Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100710**

ID профиля: **800145**

Вариант 22

Чистовик 1

№1.

Пусть a_1 – первый член, b – ~~знач~~ разность прогрессии. тогда.

$$S_{(15)} = 15a_1 + 105b.$$

$$a_7 = a_1 + 6b$$

$$a_{16} = a_1 + 15b.$$

$$a_{11} = a_1 + 10b.$$

$$a_{12} = a_2 + 11b,$$

т.к. все числа прогрессии целые, то a_1 – целое, и b_1 – тоже целое. и т.к. она возрастающая то $b > 0$.

~~Эта~~ По нер-ву Коши.

$$\sqrt{ab} \cdot \sqrt{km} \le \frac{k+m}{2}$$

$$\Rightarrow km \le \frac{(k+m)^2}{4}$$

тогда. $a_7 a_{16}$

~~Если b – не целое то всегда можно подобрать такое член a_1 который~~

~~которы~~

Чистовик 2

$a_7 a_{16} > S - 24$

1) $a_1^2 + 90b^2 + 21a_1b > 15a_1 + 105b - 24$.

$a_{11} a_{12} < S + 4$

2) $a_1^2 + 110b^2 + 21a_1b < 18a_1 + 108b + 4$.

~~домножим~~ домножим 1-е на (-1)

1) $-a_1^2 - 90b^2 - 21a_1b < -15a_1 - 105b + 24$.

2) $a_1^2 + 110b^2 + 21a_1b < 15a_1 + 105b + 4$.

а теперь сложим выражения.

$20b^2 < 28$

$b^2 < \frac{28}{20}$ и $b > 0$ и b – целое.

$|b| < \sqrt{\frac{28}{20}}$ $b > 0$ b – целое $\Rightarrow$

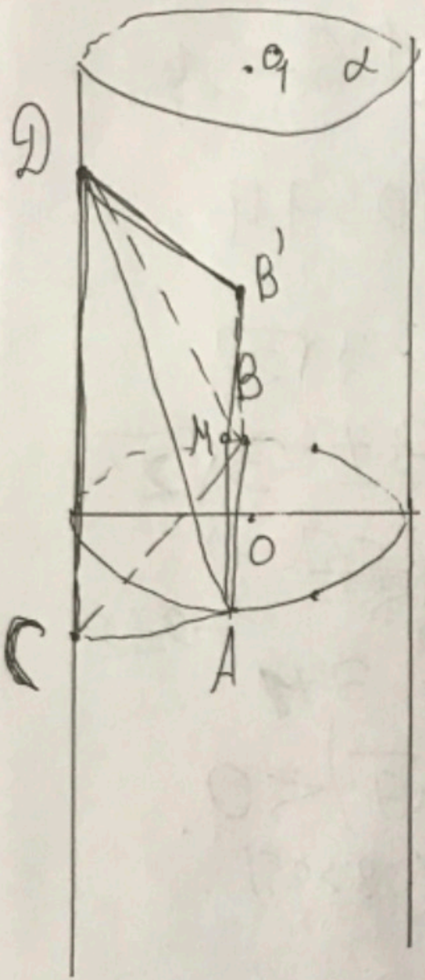
$\Rightarrow$ $\underset{\text{т.к.}}{1} < \sqrt{\frac{28}{20}} < 2$ но больше 1,10

$b = 1$ т.к. -1 он равен быть не может

перепишем нер-ва с учетом того, что $b = 1$

Чистовик 4

№2



1) $C D \parallel OO_1$

$C, D \in$ бок пов-ти.

~~чтобы вз~~

рассмотрим сечение цилиндра плоскостью β, такой, что $\beta \parallel \alpha$ (α — плоскость оси цил-ра.)

$AB \in \beta$

$\beta \cap$ цилиндр $= \omega$ — окр-ть, AB — хорда в ω радиус ω — равен радиусу цилиндра (из построения β), а значит $V \to \min$ когда AB не просто хорда, а диаметр,

2) почему мы сможем построить такое β, или другими словами почему $AB \parallel \alpha$.

пусть $AB' \nparallel \alpha$. и условия для тэтраэдра $AB'CD$ — такие же. ~~тогда~~ как и для $ABCD$, тогда.

3) Д.п M - сер-на AB'. т.к $DB' = DA$ и $AC = CB'$, то.

$\triangle ADB'$ и $\triangle ACB'$ - р/б $\Rightarrow$ $CM \perp (AB')$, $DM \perp (AB')$ $\Rightarrow$ $AB' \perp (CDM)$ $\Rightarrow$ $AB' \perp CD$

Дано:

цилиндр.

$ABCD$ — тэтраэдр — вписанный в цилиндр причем.

A, B, C, D — $\in$ бок пов-ти.

$AB = 4$.

$AC = BC = 5$.

$AD = DB = 7$.

$V_{т} \to \min$

CD — ?

21100710 (U800145 M1303262)

Чистовик 3

1) $a_1^2+90+21a_1>15a_1+\overbrace{105-24}^{81}$

2) $a_1^2+110+21a_1<15a_1+\underbrace{105+4}_{109}$.

1) $a_1^2+9+6a_1>0$

2) $a_1^2+1+6a_1<0$

1) $(a_1+3)^2>0$.

$(a_1-(-3+2\sqrt{2}))(a_1-(-3-2\sqrt{2}))<0$

$3>2\sqrt{2}$ т.к. $9>8$. $|2\sqrt{2}-3|<1$

$2\sqrt{2}>4$ т.к. $8>4$. т.к. $16<12\sqrt{2}$

$256<144\cdot 2$.

$-6 \quad -3-2\sqrt{2} \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad -3+2\sqrt{2} \quad 0$

$a_1\neq 3$, т.к. при $a_1=3$ 1-ое нер-во не выполняется.

и a_1 - целое и $a_1\in(-3-2\sqrt{2};-3+2\sqrt{2})\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1\in\{-5;-4;-2;-1\}$

Ответ: $-5; -4; -2; -1$.

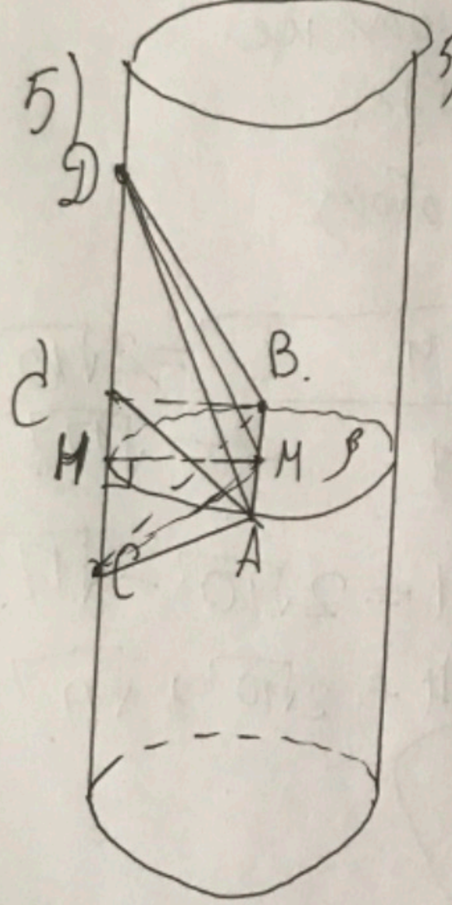
21100710 (U800145 M1303262)

Чистовик 5

4) $CD \perp (\alpha)$
т.к $CD \parallel OO_1$
$AB' \perp CD$ $\Rightarrow$ $AB' \parallel \alpha$ противоречие $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel \alpha$ и сечение β можно построить всегда.

и $r_{цил} \to \min$ когда AB – диаметр, то есть.
радиус цилиндра равен 2 и 2 это минимальный радиус.

5)



5) Д.п. M – сер-на AB, тогда.
из (3) $CDM \perp (AB)$
В $\triangle CMD$ д.п $MH \perp CD$.
$CD \perp \beta \Rightarrow MH$ – радиус к общей точке $\in CD \Rightarrow MH = 2$

6) $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ – р/б $\Rightarrow$

$$\Rightarrow DM = \sqrt{DB^2 - \frac{AB^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{49 - 4} =$$

$$= 2\sqrt{11}.$$

$$CM = \sqrt{AC^2 - \frac{AB^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$$

21100710 (U800145 M1303262)

Чистовик 6

7) Существует 2 случая,
1-ый когда C и D лежат по одну сторону от.
В и 2-ой когда C, D лежат по разные стороны от BD.

~~8) 1-ый случай. (нарисуйте C и D) найдем DH и ... не, они не меняются в двух случаях.~~

8) Найдем DH и CH, они в обоих случаях не меняются,

$DH = \sqrt{DM^2 - MH^2} = \sqrt{44 - 4} = 2\sqrt{10}$

$CH = \sqrt{CM^2 - MH^2} = \sqrt{21 - 4} = \sqrt{17}$.

9) В 1-м случае. $CD = DH - CH = 2\sqrt{10} - \sqrt{17}$.
Во 2-м случае. $CD = DH + CH = 2\sqrt{10} + \sqrt{17}$.

Ответ: $2\sqrt{10} - \sqrt{17}$, $2\sqrt{10} + \sqrt{17}$

~~Учебник 3~~ черновик

1) $a_1^2 + 90 + 21a_1 > 15a_1 + 105 - 24$

2) $a_1^2 + 110 + 21a_1 < 15a_1 + 105 + 4$

1) $a_1^2 + 9 + 6a_1 > 0$ $3\sqrt{2}$

2) $a_1^2 - 19 + 6a_1 < 0$. $-3 \pm 3\sqrt{2}$

$3(\sqrt{2}-1)$

1) $(a_1+3)^2 > 0$. -3 ± 2

$D = 3+1$

2) $(a_1 - (-3+2\sqrt{7}))(a_1 - (-3-2\sqrt{7})) < 0$.

т.к. $2\sqrt{7} > 5$ $(28 > 25)$

-8 -7 -6 -5 -4

$-3-2\sqrt{7}$

$2\sqrt{7}-3$

$-3-2\sqrt{7}$ -8 -3 2

$D_1 = 3-1 = 2$

Из того что a_1 – целое.

a_1 может быть равно. $-3+\sqrt{2}$ $= \sqrt{2}$

$-3-\sqrt{2}$

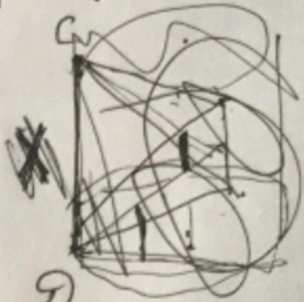
$-8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2$

$a_1 \neq -3$ т.к. при этом a_1 1-ое нер-во не выполняется.

21100710 (U800145 M1303262)

Черновик.

$a_1 \quad a_1+n \quad a_1+2n \quad a_1+3n$



$k \cdot a_1 + n(1+2+3+\ldots+k)$

$105. \quad 7 \cdot 15 \quad n(n-1)$

$11+12+13+14. \quad 1+2+3+4+5.$

$1+2+3+4+5$

$6+7+8+9+10$

$23 \quad 27$

50

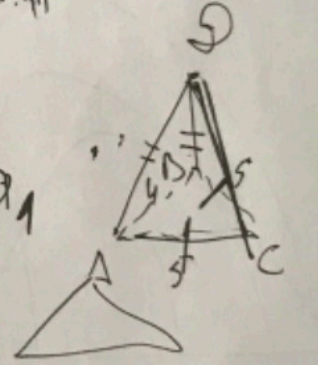
$\cdot 4 \quad 21$

$1+2+3+4+5+6.$

$55. \quad \cancel{15+16+17+18+}$

$1+2+3+4+5 = 15.$

$\cancel{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10}$



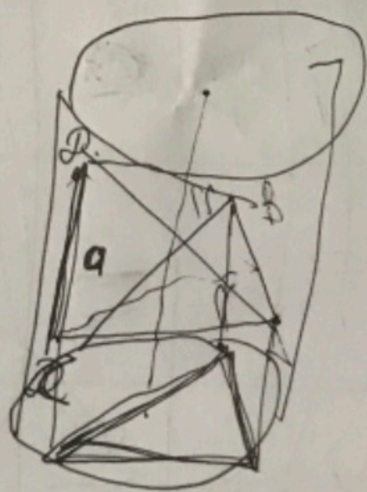
$\frac{n(n+1)}{2}$

$15 \quad 16 \quad 15a_1$

$k a_1 + \frac{k(k+1)}{2} \cdot n.$

$a_7 = a_1 + 6a$

$a_{16} = a_1 + 15n.$



$a_{11} = a_1 + 10n$

$a_{12} = a_1 + 11n.$

$2\sqrt{2} - 3\sqrt{7}.$

$8+9$

$16 \quad \cancel{\sqrt{12}}\sqrt{2}$

$a_1^2 + 90n^2 + 21a_1 n > 18a_1 + 105n - 24$

$a_1^2 + 110n^2 + 21a_1 n < 18a_1 + 108n + 4$

$\cancel{256\sqrt{...}}$

Черновик.

	-5	-4	-2	-1
a_7	1	2	3	
a_{10}	10	11	12	
a_{11}	5	6		
a_{12}	6	7		
S	30	45	60	

$-75 \cdot 105$

$4{,}5$

$15.$

Черновик.

$(a_1 - (-3 + \sqrt{4\sqrt{7}}))(a_1 + (-3 \mp 4\sqrt{7}))$

$4 \cdot \sqrt{7}$

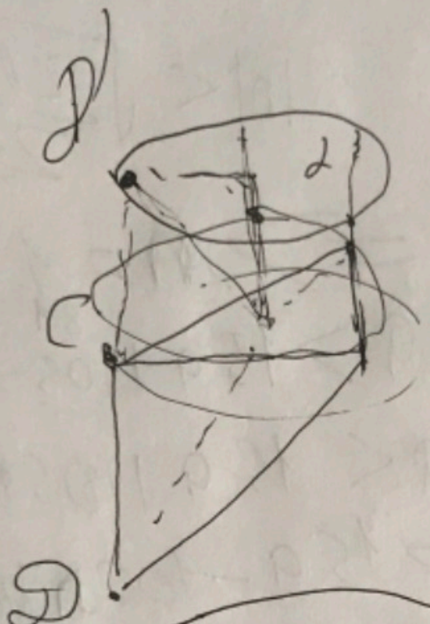
$\sqrt{7} \vee 6$

5 4 3

$-3-2\sqrt{7}$ -2

$CB_1 \perp (\alpha)$

$\angle(\alpha; ABC) =$

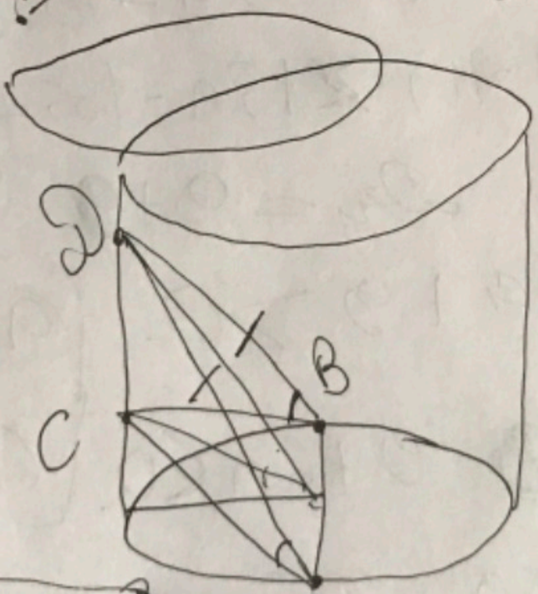


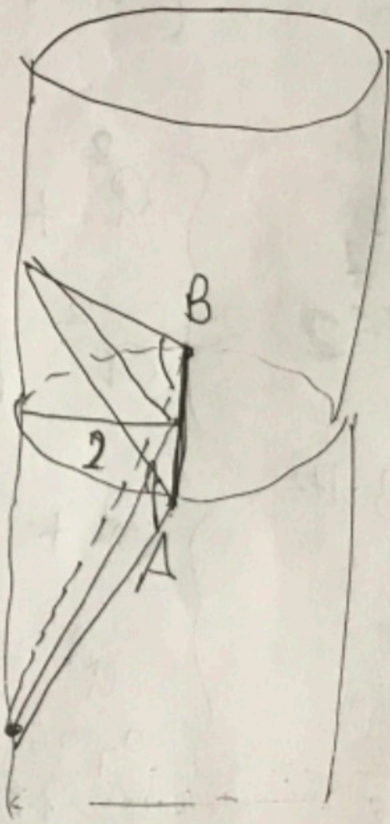
$=$

$D/4 = 9 + 19 =$

$= 28 = 4 \cdot 7.$

$-3 \pm 4\sqrt{7}$





$\frac{\sqrt{(2a_1 + 21b)^2}}{4} > S - 24.$

$\frac{\sqrt{(2a_1 + 21b)^2}}{4}$ $\cancel{\times}\sqrt{7}4$

Черновик.

$-a_1^2 + 90n^2 + 21an < 15a + 105n + 24$

$+a_1^2 + 110n^2 + 21an < 15a + 105n + 4.$

$20n^2 < 28$

$n^2 < \frac{28}{20}$ $|n| < \sqrt{\frac{28}{20}}$

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 $\Rightarrow n = 1$ 4·4 − 1.

13×14

$13 \cdot (13+1) = 169 + 13$

$\begin{cases} a^2 + 90 + 21a > 15a + 105 - 24. \\ a^2 + 110 + 21a < 15a + 105 + 4. \end{cases}$

$13 \cdot 14 =$

$\begin{cases} a^2 + 90 - 21a > 15a - 105 - 24 \\ a^2 + 110 - 21a < 15a - 105 + 4 \end{cases}$

$D_1 = 9 + 9$

1

81 × 2

162

$\begin{cases} a^2 + 6a + 9 > 0. \\ a^2 + 8 - 9 + 6a < 0. \end{cases}$ $\begin{cases} (a+3)^2 > 0 \\ (a-3)^2 < 0 \end{cases}$

160

$8 \cdot 17 =$

17 × 8

80

56

136

$\begin{cases} a^2 + 21a - 36a > 0. \\ a^2 + \end{cases}$

$S(15) = 90 + 105 = 145$

$a_7 = 9$ $a_7 = 8$ $a_{11} = 13$

$a_{16} = 15.$ $a_{16} = 18$ $a_{12} = 14.$

21100710 (U800145 M1303262)

~~Чистовик 3~~ Черновик

1) $a_1^2 + 90 + 21a_1 > 15a_1 + 105 - 24$

2) $a_1^2 + 110 + 21a_1 < 15a_1 + 105 + 4$

1) $a_1^2 + 9 + 6a_1 > 0$ $3\sqrt{2}$

2) $a_1^2 - 19 + 6a_1 < 0$ $-3 \pm 3\sqrt{2}$

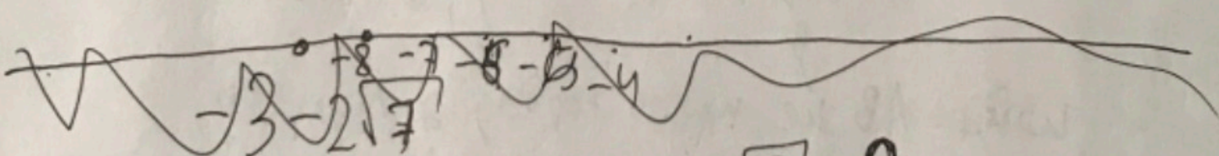
~~$3(\sqrt{2}-1)$~~ -3 ± 2

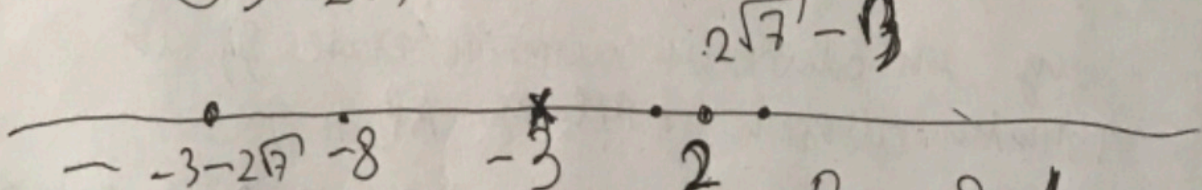
$D = 3 + 1$

1) $(a_1 + 3)^2 > 0$

2) $(a_1 - (-3 + 2\sqrt{7}))(a_1 - (-3 - 2\sqrt{7})) < 0$

т.к. $2\sqrt{7} > 5$ $(28 > 25)$





$\frac{D}{4} = 3 - 1 = 2$

Из того что a_1 – целое. $-3 + \sqrt{2} = 2$

a_1 может быть равно. $-3 - \sqrt{2}$

$-8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2$

$a \neq -3$ т.к. при этом a_1 1-ое нер-во не выполняется.

Ответ: $-8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2$.

Часть 2

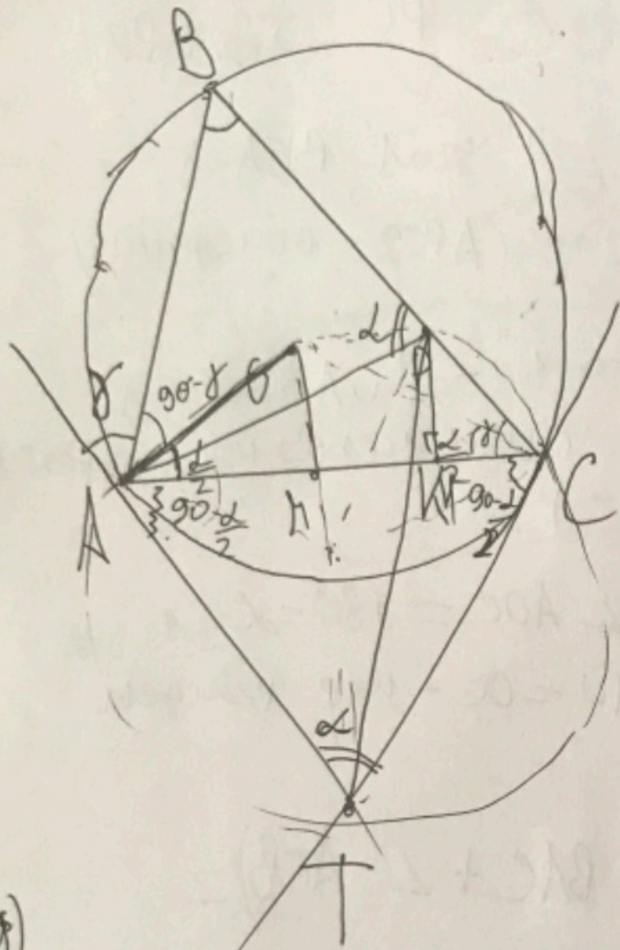
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100710**

ID профиля: **800145**

Вариант 22

№8. Чистовик 1



Дано:
△ABC
ω
O центр.
AOTP — впис
P∈BC
T.
PT∩AC=K.
S(△APK)=7
S(△CPK)=5

а)

1) AT и CT кас-ые ⇒

⇒ ∠OAT=∠OCT (=90°⇒)

⇒ AOCT — вписанный.

△OPC — вписанный — т.к две окр-ти не могут пер-ся более чем по 2 точкам, то

эти две совпадают и AOPCT лежат на одной окр-ти. с диаметром OT.

2) AT=TC как отрезки общих кас-ых, ⇒

⇒ ◡AT=◡TC, ∠APT=½◡AT=∠TPC (=)

Чистовик 2

$\Rightarrow$ PK - бисс-са. $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{S(\Delta APK)}{S(\Delta CPK)} = \frac{7}{5}$.

2) Пусть $\angle APB = \alpha$, а угол. $BCA = \gamma$,

тогда $\angle APC = \alpha$, т.к. (APC - вписанный)

$\angle BAT = 180 - \gamma$ т.к это $180 - \frac{1}{2} \cup AB = 180 - \gamma$

(угол между кас AT и хордой AB)

тогда $\angle BAO = 90 - \gamma$.

$\angle OAC = \frac{\alpha}{2}$, т.к. $\angle AOC = 180 - \alpha$, а. $AO = OC$ - как радиусы

тогда.

$\angle ABC = 180 - (\angle BAC + \angle ACB) =$

$= 180 - (90 - \gamma + \frac{\alpha}{2} + \gamma) =$

$= 90 - \frac{\alpha}{2} = \angle CAT \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABP$ - р/б и $\Rightarrow AP = BP \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S(\Delta ABP)}{S(\Delta APC)} = \frac{7}{5} \Rightarrow S(\Delta ABP) = \frac{7}{5} S(\Delta APC) =$

$= \frac{7}{5} \cdot 12 = \frac{84}{5}$

$S(\Delta ABC) = S(\Delta ABP) + S(\Delta APC) = \frac{84}{5} + 12 = \frac{144}{5}$

21100710 (U800145 M1303263)

Чистовик 3

~~б) Пусть радиус w = r, тогда.~~

$$AC = 2\sin\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot r =$$

$$= \cancel{2\cos}$$

$$\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{3}{5} \quad \cos\angle ABC = \frac{4}{5}.$$

$$\angle ATC = \alpha$$

Δ Пусть радиус второй окружности R. тогда.

$$AC = r\cdot\sin\angle ABC\cdot 2 =$$

$$= R\cdot\sin\alpha\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2 = R\cdot\sin\alpha\cdot 2.$$

$$R = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\cdot r = \frac{r}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{2\cos\angle ABC} =$$

$= \frac{5r}{8}$, OT – биссектриса $\angle ATC$ т.к. AT, TC – касательные.

$$\Rightarrow \text{В } \Delta OAT \quad AT = OT\cdot\cos\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2R\cdot\frac{3}{5} = \frac{5r}{8}\cdot 2\cdot\frac{3}{5} = \frac{3r}{4}$$

OATC – дельтоид $\Rightarrow AC \perp OT \Rightarrow$ AH – высота и медиана AC.

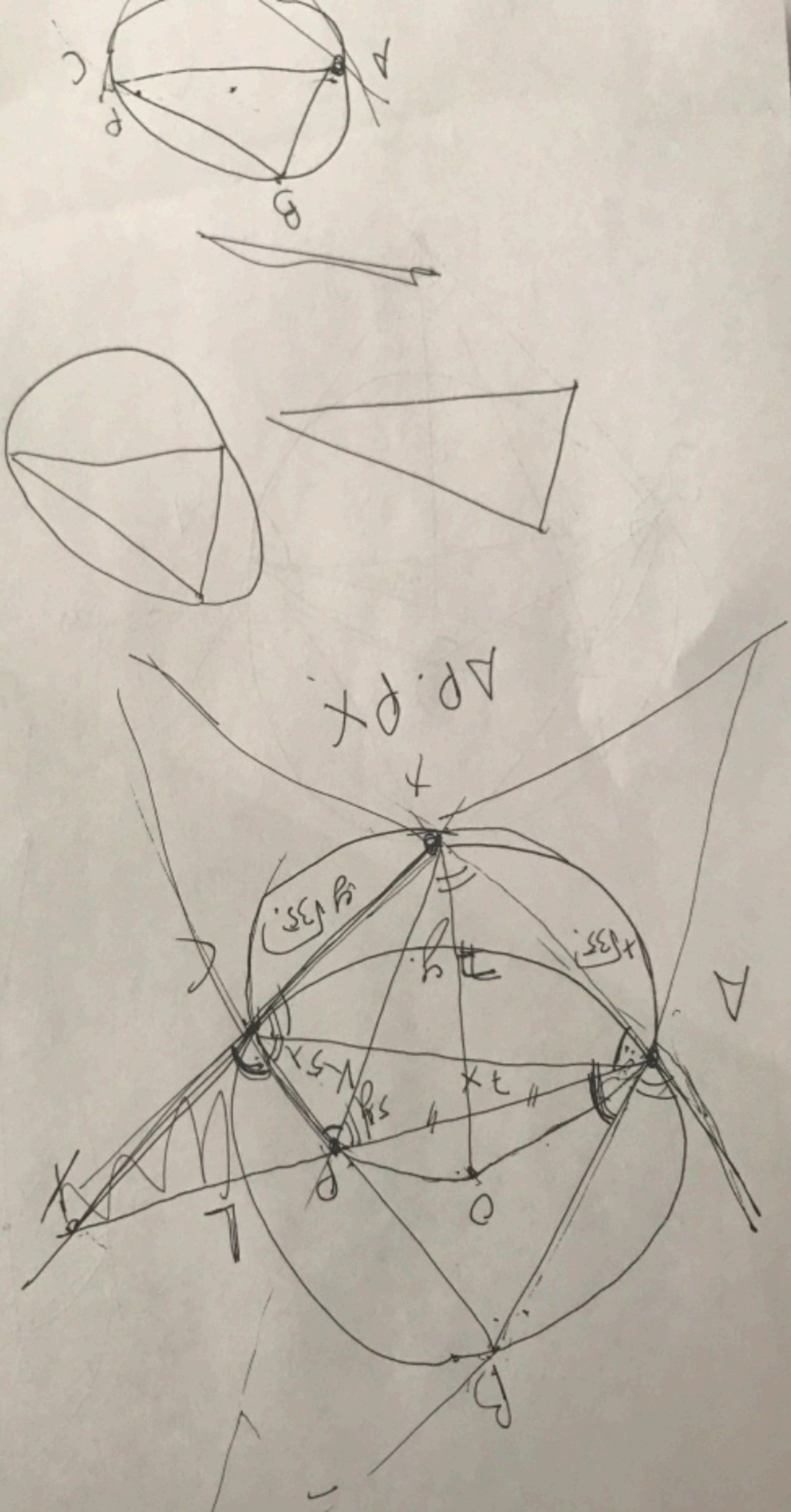
(т.к. OA = OC, AT = TC)

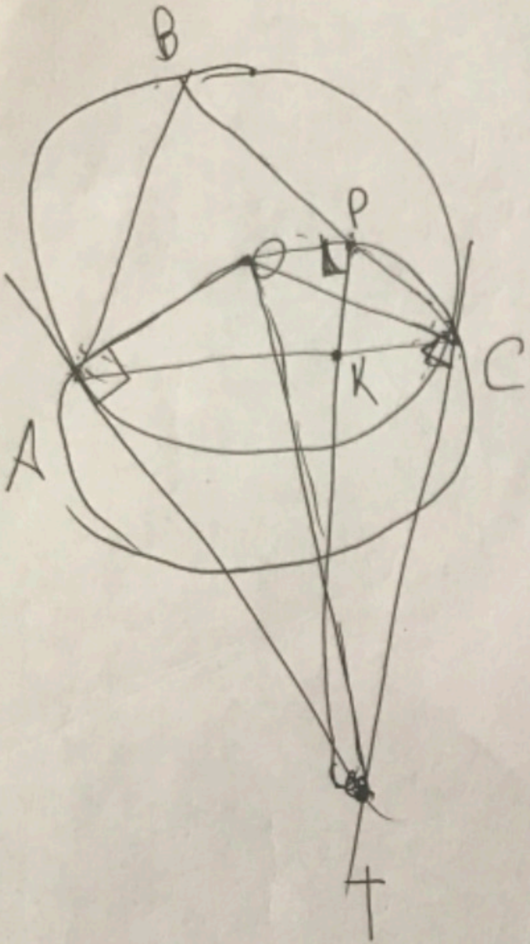
Чистовик 4

$$AM = \frac{\cancel{AM}\ AO \cdot AT}{OT} = \frac{\frac{3r}{4} \cdot r}{\frac{5}{4} r} =$$

$$= \frac{3}{5} r \Rightarrow AC = \frac{6}{5} r \text{ д.т.}$$

Ответ: $\frac{144}{5}$; —

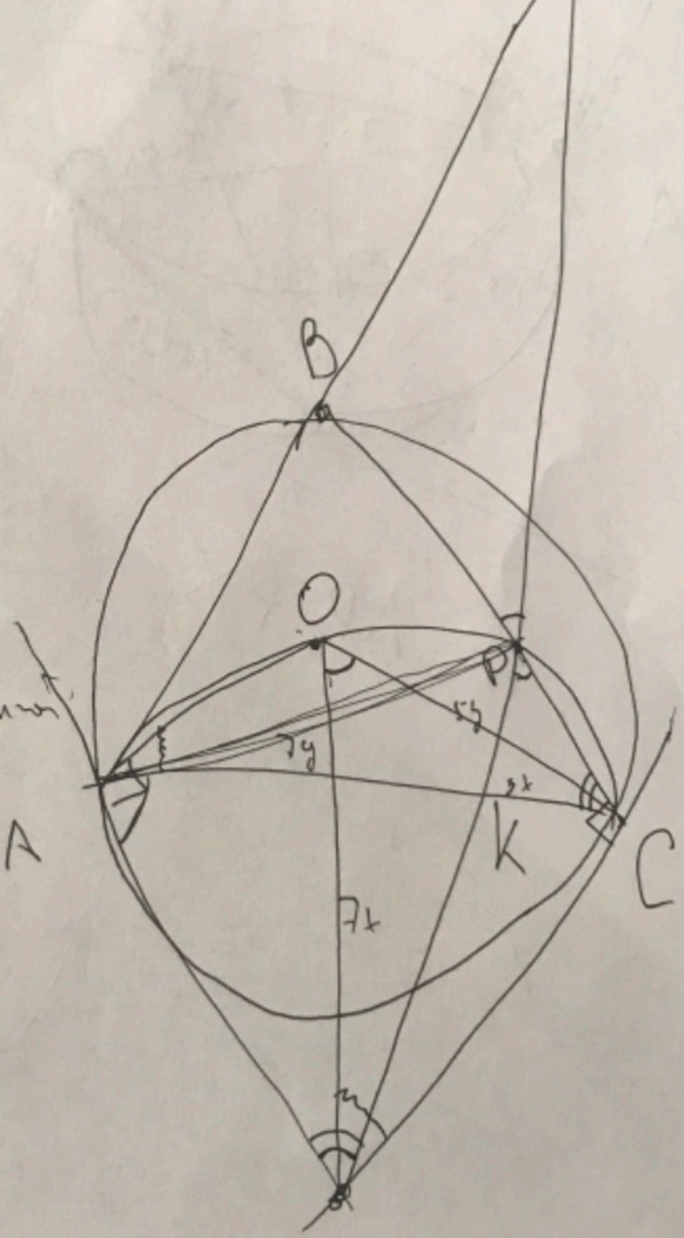




$180-(180-\alpha)-\frac{\beta}{2}=$

$=\alpha-\frac{\beta}{2}=$

AOPCT – вписанный



б) $\angle ABC = \arctg \frac{3}{4} \Rightarrow tg\angle ABC = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{3}{5} \quad \cos\angle ABC = \frac{4}{5}$

$\angle ABC = 90 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\angle ABC =$

$S(\triangle APK) =$ $= \frac{3}{5} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}$

$=$ $AK = 7x \quad KC = 5x.$

~~$\angle ARD = \angle ABC =$~~

~~$\angle PAC = \frac{\alpha}{2}$~~ Пусть ~~$AP = x$,~~ ~~тогда $PC = \frac{5}{7}x$.~~

~~Т.к. $PK \perp (AC)$~~ тогд.

Найдем угол ~~$\gamma = \gamma \Rightarrow$~~ $\gamma + 90 - \frac{\alpha}{2} =$

$\triangle ABC$ $\gamma.$

~~$\angle BOD$~~ $=$ $= 180 - (90 - \frac{\alpha}{2}) + 1$

$\gamma + 90 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - 90$

$\angle OAC = \frac{\alpha}{2}$. D.n h-сер-на AC, $AO = OC \Rightarrow$

$\Rightarrow OH \perp AOC.$

$AO = \frac{AK}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AC}{}$

$180 - \frac{\alpha}{2} - \gamma = 1$

21100710 (U800145 M1303263)

N6.

$\frac{AC}{2\sin}$

$\frac{AC}{2\sin\alpha} =$

$AM = \frac{AO \cdot AT_2}{AT}$

$AC = 2\sin\alpha\, R_1 =$

$= 2\sin\frac{\alpha}{2} R_2$

R

$\frac{R_1}{R_2}$

$R_1 =$

AK = S

$\frac{R}{R} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$.

Дано:
$\triangle ABC$
ω – опис
O – центр ω
$AOCP$ – впис.
$P \in BC$.
T – точка пер-я кас-ых к A и C.
$PT \cap AC = K$
$S(\triangle APK) = 7$
$S(\triangle CPK) = 8$.

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{x}-\frac{17}{4}\right)$$

$$\log_{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}+1}=a$$

$$\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=b$$

$$\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=c$$

$$\log_{a^4} b^2$$

$$\log_{b} c^4$$

$$\log$$