Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100698**

ID профиля: **331255**

Вариант 22

Чистовик
Вариант 22
№1
равна b, тогда

$15 = (a_1+7b)15 = 15a_1+105b$

24 (1)

$b)$ (2)

$^2+11ba_1+10ba_1+110b^2-24$

положил и $b>0$,
из целых чисел,
но $b \in Z$ и $b=1$

$= 110$

$3(50-7\sqrt{5})$

$41:3$

$\times 23$
8
24
16
184

Черновик
№1

$15\times 7 = 70+35$
$y>0$
$15\times 6 =$
$= 60+30$

$S_{15} = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15$ $a_7 a_{16} > S-24$

$(x+6y)(x+15y)$

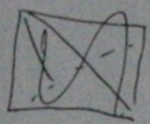
$(x+7y)\cdot 15 - 24 < (x+11y)$

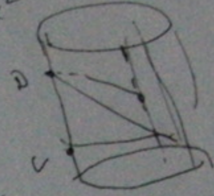
$(x+7y)15+4 > (x+10y)(x+11y)$

$x^2+10xy+11xy+110y^2$
$x^2+60y^2+6xy+15xy$

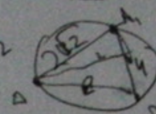
x^2+110y^2
x^2+90y^2

$15x+105y+4 >$
$15x+105y-24y$





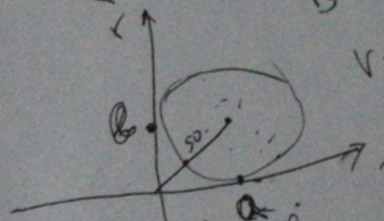
$l^2 = 4\cdot 2$



$d>5$

$d-$

$V=2$

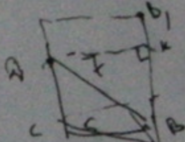


$BK = \sqrt{7^2-l^2}$

$BC_1 = \sqrt{5^2-l^2}$

$CD = \sqrt{7^2-l^2} - \sqrt{5^2-l}$

$CD = \sqrt{}$



$a^2+b^2 \le 50$
$a^2+b^2 \le 14a+2b$
$2a^2+2b^2 = 14a+2b+50$

$2a^2 = 14a$

$a^2+b^2 \le 14a+2b$
$a^2-14a \le 2b-b^2$
$a^2-14a+49 \le 49+2b-b^2$
$(a-7)^2-(b-1)^2 \le 47$

$2 < 2\sqrt{2} \le 3$
$-3 < -2\sqrt{2} < -2$
-6 -4

$2 < 2\sqrt{2} < 3$
$-1 < 2\sqrt{2} < 0$

$a_1^2+3($

$7\times 11\times 2 = 14+11$
$+14$
$+14$
154

$-15a_1 + \frac{21\sqrt{35}}{5}a_1$

$D = 21$

$50+35+2,5 =$
$= 87,5$

$25 - \frac{7}{2}\cdot 7 = \frac{50-49}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$

Чистовик.
Вариант 22
№1

Пусть разность прогрессии равна b, тогда

$a_7 = a_1 + 6b$
$a_{16} = a_1 + 15b$
$a_{11} = a_1 + 10b$
$a_{12} = a_1 + 11b$

и $S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{2a_1+14b}{2}\cdot 15 = (a_1+7b)\,15 = 15a_1 + 105b$

Тогда неравенства перепишем в виде:

$$\begin{cases}(a_1+6b)(a_1+15b) > (a_1+7b)\cdot 15 - 24 & (1)\\ (a_1+7b)15 + 4 > (a_1+10b)(a_1+11b) & (2)\end{cases}$$

Сложим (1) и (2):

$$a_1^2 + 6a_1b + 15a_1b + 90b^2 + 4 > a_1^2 + 11ba_1 + 10ba_1 + 110b^2 - 24$$

$$90b^2 + 4 > 110b^2 - 24$$
$$28 > 20b^2$$
$$7 > 5b^2$$

Тогда с учетом, что т.к. прогрессия возрастающая и $b>0$, то $0 < b < \sqrt{\frac{7}{5}}$, а т.к. ~~в~~ прогрессия из целых чисел, то $b \in \mathbb{Z}$ и $b = 1$

Подставлю значение ~~b~~ ~~b~~ b в (2):

~~$15a_1 + 105\sqrt{\frac{7}{5}} + 4 > a_1^2 + 21\sqrt{\frac{7}{5}}a_1 + \frac{7}{5}\cdot 110$~~

~~$15a_1 + 21\sqrt{5} + 4 > a_1^2 + \frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{5}}a_1 + 7\cdot 11\cdot 2$~~

~~$a_1^2 + \left(\frac{21}{5}\sqrt{35} - 15\right)a_1 + 150 - 21\sqrt{5} < 0$~~

~~Найду корни уравнения $a_1^2 + \frac{3}{5}(7\sqrt{35} - 25)a_1 + 3(50 - 7\sqrt{5}) = 0$~~

продолжение см. на след. листе

1

21100698 (U331255 M1296379)

Чистовик

$a_1^2 + \frac{3}{5}(7\sqrt{35} - 27)a_1 + 3(50 - 7\sqrt{5}) = 0$

$a_1^2 + \frac{3}{\sqrt5}(7\sqrt7 - 5\sqrt5)\,a_1 + 3\sqrt5(10\sqrt5 - 7) = 0$

$D = \left(\frac{3}{\sqrt5}\right)^2(7\sqrt7 - 5\sqrt5)^2 - 4\cdot 3\sqrt5\,(10\sqrt5 - 7) =$

$= \frac{9}{5}(49\cdot 7 + 25\cdot 5 - 70\sqrt{35}) - 4\cdot 3\cdot\sqrt5\,(10\sqrt5 - 7$

$(a_1 + 7)\,15 + 4 > (a_1 + 10)(a_1 + 11)$

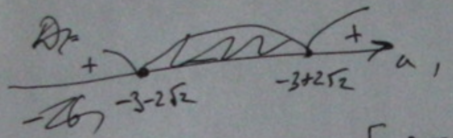
$15a_1 + 105 + 4 > a_1^2 + 21a_1 + 110$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 = 0$

$D = 36 - 4 = 32 = 16\cdot 2$

$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt2}{2} = -3 \pm 2\sqrt2$



т.е. $a_1 \in [-3 - 2\sqrt2\,;\, -3 + 2\sqrt2]$

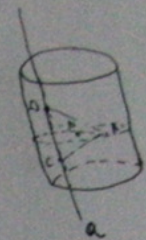
т.к. a_1 – целое и $2 < 2\sqrt2 < 3$, то $-6 < -3 - 2\sqrt2 \le -4$

и $-1 < -3 + 2\sqrt2 < 0$, то тогда $a_1 = \{-4; -3; -2; -1\}$

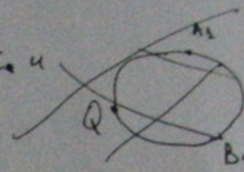
Ответ: $\{-4; -3; -2; -1\}$

Чистовик.

№2



Т.к. все вершины тетраэдра ~~его~~ оказались на боковой стороне и CD ∥ оси ~~а~~ ~~ос~~ цилиндра, то CD лежит на образующей цилиндра, назову её a.

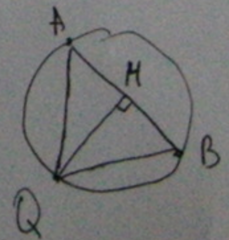


~~Рассмотрю сечение цилиндра плоскостью параллельной основаниям. A_1, B_1 - проекции точек A и B на эту плоскость, а Q - проекция точек ~~CD~~ C и D, т.к. они совпадут, потому что C и D лежат на образующей.~~

~~Т.к. AC = CB и AD = DB, то точки A и B равноудалены от CD~~

Т.к. AC = CB и AD = DB, то точки A и B равноудалены от CD. Рассмотрю плоскость проходящую через A и B и параллельную основаниям цилиндра. ~~Пусть~~ Такая пл-кость существует, т.к. раз A и B равноудалены от CD (образующей), то расстояние от A или B до пл-ти основания равны между собой. Пусть Q - проекция C на эту плоскость

Т.к. ~~от a~~ C, D ∈ a, и a ⊥ плоскости основания цилиндра, то тогда a ⊥ плоскости сечения, тогда Q - проекция ~~C~~ D на эту же плоскость



По условию AB = 4. Т.к. для данного △ABC радиус (r) минимален, то тогда т.к. у сечения радиус (r) совпадает с радиусом цилиндра, и ~~в окруж~~ и на окружности ~~его~~ есть хорда AB = 4, то тогда минимальный радиус будет, когда AB диаметр, т.е. $r = \frac{AB}{2} = 2$

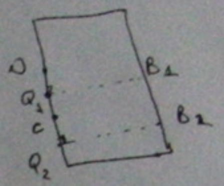
продолжение см. на след. листе

3

Чистовик.

Теперь найду расстояние QH от AB до Q, т.е расстояние между прямыми AB и a. ~~Т.~~т.к. $QA=QB$, вину равноудалённости точек A и B от CD, то т.к. $r=2$ ~~, то QH~~ и $AB=4$ то $QH=r=2$, а тогда $QA = QB = QH\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Рассмотрю ~~его~~ сечение цилиндра плоскостью CDB, это прямоугольник. Точка ~~Q может раско~~ Q может располагаться как между CD так и за точку C (т.к. $BC<BD$)



Пусть для первого случая B это B_1, а для ~~его~~ второго B это B_2. (см рис)

Найду CD:

для 1-ого случая: $CD = CQ_1 + Q_1D$ $\triangle B_1Q_1C$ и $\triangle B_1DQ_1$ прямоугольные, то по теор. Пифагора $Q_1D = \sqrt{DB_1^2 - QB_1^2}$ и $Q_1C = \sqrt{B_1C^2 - B_1Q_1^2}$. т.к. $DB=7$ ~~DA~~ $CB=5$ и $QB=2\sqrt{2}$, то $Q_1D=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$ и $Q_1C=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$, т.е. $CD=\sqrt{41}+\sqrt{17}$.

для 2-ого случая (Q - это Q_2) $CD = -Q_2C + Q_2D$

Q_2C и Q_2D находятся аналогично и равны $Q_2C=\sqrt{17}$ $Q_2D=\sqrt{41}$, т.е. $CD=\sqrt{41}-\sqrt{17}$. ~~Это было~~

Мы нашли всевозможные значения CD.

Ответ: $CD = \{\sqrt{41}+\sqrt{17}\ ;\ \sqrt{41}-\sqrt{17}\}$

4

Чистовик.

№ 3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b^2) \le 50 & (1) \\ (a^2+b^2) \le \min(14a+2b, 50) & (2) \end{cases}$$

Буду рассматривать систему относительно a и b зависящих от параметров x и y на пл-сти a, b.

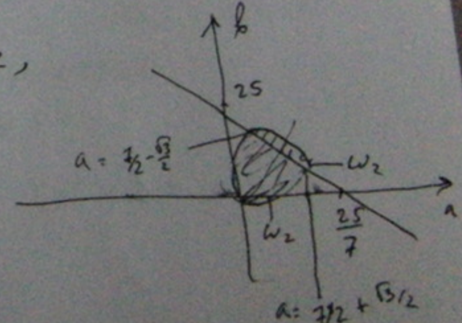
Тогда (1): $(a-x)^2 + (b-y)^2 \le 50$

решение неравенства это круг (включая границу) Ω с центром $(x;y)$ и радиусом $R = \sqrt{50}$

Теперь (2) когда $14a+2b<50$ получаем ω_1 ~~окр-ть~~ круг с центром в $(0;0)$ и радиуса $\sqrt{14a+2b}$, если $14a+2b>0$, то ~~окр~~ круг ω_2 с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{50}$.

Рассмотрю когда $14a+2b=50 \Rightarrow b=25-7a$, это прямая проходящая через ~~вхз.~~ точки $(0;25)$ и $\left(\frac{25}{7};0\right)$, если мы лежим ниже прямой то ~~вы~~ получим ~~окр~~ ω_1, если выше, то ω_2.

Найду т-ки пересечения ω_2 и прямой $b=25-7a$:



$$a^2 + (25-7a)^2 = 50$$

$$a^2 + 625 - 7\cdot 25\cdot 2\cdot a + 49a^2 = 50$$

$$50a^2 - 7\cdot 50a + 25(25-2) = 0$$

$$2a^2 - 14a + 23 = 0$$

продолжение см. на след. листе

5

Чистовик.

$2a^2 - 14a + 23 = 0$

$D = 14^2 - 4\cdot 23 \cdot 2 = 196 - 8\cdot 23 = 196 - 184 = 12 = (2\sqrt3)^2$

$a = \frac{14 \pm 2\sqrt3}{4} = \frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt3}{2}$, т.е. $\left(\frac72 + \frac{\sqrt3}{2}; \frac12 - \frac{7\sqrt3}{2}\right)$ и $\left(\frac72 - \frac{\sqrt3}{2}; \frac12 + \frac{7\sqrt3}{2}\right)$

Система (1)) (2) будет иметь решение если ~~между~~ между центрами Ω и ω_1 (или ω_2) будет меньше суммы двух радиусов, а т.к. $r = \sqrt{50}$, а другой ~~$\sqrt{50}$~~ не более $\sqrt{50}$, то если x и y положительные, тогда ~~т.е.~~ расстояние между ~~...~~ центрами окр-стей менее $2\sqrt{50}$, в противном случае $\sqrt{50}$.

Расстояние между центрами: $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

Для $x, y > 0$:

$x^2 + y^2 \le (2\sqrt{50})^2$

Для ~~x+y~~ других x и y:

$x^2 + y^2 \le (\sqrt{50})^2$

площадь фигуры – ¼-ть круга радиуса $2\sqrt{50}$:

$S_1 = \frac{\pi (r)^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot 50}{4} = 50\pi$

$\frac34$ круга радиуса $\sqrt{50}$

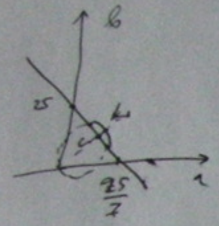
$S_2 = 3\frac{\pi r^2}{4} = \frac{3\pi \cdot 50}{4} = \frac{75\pi}{2}$

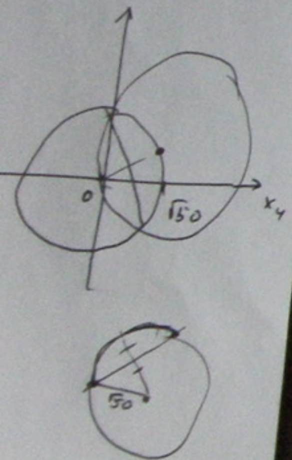
Т.е. площадь фигуры $M = S_1 + S_2 = \frac{100\pi}{2} + \frac{75\pi}{2} = \frac{175}{2}\pi = 87{,}5\pi$

Ответ: $87{,}5\pi$.

6

~~6~~



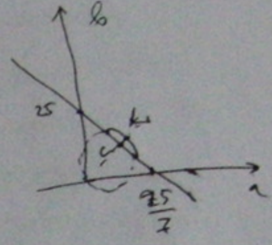


21100698 (U331255 M1296379)

Чистовик.

Возьму ~~среди~~ середину отрезка из точек пересечения ω_2 и прямой ~~y~~ $b = 25 - 7a$, т.е. точку с координатами $C\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

~~В случае если расстояние от~~ ~~(x; y)~~ до ~~C меньше $\sqrt{50}$ или те~~



Найду самую удаленную от $(0;0)$

Это точка L на прямой OC и на расстоянии $\sqrt{50}$ до $(0;0)$

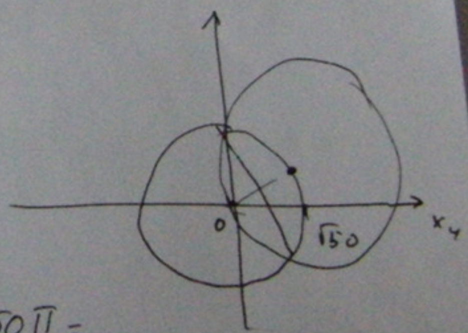
уравнения OC → ~~y=~~ $b = ka$

т.к. $C\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$, то $\frac{7}{2} = k\frac{1}{2} \Rightarrow k = 7$

т.к. расстояние $\sqrt{50}$, то координата L: $(x_1; 7x_1)$ и

$(7x_1)^2 + x_1^2 = 50$, то $x_1 = 1$, и координаты L: $(1; 7)$

Нам подходят такие x и y которые находятся не дальше чем на $\sqrt{50}$ от точки L или от начала координат.



Найду их площади

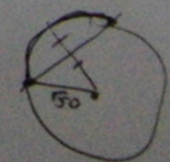
$S_1 = (\sqrt{50})^2\pi$ и $S_2 = (\sqrt{50})^2\pi$

а их общая часть равна

$S_1 + S_2 -$ общая часть, которая $\approx \frac{1}{4}S_1$

т.е. площадь фигуры M равна $\frac{7}{4}S_1 = \frac{7}{4}50\pi =$

$= \frac{7 \cdot 25}{2}\pi = \frac{175\pi}{2} \approx 87,5\pi$



21100698 (U331255 M1296379)

Ответ: $87,5\pi$

7

~~6~~

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100698**

ID профиля: **331255**

Вариант 22

Чрисвак

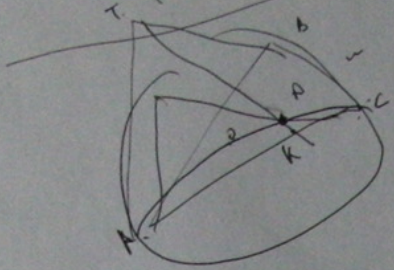
НОД - делит   НОК - кратно

наибол.   наименьш.

a, b, c   Каждое :14

14

$17-3=14$



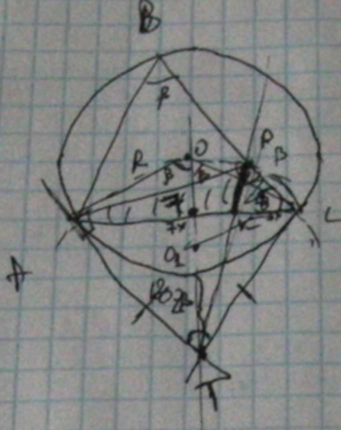
$2 \cdot 7$ $2 \cdot 7$ $2 \cdot 7$

$2^{16} \cdot 7^{17}$

1 13
2 12
3 11
4 10
5 9
6 8
7 7
0 14

1 14
0 15

Черновик



$S_{\triangle ABC}$:

для ω $AC = 2R\sin\beta$

для ϱ $AC = 2r\sin 2\beta$

O BP : PC

$x > 4$

$7x > \frac{17}{2}$

$x > \frac{17}{14}$

a b a
a a b
b a a

35 × 33 = 15 + 15 = 165

35 + 33 = 15 + 9 + 15 + 4 = 1155

1154 × 6 = 6924

21100698 (U331255 M1296380)

Илеговик

б) т.к. $\operatorname{arctg}\beta = \frac{3}{4}$, то ~~т~~ т.к. β – острый, то

$\sin\beta = \frac{3}{5}$ $\cos\beta = \frac{4}{5}$

Из ω: $AC = 2R\cdot\sin\beta$ из Ω $AC = 2r\sin 2\beta$, тогда

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{5}$$

Т.к. $\angle OCT = 90^\circ$, то OT – диаметр Ω, тогда $OT = 2r$

Из $\triangle OCT$: по теор Пифагора: $CT^2 = OT^2 - OC^2 = 4r^2 - R^2 =$

$= 4r^2 - \frac{64}{25}r^2 = 4r^2\left(\cancel{16}\,\frac{25}{25} - \frac{16}{25}\right) = \frac{4r^2}{25}\cdot 9$, т.е $CT = \frac{6}{5}r$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot AB\cdot BC}{4R} = \frac{1}{2}\sin\beta\ AB\cdot BC$$

Из $\triangle ACT$, где $AT = TC = \frac{6}{5}r$ $\angle ATC = 180 - 2\beta$

По ~~теор. косинусов~~ $AC = 2r\cdot 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = r\,\frac{16\cdot 3}{25} = \frac{48r}{25}$

Ответ: а) ~~12~~ $\frac{144}{5} = 28{,}8$

9

AK : KC = 7:5,
стороне AC.

...о $\angle AOC = 2\beta$
как
...)
... 1-ое
$= \frac{1}{2}\angle AOC = \beta$
$(OC \perp CT)$
$180 - 2\beta$

Из ω: $AC = 2R \cdot \sin\beta$ из Ω $AC = 2r \sin 2\beta$, тогда

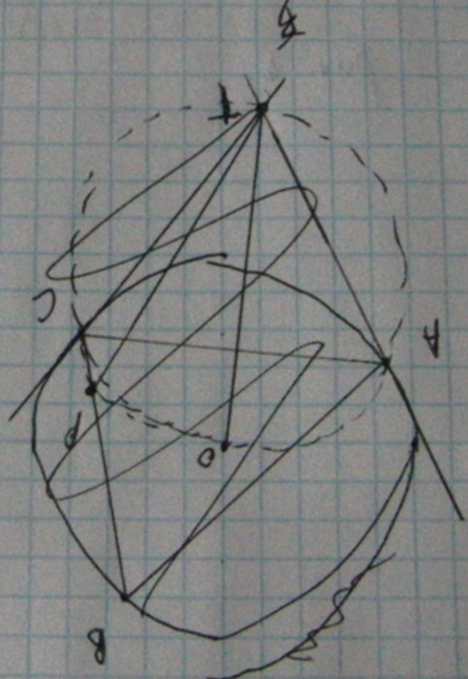
тогда $OT = 2r$

$C^2 = 4r^2 - R^2 =$

, т.е $CT = \frac{6}{5}r$

$180 - 2\beta$

$\frac{6 \cdot 3}{25} = \frac{48r}{25}$



21100698 (U331255 M1296380)

Ответ: а) ... = 26,0

Чистовик

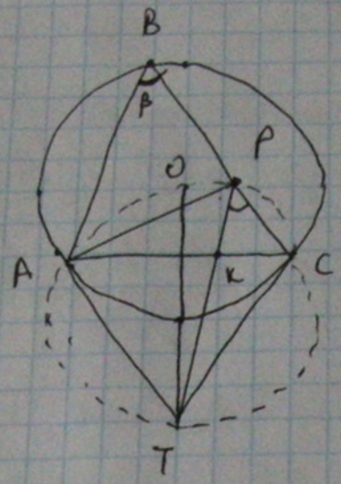


рис. 1.

8

21100698 (U331255 M1296380)

Чистовик

№6

Рисунок к задаче сделан на листе № 8

а) т.к. $S_{\triangle AРK} = 7$ и $S_{\triangle CPK} = 5$, то тогда $AK:KC = 7:5$, т.к. у этих треугольников общая высота к стороне AC.

Докажу, что $PT \parallel AB$

1) Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда т.к. O центр ω, то $\angle AOC = 2\beta$

2) Теперь рассмотрю $\triangle AOT$ и $\triangle COT$, $OA = OC$ как радиусы, $OA \perp AT$ и $OC \perp CT$ (по св-ву касательной)

$AT = TC$ (по св-ву касательных проведённых из 1-ой точки), тогда $\triangle AOT = \triangle COT \Rightarrow \angle AOT = \angle TOC = \frac{1}{2}\angle AOC = \beta$

и тогда т.к. треугольники прямоугольные ($OA \perp AT$ и $OC \perp CT$)

то $\angle ATC = \angle ATO + \angle OTC = 2\angle ATO = 2(90° - \angle AOT) = 180 - 2\beta$

т.е. $T \in$ окр-ти проходящей через A, O, C (пусть это окр. Ω)

Т.к. $P \in \Omega$ и $O \in \Omega$, то $\angle TOC = \angle TPC$, а т.к. $\angle TOC = \beta$, то $\angle TPC = \beta$

Отсюда: т.к. $\angle ABC = \beta$ и $\angle TPC = \beta$, то $AB \parallel PT$ по св-ву накрестлежащих углов и секущей BC

3) Т.к. $PT \parallel AB$, и $K = AC \cap PT$, то $AK:KC = BP:PC$

т.е. $AK:KC = BP:PC = 7:5$, тогда отношение площадей 2-ух подобных $\triangle PCK$ и $\triangle BCA$ (по лемме) равно:

$$\frac{S_{\triangle PCK}}{S_{\triangle BCA}} = \left(\frac{CK}{AC}\right)^2 = \left(\frac{5}{5+7}\right)^2 = \frac{5^2}{12^2} = \frac{25}{144},$$ а т.к. $S_{\triangle PCK} = 5$,

то $S_{\triangle BCA} = \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5} = 28{,}8$

7

продолжение см на лист

21100698 (U331255 M1296380)

Шестовин

$x^2 - 12x + 72 = 0$

$D = 12^2 - 4 \cdot 72 = 36 \cdot 4 - 4 \cdot 36 \cdot 8 < 0$

А раз корней нет то и x такого не существует.

Ответ: $\{\varnothing\}$

Ш.е.
Цистовик.

т.е. $\sqrt{2}b^3+\sqrt{2}b-1=0 \Rightarrow \varnothing$

III. $\log_a b = \log_c a \qquad \log_a b = 2\log_b c - 1$

$$\log_a b = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

$$\log_b c = \frac{\log_b a}{\log_a b} = \log_b^2 a$$

Тогда если $\log_b c = 0$

$$\log_a b = 2\log_b^2 a - 1$$

$$\frac{\log_a b^3 - 2\cancel{\log} \; 2\log_a^2 b + 1}{\log_a^2 b} = 0$$

тогда $\log_a b = 1$, тогда $\log_b c = 1$, т.е.

$a = b$ ~~$= c$ ... $b = c$ ... так как~~

$$\frac{x}{2}+1 = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$$

$$1 + \frac{17}{4} = \frac{6x}{2}$$

$$\frac{16+17}{4} = 3x$$

$$x = \frac{33}{12} = \frac{11}{4}$$

$$\frac{x}{2}+1 = \sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}} = \sqrt{\frac{3x}{2} - 6}$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = \frac{3x}{2} - 6$$

$$\frac{4x}{2} = \frac{17}{4} - 6$$

$$2x = \frac{17-24}{4}$$

$x = \frac{17-24}{8}$ – не удовл. услов. $\frac{3x}{2} - 6 > 0$

$$\frac{x}{2}+1 = \sqrt{\frac{7x}{2}-17}$$

$$\frac{x^2}{4} + x + 1 = \frac{7x}{2} - 17$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} + 18 = 0$$

5

Чистовик

$$\begin{cases} k^2 = k-1 \Rightarrow k^2-k+1=0 \quad D=1-4<0 \\ k^2=-k-1 \Rightarrow \varnothing, \text{ т.к. } k\geq 0, \text{ то } -k-1<0, \text{ а } k^2\geq 0 \end{cases}$$

I $\log_a b = 2\log_b c$ (1) $\qquad \log_c a = \log_a b - 1$ (2)

$\log_a b = \dfrac{2\log_a c}{\log_a b}$

$\log_a^2 b = 2\log_a c$

тогда если $\log_a c \geq 0$

$\log_a b = \pm\sqrt{2\log_a c}$

~~подставив в (2)~~

$\log_a b = \pm\sqrt{\dfrac{2}{\log_c a}}$

$\log_c a = \log_a b - 1$ (2)

$$\begin{cases} \log_c a = \sqrt{\dfrac{2}{\log_c a}} - 1 & (3) \\ \log_c a = -\sqrt{\dfrac{2}{\log_c a}} - 1 \end{cases}$$

$\varnothing$ т.к. $\log_c a \geq 0$

а $-\sqrt{\dfrac{2}{\log_c a}} - 1 < 0$

(3): Замена $\sqrt{\log_c a} = k$

$k^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{k} - 1 \Rightarrow \dfrac{k^3 - \sqrt{2} + k^2}{k} = 0 \quad k^2(k^2+1)=\sqrt{2}$

$k^3 + k^2 - \sqrt{2} = 0$ ~~нет корней~~ $\Rightarrow \varnothing$ $\qquad \log_a b = \log_c a - 1$

II $2\log_b c = \log_c a$

$2\log_b c = \dfrac{\log_b a}{\log_b c}$

$2\log_b^2 c = \log_b a$

Если $\log_b a \geq 0$, то $\log_b c = \pm\sqrt{\dfrac{\log_b a}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2\log_a b}}$

Замена $l = \sqrt{\log_a b}$, то

$$\begin{cases} l^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}\, l} - 1 \Rightarrow \varnothing, \text{ т.к. } l^2 \geq 0 \quad -\dfrac{1}{2l} - 1 < 0 \\ l^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}\, l} - 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}\, l^3 + \sqrt{2}\, l - 1}{\sqrt{2}\, l} = 0 \end{cases}$$

продолжение см. на след. листе

Чистовик

№5

Пусть $a = \frac{x}{2}+1$, причем $a, b, c > 0$ и $a \neq 1$

$b = \sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}$ $b \neq 1$

$c = \sqrt{\frac{3x}{2} - 6}$ $c \neq 1$

Перепишем числа в виде:

1) $\log_{a^2} b^2$ 2) $\log_{b} c^2$; 3) $\log_c a$

С учетом наложеного ограничения:

1) $\log_a b$ 2) $2\log_b c$ 3) $\log_c a$

Теперь осталось рассмотреть 3 случая:

I $\log_a b = \log_b c$ $\log_c a = \log_a b - 1$

$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

⇓

$\log_a^2 b = \log_a c$

т.к. тогда $\log_a c \geq 0$ (если $\log_a c < 0$ то корней нет)

и решение $\left[\begin{array}{l}\log_a b = \sqrt{\log_a c} \\ \log_a b = -\sqrt{\log_a c}\end{array}\right.$

Подставим в правое уравнение:

$\left[\begin{array}{l}\log_c a = \sqrt{\log_a c} - 1 \\ \log_c a = -\sqrt{\log_a c} - 1\end{array}\right.$

Замена $\sqrt{\log_c a} = k$, $k \geq 0$

продолжение см. на след. листе

Чистовик

2) Если $n=18$ и $m \neq 17$, то a принимает одно значение, b – 16, а число c – 18, тогда $K_2 = 1 \cdot 16 \cdot 18$

3) Если $m=17$ и $n \neq 18$, то a принимает 17 значений, b – 1, число c – 17, тогда $K_3 = 17 \cdot 1 \cdot 17$

4) если $n=18$ и $m=17$, то тогда a принимает 1 значение, b – 1 значение, а число c $17 \cdot 18$, т.е. всего $K_4 = 17 \cdot 18$

Т.е. всего троек $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 16 \cdot 17 + 16 \cdot 18 + 17^2 + 17 \cdot 18 =$
$= 16 \cdot (17+18) + 17(17+18) = (17+18)(16+17) = 35 \cdot 33$

~~Это без учета повторений.~~ когда $a=c$ (1 случай $n=18$) и $b=c$ (тоже 1 случай $n=17$)
(Но надо вычесть повторные
с учетом того, что мы считали $a \vdots 4$ $b \vdots 49$, то
теперь эту S умножим на 6 ~~это число~~ $A_3^3 = \frac{3!}{0!} = 6$
это число перестановок упорядоченных a, b, c.

Т.е. всего ~~$35 \cdot 33 \cdot 6$~~ когда нет повторений $6 \cdot (35 \cdot 33 - 2)$
А когда есть повторение $2 \cdot 3 = 6$

~~Ответ: $35 \cdot 33 \cdot 6$. =~~ Всего: $6 \cdot (35 \cdot 33 - 2 + 1) =$

Ответ: $6 \cdot 35 \cdot 33 - 6 = 6924$

2

Чистовик.

Вар. 22

№4

Т.к. ~~под ч~~ НОД$(a;b;c)=14$, то тогда каждое число как минимум равно 14, А максимальное значение ~~числа~~ числа (из тройки a,b,c) – $2^{17}\cdot 7^{18}$.

Причем, чтобы НОД$(a;b;c)=14$ должно быть хотя бы 1 число $\vdots 2$, но не кратное ~~4~~ 4, и аналогично число $\vdots 7$, но не кратное 49

Пусть число не кратное 4 это a, а число не кратное 49 это b.

Тогда всевозможные значения a можно представить в виде $a=2\cdot 7^n$ (где $n\in Z$ и $n\in[1;18]$, а число $b=2^m\cdot 7$ (где $m\in Z$ $m\in[1;17]$

А число c должно быть $\vdots 14$ и степень у 7 должна быть такая, что если $n=18$, то тогда она принимает любые значение от 1 до 18, а если $n\neq 18$, то тогда только 18

А степень 2 ~~у~~ у числа c:

если $m=17$, то любая от 1 до 17

если $m\neq 17$, то только 17

Чтобы посчитать число таких ~~а~~ 3-ек разобью на 4 случая.

1) $n\neq 18$ и $m\neq 17$, тогда число вариантов значение a равно ~~4~~ 17, числа b – 16 и число c принимает ровно 1 значение. Т.е всего $K_1=17\cdot 16\cdot 1$ случаев.

см. продолжение на след. листе.