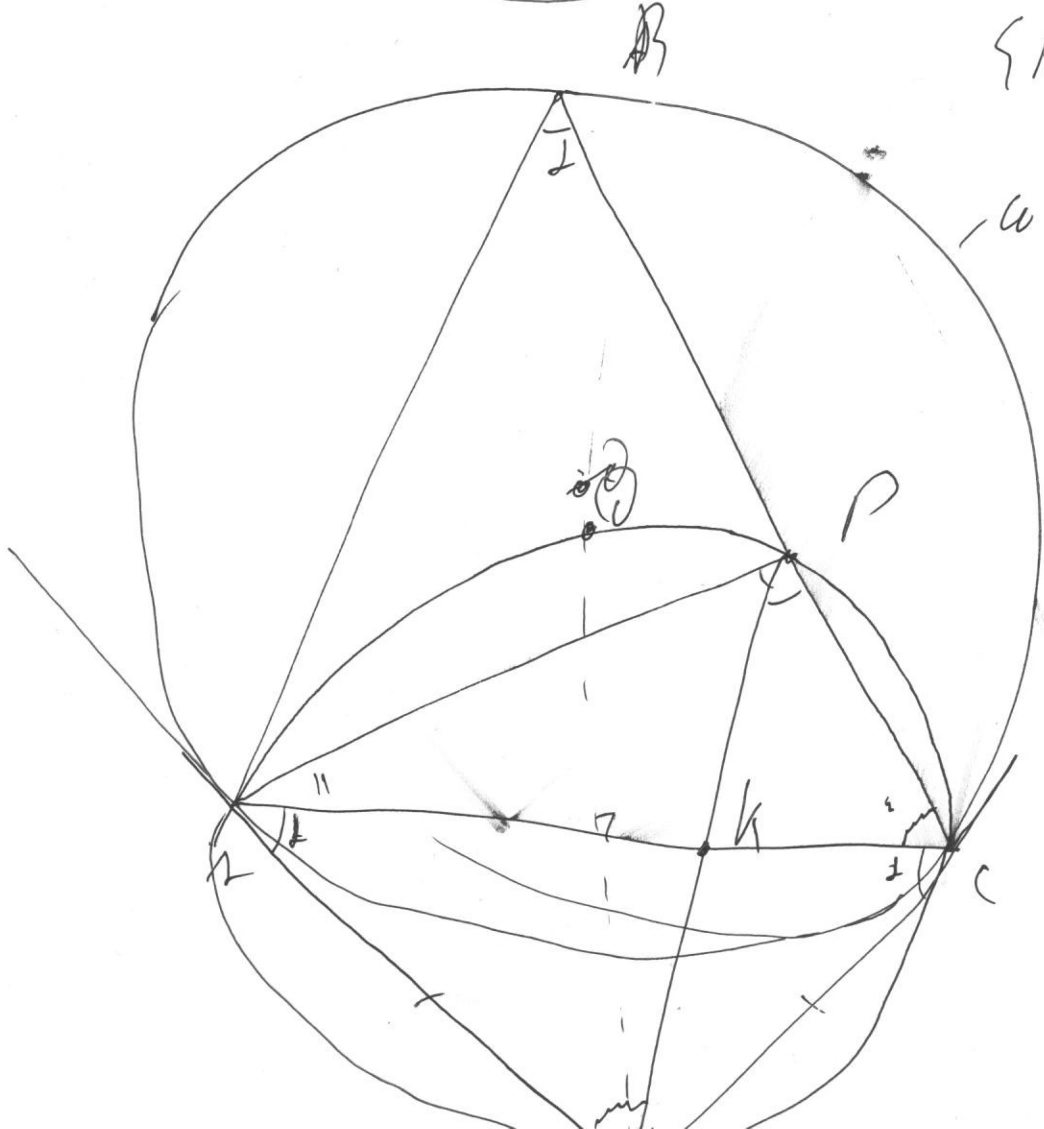
$$AC = \frac{AB \cdot 5}{7KC} \cdot KT$$

$$\frac{BC}{PC} = \frac{BA}{PK} = \frac{AC}{KC} = \frac{12}{5} \qquad \cancel{\frac{AC}{KT} = \frac{5}{7} \cdot \frac{AB}{KC} =}$$

$$S = \frac{12}{5} \cdot 12 = \frac{144}{5}$$

№6 Черновик 3





$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} - ?$

$11 + 4 + 2\alpha = 180^\circ$

$\cancel{11+4 = 9}$

$I + E = 90^\circ - 2\alpha$

$\triangle ABC \sim \triangle KAT$

$\frac{AC}{KT} = \frac{AB}{AK} = \frac{BC}{A'}$

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$

$\frac{AK}{KC} = \frac{AT}{PC} = \frac{AK}{PK} = \frac{AT}{KC}$

$KT = \frac{AK \cdot KC}{PK}$

~~Чистовик~~ (В) Черновик (9)

Ш-6