Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100643**

ID профиля: **338054**

Вариант 22

Чистовик

№3

1) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b, 50) \quad (2)\end{cases}$

(2) $\begin{cases}a^2+b^2\le 14a+2b \,(3)\\ a^2+b^2\le 50 \,(4)\end{cases}$ (Если число меньше или равно минимума из 2-х чисел, оно должно быть не больше каждого из них (равносильный переход))

2) Подставим в (1) $x=0$ и $y=0$:

$(0-a)^2+(0-b)^2\le 50$

$a^2+b^2\le 50$. 3) Т.к. (4) должно выполнятся, то ~~каждая~~ точка $(0,0)$ должна принадлежать каждому ~~кругу~~ кругу ур (1): $(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$ - круг с ц. в т. $x=a$, $y=b$ и $R=5\sqrt{2}$. Если при каких-то a и b эта точка не принадлежит кругу, то $a^2+b^2>50$, что противоречит (4) $\Rightarrow$ подходят только те a, b, при которых круг проходит через $(0,0)$

4) Подставим в (1) $x=7$, $y=1$

$(7-a)^2+(1-b)^2\le 50$

$49-14a+a^2+1-2b+b^2\le 50$

$a^2+b^2\le 14a+2b$, что соотв. нер-ву (3) $\Rightarrow$ аналогично п 3) все круги содержат точку $(7,1)$

5) Заметим, что объединение множеств всех кругов, проходящих через т. $(0,0)$ и радиусом $5\sqrt{2}$ - это круг с ц. в $(0,0)$ и радиусом $10\sqrt{2}$. Любая точка (x_0,y_0) этого круга будет принадлежать ~~окружности~~ кругу с ц. в т. $\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$ и этот круг будет проходить через $(0,0)$. А любая точка вне этого мн-ва будет находится от $(0,0)$ на расст $>10\sqrt{2}=2R=D$. 2 точки в круге не могут быть удалены больше, чем на диаметр.

6) Тогда заметим, что получившееся мн-во есть пересечение 2-х кругов $R=10\sqrt{2}$ и центрами в $(0,0)$ и $(7,1)$

См на стр 2

21100643 (U338054 M1300809)

Чистовик

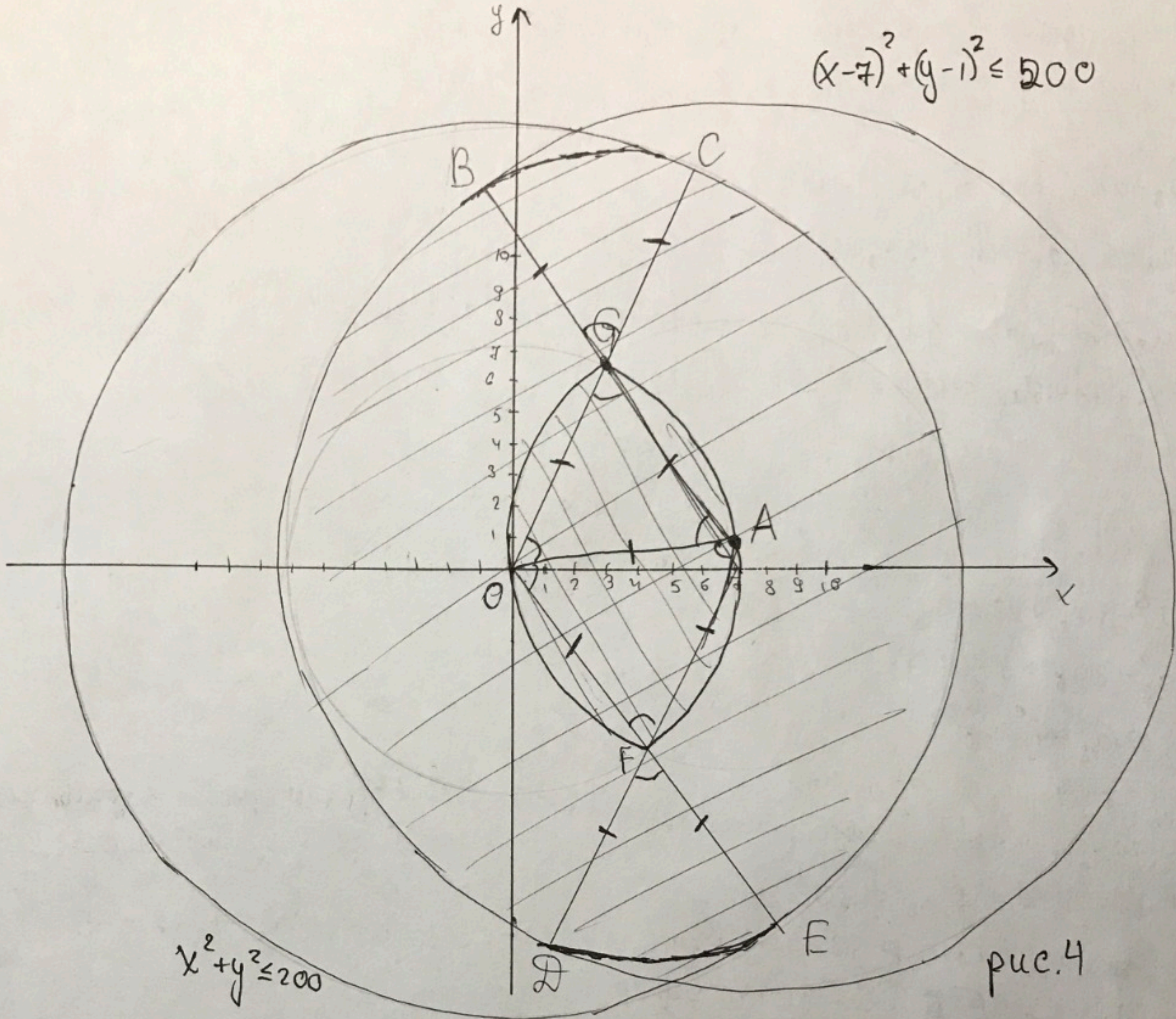


рис. 4

7) В 2-жды заштрихованной области находятся все возможные координаты центра круга. В итоге подходящая область разделилась на 4 части, из которых 2 сектора BGC и EDF радиуса $5\sqrt{2}$ и углом в $60°$, секторы COE и BAD с радиусом $10\sqrt{2}$ и углом $120°$ и минус 2-жды посчитанная S_{OGAF}

8) $S_M = \frac{\pi \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot 60°}{360°} \cdot 2 + \frac{\pi \cdot (10\sqrt{2})^2 \cdot 120°}{360°} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{(5\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{\pi \cdot 50 \cdot 2}{6} + \frac{\pi \cdot 200 \cdot 2}{3} - \frac{50\sqrt{3}}{2} = \frac{450}{3}\pi - 25\sqrt{3} = 150\pi - 25\sqrt{3}$

Ответ: $S_M = 150\pi - 25\sqrt{3}$

См. пояснение на стр $\boxed{5}$

21100643 (U338054 M1300809)

Чистовик

№1

1) d - разность прогрессии: $a_n = a_k + (n-k)\cdot d$

$$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{2a_1 + 14d}{2}\cdot 15 = (a_1 + 7d)\cdot 15 = a_8 \cdot 15$$

$$\begin{cases}(a_8 - d)(a_8 + 8d) > 15a_8 - 24\\ (a_8 + 3d)(a_8 + 4d) < 15a_8 + 4\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_8^2 + (7d - 15)a_8 > 8d^2 - 24\\ a_8^2 + (7d-15)a_8 < -12d^2 + 4\end{cases}$$

$-12d^2 + 4 > a_8^2 + (7d - 15)a_8 > 8d^2 - 24$

$20d^2 < 28$

$|d| < \sqrt{\frac{28}{20}} < 2$

$d = 1$ (т.к. $d > 0$ по усл)

(т.к. числа целые)

$$\begin{cases}a_8^2 - 8a_8 + 16 > 0\ (2)\\ a_8^2 - 8a_8 + 8 < 0\ (1):\end{cases}$$

(2 и (1): $(a_8 - 4)^2 < 8$

$\begin{cases}a_8 \neq 4\\ -2\sqrt{2} < a_8 - 4 < 2\sqrt{2}\end{cases}$ $\begin{cases}a_8 \neq 4\\ 1 < 4 - 2\sqrt{2} < a_8 < 4 + 2\sqrt{2} < 7\end{cases}$ $a_8 \in \{2, 3, 5, 6\}$ (т.к. последовательность целых чисел)

2) а) $a_8 = 2$, $S = 15a_8 = 30$

$a_7 \cdot a_{16} = 1 \cdot 10 > 30 - 24$ - верно $a_8 = 2$ - подходит $a_1 = a_8 - 7 = -5$

$a_{11} \cdot a_{12} = 5 \cdot 6 < 30 + 4$ - верно

б) $a_8 = 3$, $S = 45$

$a_7 \cdot a_{16} = 2 \cdot 11 > 45 - 24$

$22 > 21$ - верно $a_8 = 3$ - подходит $a_1 = -4$

$a_{11} \cdot a_{12} = 6 \cdot 7 < 45 + 4$

$42 < 49$ - верна

в) $a_8 = 5$, $S = 75$

$a_7 \cdot a_{16} = 4 \cdot 13 > 75 - 24$ $a_8 = 5$ - подходит $a_1 = -2$

$52 > 51$ - верно

$a_{11} \cdot a_{12} = 8 \cdot 9 < 75 + 4$

$72 < 79$ - верно

г) $a_8 = 6$, $S = 90$

$a_7 \cdot a_{16} = 5 \cdot 14 > 90 - 24$ $a_1 = -1$

$70 > 66$ - верно $a_8 = 6$ - подх.

$a_{11} \cdot a_{12} = 9 \cdot 10 < 90 + 4$ - верно Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

$\boxed{3}$

Чистовик

№2

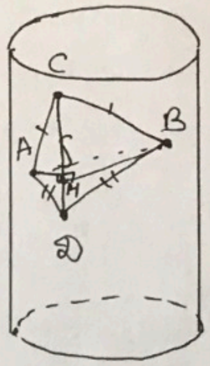


рис. 1

1) Заметим, что точки C и D равноудалены от концов отрезка AB, значит (CDX), где X - середина AB, перпенд. AB (CX - медиан. выс, DX - медиан. высота) $\Rightarrow AB \perp (CDX)$. $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow (CDX) \perp$ (основанию) $\Rightarrow AB \parallel$ осн. цилиндра.

2) $H \in CD : AH \perp CD$. $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по 3-м сторонам) $\Rightarrow BH \perp CD$; $BH = AH = h$

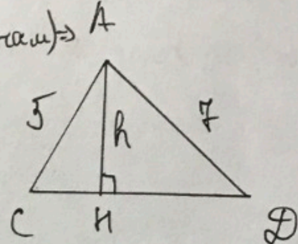


рис. 2

3) $(ABH) \perp CD \perp$ (осн) $\Rightarrow (ABH) \parallel$ (осн)

4) Рассмотрим сечение плоскостью (рис. 3) ABH. R_{ABH} и будет радиусом цилиндра, т.к. $(ABH) \parallel$ (основанию)

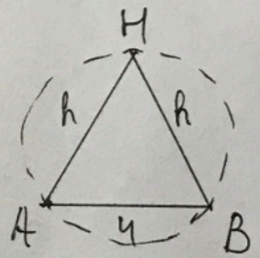


рис. 3

$$R_{ABH} = \frac{AH \cdot BH \cdot CH}{4 S_{ABH}} = \frac{h^2}{S_{ABH}} = \frac{h^2}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{h^2 - 2^2}}$$

$R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-4}}$ — минимизируем по h

$R = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{4}{h^4}}}$ — максимизируем подкоренное выражение знаменателя:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{4}{h^4}\right)' = 0$$

$-\frac{2}{h^3} + \frac{16}{h^5} = 0 \quad h = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{8}{2 \cdot \sqrt{4}} = 2$: это точно ~~наим~~ наим. радиус, т.к. любая хорда $\leq D$: $AB \leq 2R$; $R \geq 2$.

Значит $h = 2\sqrt{2}$

5) Рассмотрим $\triangle ACD$ (рис. 2). $CD = CH + HD = \sqrt{5^2 - h^2} + \sqrt{7^2 - h^2} = \sqrt{25-8} + \sqrt{49-8} = \sqrt{17} + \sqrt{41}$ (т. Пифагора)

Ответ: $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Чистовик

Пояснения к задаче №3:
чтобы a и b подходили под условие, круг с ц. в т. (a, b) должен находиться на расстоянии не больше $5\sqrt{2}$ от точек A и O ⇒ мн-во всех возможных центров - это пересечение кругов, радиусов $5\sqrt{2}$ и с ц. в т. A и O (дважды заштрихованная обл.) тогда область M - это мн-во точек, удалённых от 2-жды заштрих области не больше чем на $5\sqrt{2}$ что и есть на рис. 4 единожды. заштрих. обл.

Черновик

a_1 $a_n = a_1 + d(n-1)$

$a_{11} = a_7 + d(11-7)$

$a_{16} = a_{12} + d(16-12)$

$S = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2}$

$a_7 \cdot (a_{12} + 4d) > S - 24$

$(a_7 + 4d) \cdot a_{12} < S + 4$

$a_{15} = a_1 + d(15-1)$

$S = (a_1 + 7d) \cdot 15$

a_8

$(a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15(a_1 + 7d) - 24$

a_1^2

y

$(a_8 - d)(a_8 + 8d) > 15a_8 - 24$

$y^2 + x^2 \leq 50$

$(a_8 + 3d)(a_8 + 4d) < 15a_8 + 4$

55

$y^2 + x^2 \leq 200$

$a_8^2 + (7d - 15)a_8 - 8d^2 + 24 > 0$

$x^2 + y^2 = 200$

$a_8^2 + (7d - 15)a_8 + 12d^2 - 4 < 0$

$2^2 + 14^2$

$12d^2 - 4 < -8d^2 + 24$

$S = 30$

$(y - 7)$

$20d^2 < 28$

$d = 1$

$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{4}{h^4}}}$

168

175

25

$\frac{1}{h^2} - \frac{4}{h^4} \to$ макс

$a_8^2 - 8a_8 + 16 > 0$

$a_8 \neq 4$

$a_8^2 - 8a_8 + 8 < 0$

$-2\sqrt{2} < a_8 - 4 < 2\sqrt{2}$

$-\frac{2}{h^3} + \frac{16}{h^5} = 0$

$0 < (a_8 - 4)^2 < 8$

$a_8 \in \{2, 3, 5, 6\}$

$-2h^5 = 16h^3$

$h = 2\sqrt{2}$

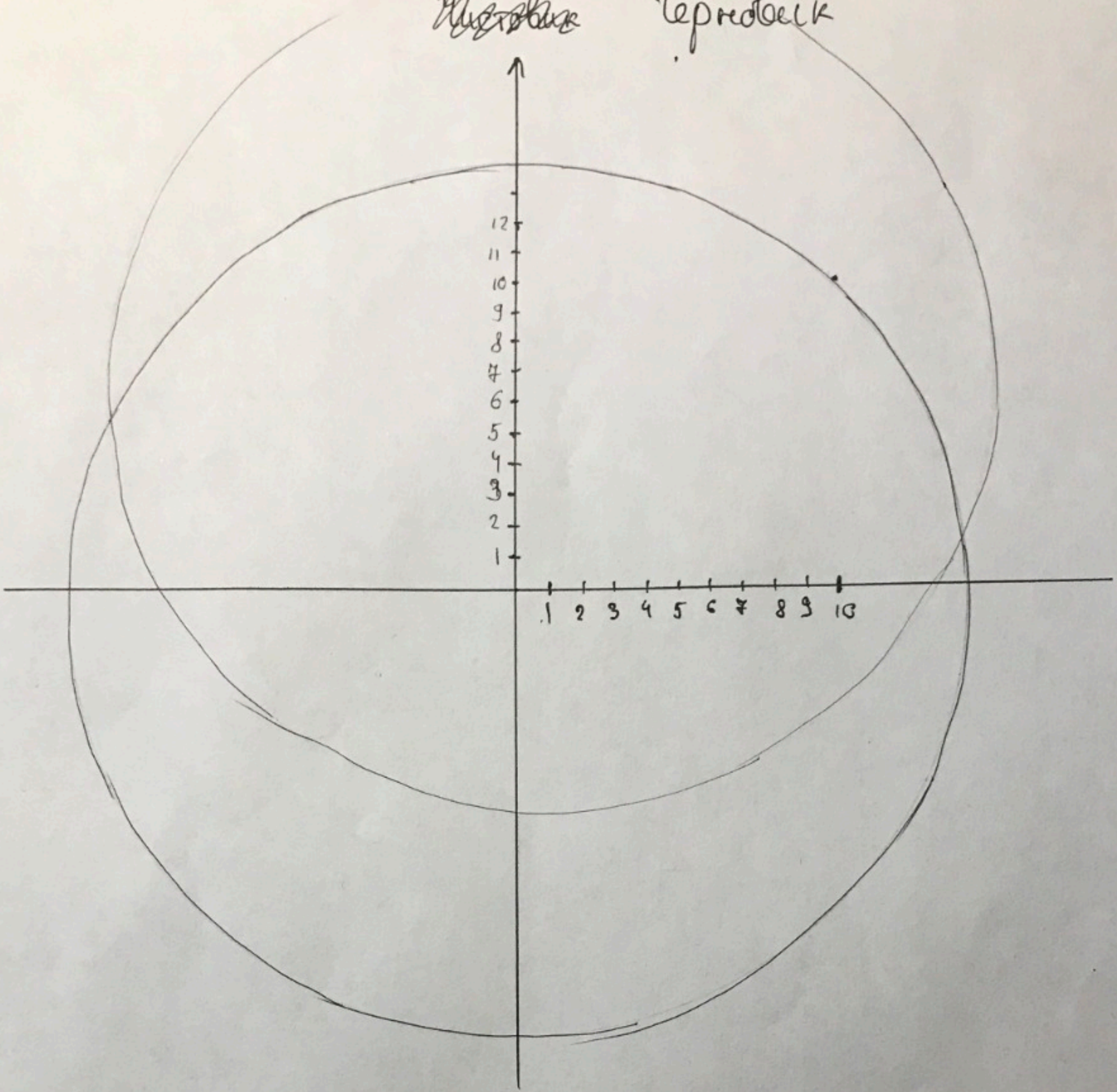
Черновик

$(\cancel{x}-a)^2$

$x=2a \quad y=2b$

$x=2a-7 \quad y=2b-1$

~~Чистовик~~ Черновик



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100643**

ID профиля: **338054**

Вариант 22

Чистовик

№4

1) $НОД(a,b,c) = 14 = 2^1 \cdot 7^1$

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \vdots a,b,c$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N}_{+0}$

2) Пусть $a = 2^{\alpha_1} 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 7^{\beta_3}$ (других простых делителей быть не может, т.к. тогда бы они встречались в НОК этих чисел)

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$; $\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 17$ $\alpha_{мин} = 1$; $\alpha_{max} = 17$ $\begin{cases} \alpha_{ср} \le 17 \\ \alpha_{ср} \ge 1 \end{cases}$

$\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$; $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 18$ $\beta_{мин} = 1$; $\beta_{max} = 18$; $\begin{cases} \beta_{ср} \le 18 \\ \beta_{ср} \ge 1 \end{cases}$

3) Рассмотрим кол-во возможных троек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и умножим на кол-во возможных троек $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (т.к. эти числа ~~не влияют~~ независимы друг на друга)

Пусть $\alpha_1 \ne \alpha_2 \ne \alpha_3 \ne \alpha_1$. Тогда у нас существует 15 неупорядоченных наборов $(1,2,17), (1,3,17) \ldots (1,16,17)$. Упорядоченных троек будет $15 \cdot 3! = 90$

4) Если же какие-то 2 числа равны, то неупорядоченных троек будет всего 2: $(1,1,17)$ и $(1,17,17)$. Упорядоченных троек будет $2 \cdot \frac{3!}{2!} = 6$

Итого всего наборов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $90 + 6 = 96$

5) Если все $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ не равны друг другу, то неупорядоченных троек будет 16, а упорядоченных $16 \cdot 3! = 96$ (аналогично п. 3))

6) Если какая-то пара чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ равны между собой, то неупорядоч. тройки: $(1,1,18)$; $(1,18,18)$. А упорядоченных всего $2 \cdot \frac{3!}{2!} = 6$.

7) Как сказалось в начале п. 3) надо умножить 96 на 102, чтобы получить кол-во возможных троек чисел.

$(100-4)(100+2) = 10000 - 400 + 200 - 8 = 9800 - 8 = 9792$

Ответ: 9792

Чистовик

№5

1) Пусть $\frac{x}{2}+1=a$; $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$; $\frac{3x}{2}-6=c$, тогда 3 исходных числа:

$\log_{a^2} b,\ \log_{b^{\frac{1}{2}}} c^2,\ \log_{c^{\frac{1}{2}}}(a)$; $a,b,c\neq 1$; $a,b,c>0$

$\frac{1}{2}\log_a b,\ 4\log_b c,\ 2\log_c a.$

2) Пусть 2 из чисел равны t, а третье $t-1$. Перемножим все три числа:

$$t^2(t-1)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\,(\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a)$$

Заметим, что $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\log_b c}{\log_b a}\cdot\frac{1}{\log_a c}=1$

$$t^3-t^2-4=0$$

Заметим, что $t=2$ − подходит: $8-4-4=0$

$$\begin{array}{l|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ \hline t^3-2t^2 & t^2+t+2 \\ \quad t^2 & \\ \quad t^2-2t & \\ \hline \quad 2t-4 & \end{array}$$

не имеет корней

$:\ (t-2)(t^2+t+2)=0$

$$t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}>\left(t+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$$

Значит 2 ~~[illegible]~~ исходных числа равны 2м, а одно равно 1

3) Рассмотрим 3 случая:

а) $\log_{a^2} b=1$; $\log_{b^{\frac{1}{2}}} c^2=2$; $\log_{c^{\frac{1}{2}}} a=2$

$\log_a b=2$ $\quad\log_b c=\frac{1}{2}$ $\quad\log_c a=1$

$b=a^2$ $\quad c=b^{\frac{1}{2}}\Rightarrow b=c^2$ $\quad a=c$

$\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6\Rightarrow x=7$; $a=c=\frac{9}{2}$

$\frac{7\cdot 7}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{9}{2}\right)^2=b$

$98-17=9^2$ − верно $\Rightarrow x=7$ − подходит

б) $\frac{1}{2}\log_a b=2$; $4\log_b c=1$; $2\log_c a=2$

$b=a^4$ $\quad c=b^{\frac{1}{4}}$ $\quad a=c$. Заметим, что из $a=c$ следует $x=7$, а при $x=7$ $b=\left(\frac{9}{2}\right)^2=a^2\neq a^4$

в) $\frac{1}{2}\log_a b=2$; $4\log_b c=2$; $2\log_c a=1$ $\quad\frac{3x}{2}-6=\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\ |\cdot 4$ $\quad x^2-2x+28=0$ − не имеет корней; $D<0$

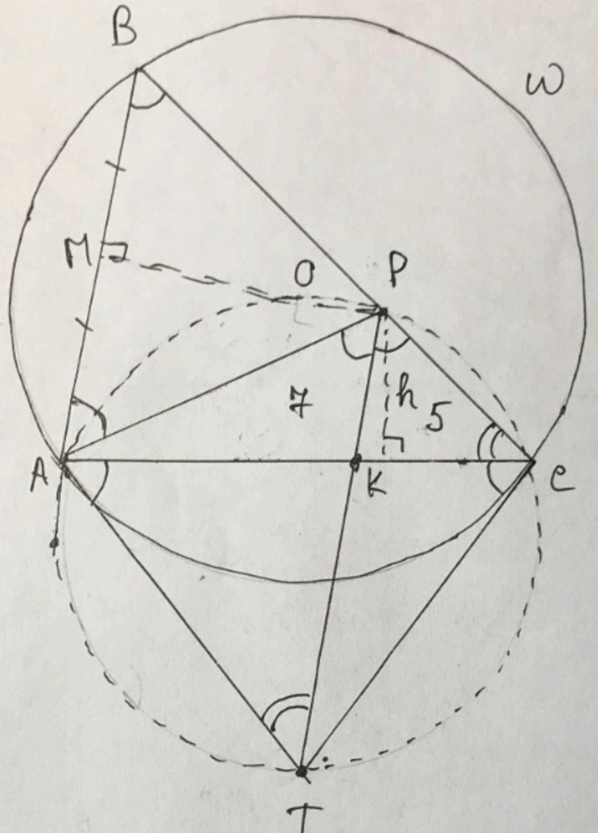
$b=a^4$ $\quad c=b^{\frac{1}{2}}$, $b=c^2$ $\quad a=c^{\frac{1}{2}}$, $c=a^2$ $\quad 6x-24=x^2+4x+4$

~~См на стр~~

Ответ: $x=7$

Чистовик

№6



1) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (т.к. радиус $\perp$ касательной) $\Rightarrow$ A, O, C, T лежат на одн. окр $\Leftrightarrow$ T лежит на окр Ω, описанной около $\triangle AOC$. P тоже лежит на Ω $\Rightarrow$ Все эти 5 точек лежат на одной окр $\Rightarrow$ APCT - вписан.

2) $\angle ABC = \angle TAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (угол между хордой и касательной)

$\angle TAC = \angle TPC$ - вписанные углы

$\Downarrow$

$\angle ABC = \angle TPC \Rightarrow PT \parallel AB$ (соотв. углы)

3) $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{CA}{CK}\right)^2$

$\frac{S_{CPK}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot KC\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{CA}{CK}\right)^2 = \left(\frac{S_{APC}}{S_{CPK}}\right)^2 = \left(\frac{7+5}{5}\right)^2$

$S_{ABC} = \frac{12^2}{5^2}\cdot 5 = \frac{144}{5} = 28{,}8$

4) $\angle ABC = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

$28{,}8 = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot \sin\alpha \Rightarrow AB\cdot BC = \frac{57{,}6}{\sin\alpha}$

см на стр $\boxed{4}$

Чистовик

5) $\angle ACT = \angle ABC = \angle APT = \angle PAB = \alpha$ (параллельность, вписанность касательная и хорда)

$\triangle APB$ – равноб $\Rightarrow AP = BP$

$AB = 2 \cdot BP \cdot \cos\alpha$ (медиана совпадает с высотой

$\frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$ (т. Фалеса)

$\frac{BP}{BC} = \frac{7}{12}$

$\begin{cases} AB = 2 \cdot \frac{17}{12} BC \cdot \cos\alpha \\ AB \cdot BC = \frac{57{,}6}{\sin\alpha} \end{cases} \Rightarrow BC^2 \cdot \frac{17}{6} \cdot \cos\alpha = \frac{57{,}6}{\sin\alpha}$

$BC^2 = \frac{6 \cdot 57{,}6}{17 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$AB^2 = \frac{17}{6} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot 57{,}6}{\sin\alpha}$

6) Т. косинусов

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$AC = \sqrt{\frac{17 \cdot 57{,}6}{6} \cdot \frac{1}{tg\alpha} + \frac{6 \cdot 57{,}6}{17 \cdot tg\alpha \cdot \cos^2\alpha} - \frac{2 \cdot 57{,}6 \cdot}{tg\alpha}}$

$AC = \sqrt{\frac{57{,}6}{tg\alpha}\left(\frac{17}{6} + \frac{6}{17}(1 + tg^2\alpha) - 2\right)} = 24\sqrt{\frac{4}{30}\left(\frac{5}{6} + \frac{6}{17}\left(\frac{25}{16}\right)\right)} =$

$= 24 \cdot \frac{1}{30} \cdot \sqrt{4\left(25 + \frac{36 \cdot 25 \cdot 5}{17 \cdot 16}\right)} = \frac{4}{5} \cdot 5\sqrt{4 + \frac{36 \cdot 5}{17 \cdot 8}} = 4\sqrt{\frac{17 \cdot 2 + 9 \cdot 5}{17 \cdot 2}} =$

$= 4\sqrt{\frac{79}{34}}$

Ответ: $AC = 4\sqrt{\frac{79}{34}}$

Черновик

$НОД(a,b,c) = 2 \cdot 7$

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

$(x-1)^{\cancel{\#}} \cdot x^2 = 4$

$a = 2^{\alpha_1} 7^{\beta_1}$

$\cancel{x^3 - 2x + 1 - 4 = 0}$

$b = 2^{\alpha_2} 7^{\beta_2}$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$c = 2^{\alpha_3} 7^{\beta_3}$

$\frac{x}{2} + 1 = a$

$\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} = b$

$\frac{1}{2} \log_{\frac{x}{2}+1} \left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4} \right)$

$\frac{3x}{2} - 6 = c$

$\frac{1}{2} \log_a b, \ 4 \log_b c, \ 2 \log_c a$

$BP \cdot BC = BA^2 \quad BP = \frac{7}{12} BC$

$BA \cdot BC = c$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

$\sqrt{\frac{7}{12}} BC = BA$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2\underbrace{AB \cdot BC}\cdot \cos\alpha}$

$AP \cdot TC + PC \cdot AT = AC \cdot PT$

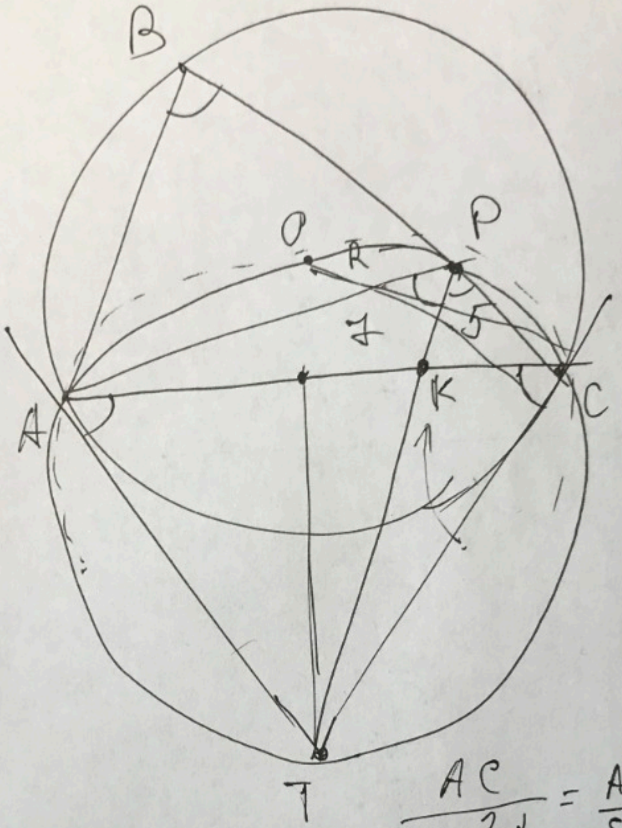
$AP \cdot PC = \frac{AC}{AT} \cdot PT$

$AC = 2R \cdot \sin\alpha$

21100643 (U338054 M1300810)

~~Чистовик~~ Черновик

~~$x^2-2x+28=0$; $D<0$ => не имеет корней~~



$$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AT}{\sin\alpha}$$

$$AC = 2AT\cos\alpha$$

$$AT = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\frac{34+45}{34} =$$