Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100628**

ID профиля: **105758**

Вариант 22

Вариант 22 Чистовик

1. $S=\sum_{i=1}^{15}$, $a_i=a_1+q(i-1)$, т.к. a_i – возрастающая арифметическая прогрессия, то $q>0$; $a_1, q \in \mathbb{Z}$

$S=\sum_{i=1}^{15} a_i = 15a_1+105q$

$\begin{cases} a_7\cdot a_{16} \geq S-24 \\ a_{11}\cdot a_{12} < S+4; \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+6q)(a_1+15q) \geq 15a_1+105q-24 \\ (a_1+10q)(a_1+11q) < 15a_1+105q+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+21a_1q+90q^2 \geq 15a_1+105q-24 \\ a_1^2+21a_1q+110q^2 < 15a_1+105q+4; \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+21a_1q+90q^2-15a_1-105q+24 \geq 0 \\ -a_1^2-21a_1q-110q^2+15a_1+105q+4 > 0; \end{cases} +$

$-20q^2+28>0$

$q^2 < \frac{28}{20} = 1,2$

$-2<-\sqrt{1,2}<q<\sqrt{1,2}<2 \Rightarrow q=\{-1;0;1\}$, но т.к. $q>0$, то $q=1$, подставим $q=1$ в систему:

$\begin{cases} a_1^2+21a_1+90 \geq 15a_1+105-24 \\ a_1^2+21a_1+110<15a_1+105+4; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+6a_1+9 \geq 0 \\ a_1^2+6a_1+1<0; \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+3)^2 \geq 0 \\ a_1^2+6a_1+1<0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -3 \\ a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2}) \end{cases}$

$D/4 = 9-1=8$

$a = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{ll} -3-2\sqrt{2}>-6 & (3>2\sqrt{2};\ 9>8) \\ -3+2\sqrt{2}<0 & (2\sqrt{2}<3;\ 8<9) \end{array}\right\} \Rightarrow a_1=\{-5;-4;-3;-2;-1\}$ и $a_1 \neq -3 \Rightarrow$

$a_1=\{-5;-4;-2;-1\}$

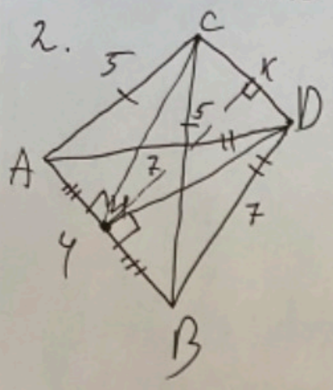
Ответ: $a_1=\{-5;-4;-2;-1\}$.

1

21100628 (U105758 M1300585)

Вариант 22 Чистовик

2.



$\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ – р/б $\Rightarrow CH_1$ – высота, бис-са и медиана $\Rightarrow AH_1 = H_1B = 2$, DH_2 – высота, бис-са и медиана $\Rightarrow AH_2 = H_2B = 2 \Rightarrow$ т. H_1 и H_2 совпадают, назовем эту т. H.

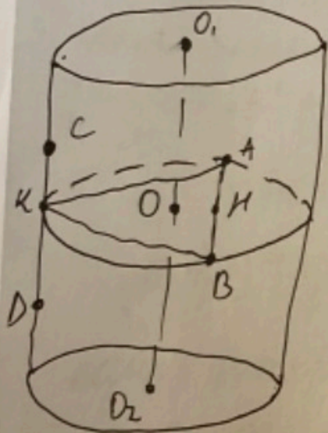
$\triangle HDB$:

По Th Пифагора: $HD = \sqrt{49-4} = \sqrt{45}$

$\triangle ACH$:

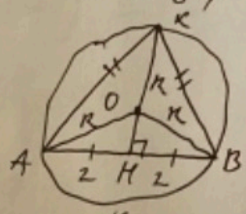
По Th Пифагора: $CH = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

Опустим высоту из т. H на CD ($HK \perp CD$)

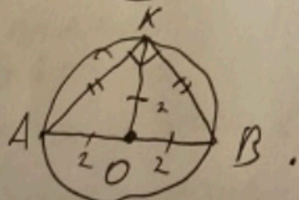


Рассмотрим $\triangle AKB$:

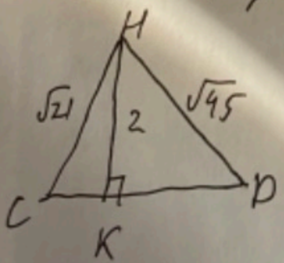
AKB вписан в окружность с R основания цилиндра, $AK = KB$ (из равенства $\triangle KCA$ и $\triangle KCB$ по катету и гипотенузе: CK – общ., $CA = CB = 5$).



Т.к. AKB – р/б, то O лежит на KH.
Из $\triangle AOH$: $R \geq 2 \Rightarrow \min R = 2$, тогда AB – диаметр $\Rightarrow$ т. O и H совпадут, $\angle AKB = 90^\circ$, $\angle KAB = \angle KBA = 45^\circ$, $AH = HB = HK = 2$.



Рассмотрим $\triangle CHD$:



По Th. Пифагора: $CK = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$ и $DK = \sqrt{45-4} = \sqrt{41}$, тогда $CD = CK + KD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Ответ: $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

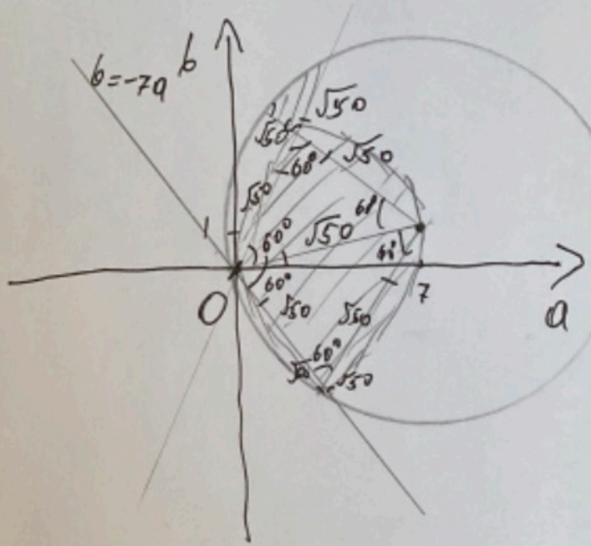
Вариант 22 Чистовик

3.
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50 & \mathrm{I}\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50) & \mathrm{II}.\end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$ – круг с центром в т. $(a;b)$ и $R=5\sqrt2$

$a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)$ – круг с центром $(0;0)$ и $R=\sqrt{\min(14a+2b,50)}$

Рассмотрим II:



если $14a+2b\le 50$

то $a^2+b^2\le 14a+2b$

$$a^2-2\cdot 7a+49+b^2-2b+1\le 50$$

$$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$$

если $14a+2b\ge 50$

$$a^2+b^2\le 50$$

Изобразим прямую:

$14a+2b=0 \Rightarrow b=-7a$

Нам нужны точки $M(x;y)$, такие, что расстояния до них $\le\sqrt{50}$. Заштрихуем искомую фигуру.

Её площадь равна сумме площадей двух секторов радиуса $\sqrt{50}$ и углом 60° и двух секторов $R=2\sqrt{50}$ и углом 120°, здесь площадь ромба посчитана два раза => вычтем одну

$$S=\frac{2\pi\cdot 4\cdot 50}{3}+\frac{2\pi 50}{6}-50\cdot\sin 60^\circ=\frac{400}{3}\pi+\frac{50}{3}\pi-\frac{50\sqrt3}{2}= \quad 3$$

$$=150\pi-25\sqrt3$$

Ответ: $150\pi-25\sqrt3$

1. $S=\sum_{i=1}^{15} a_i$ Черновик

$a_i = a_1 + q(i-1)$, $q>0$

$a_i, a_1, q \in \mathbb{Z}$

$a_7 \cdot a_{16} > S-24$

$a_{11} \cdot a_{12} < S+4$

$a_1 - ?$

$S=\sum_{i=1}^{15} a_i = 15a_1 + \frac{(14+1)\cdot 14}{2} q = 15a_1 + 105q$

$$\left.\begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6q \\ a_{16} = a_1 + 15q \end{array}\right\} a_7 \cdot a_{16} = (a_1+6q)(a_1+15q) = a_1^2 + 21a_1q + 90q^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = a_1 + 10q \\ a_{12} = a_1 + 11q \end{array}\right\} a_{11}a_{12} = (a_1+10q)(a_1+11q) = a_1^2 + 21a_1q + 110q^2$$

$a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 > 15a_1 + 105q - 24$ (1)

$a_1^2 + 21a_1q + 110q^2 < 15a_1 + 105q + 4$ (2)

$a_1^2 + 21a_1q + 110q^2 > a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 > 15a_1 + 105q - 24$

$$+\begin{array}{l} a_1^2 + 21a_1q + 90q^2 - (15a_1 + 105q) + 24 > 0 \\ -(a_1^2 + 21a_1q) - 110q^2 + 15a_1 + 105q + 4 > 0 \end{array}$$

(1)

$-20q^2 + 28 > 0$

$20q^2 < 28$

$q^2 < \frac{28}{20} = \frac{7}{5} = 1{,}2$

$-\sqrt{1{,}2} < q < \sqrt{1{,}2} \Rightarrow q = \{-1, 0, 1\}$, однако по усл. a_i - возр $\Rightarrow q>0$

$\Rightarrow q = 1$

Черновик

3. $S = 15a_1 + 105$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} = a_1^2 + 21a_1 + 90 \\ a_{10} a_{11} = a_1^2 + 21a_1 + 110 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ \end{cases} \quad \boxed{a \neq -3}$$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 1 = 8$

$a_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$ $\quad a \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$

$\sqrt{2} \approx 1{,}41\ldots$

$2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

$$\left.\begin{array}{l} -3-2\sqrt{2} \approx -5{,}1\ldots \\ -3+2\sqrt{2} \approx -0{,}1\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \in (-5-c_1; -c_2), \text{ где } c_1, c_2 \in (0;1)$$

$\Downarrow$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$

Проверка $q = 1$,

$a = -5$:

$25 - 105 + 90 > -75 + 105 - 24$

$10 > 6$ ⊕

$25 - 105 + 110 < -75 + 105 + 4$

$30 < 34$ ⊕

$a = -4$

$16 - 84 + 90 > -60 + 105 - 24$

$22 > 21$ ⊕

$16 - 84 + 110 < -60 + 105 + 4$

$42 < 49$ ⊕

min

$a = -3$

$9 - 63 + 90 > -45 + 105 - 24$

$36 > 36$ ⊖

$a = -2$

$4 - 42 + 90 > -30 + 105 - 24$

$52 > 51$ ⊕

$72 < 79$ ⊕

$a = -1$

$1 - 21 + 90 > -15 + 10$

$70 > 66$ ⊕

$90 < 94$ ⊕

Ответ: $a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$

2

21100628 (U105758 M1300585)

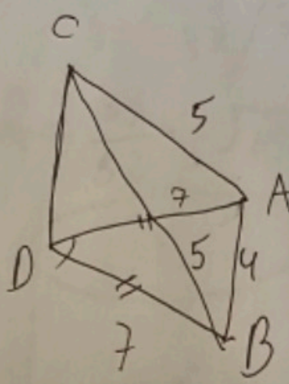
Черновик.

3. $$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b,\ 50) \end{cases}$$

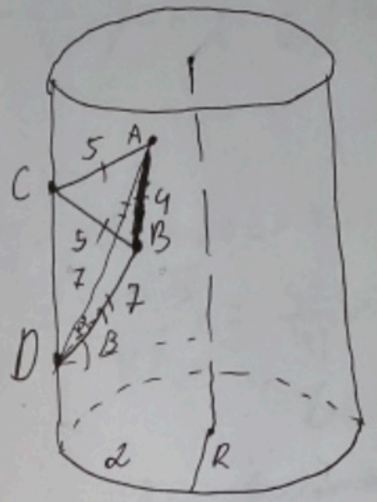
$14a+2b \ge 0$

$b \ge -7a$

2.



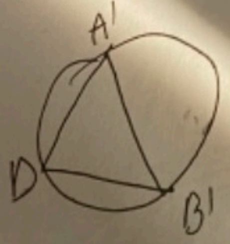
R-min



Проекция $\triangle ABD$ на α будет вписана в окр.
Пусть самая нижняя точка – D, поднимаем основание так, что т. $D \in \alpha$, и изначала на боков.
Проекция ABD на α.

$\cos\angle ADB$: $16 = 2\cdot 49(1-\cos\angle ABD) \Rightarrow$

$\cos\angle ABD = 1 - \frac{8}{49} = \frac{41}{49}$



$A'D = AD\cdot\cos\alpha = 7\cos\alpha = 7a$

3

$B'D = BD\cdot\cos\beta = 7\cos\beta = 7b$

$A'B' = \sqrt{49\left(a^2+b^2-2ab\cdot\frac{41}{49}\right)} = \sqrt{49a^2-82ab+49b^2}$

$S = \frac{1}{2}\,49ab\cdot\frac{41}{49} = \frac{41}{2}ab = \frac{7a\cdot 7b\cdot A'B'}{4R} \Rightarrow$

$R = \frac{49A'B'}{82} \Rightarrow R\min$, если $A'B'$ – min.

$\min\sqrt{49a^2-82ab+49b^2}$

$\frac{-(-82b)}{2\cdot 49} = \frac{41}{49}b$

$\frac{41^2}{49} - \frac{2\cdot 41^2}{49} + 49$

$7\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\frac{41}{49}}$

Черновик

$a^2+b^2-2\cdot\frac{41}{49}ab$

$a=\frac{41}{49}b$

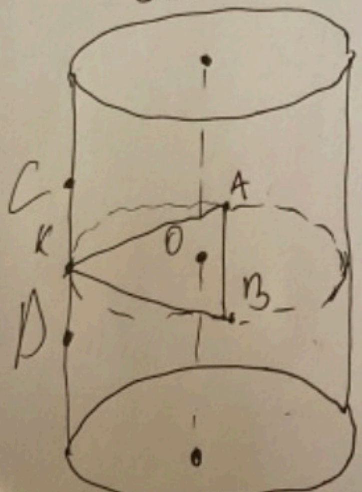
$\frac{41^2}{49^2}b^2+b^2-2\cdot\frac{41^2}{49^2}b^2=b^2\left(1-\frac{41^2}{49^2}\right)=b^2\left(1-\frac{41}{49}\right)\left(1+\frac{41}{49}\right)=$

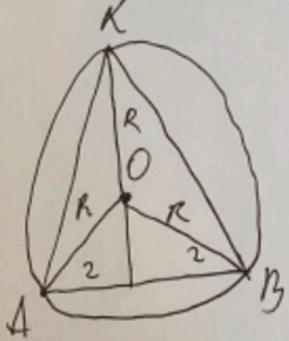
$=b^2\left(\frac{8}{49}\cdot\frac{90}{49}\right)=b^2\frac{720}{49^2}$

$720=9\cdot80=9\cdot4\cdot20=3^2\cdot4^2\cdot5$

$R=\frac{49}{82}\cdot7\sqrt{b^2\frac{720}{49^2}}=\frac{7b\sqrt{720}}{82}=\frac{7\cdot12b\sqrt5}{82}=\frac{42}{41}\sqrt5\,b$

$b\in(0;1]$



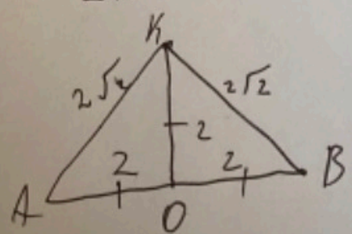


OK - высота.

4

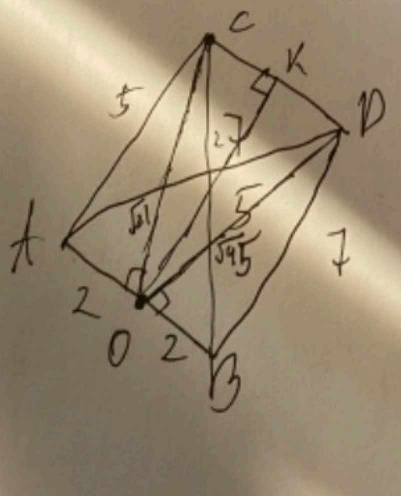
R max, когда AB - диаметр $\Rightarrow R=2$

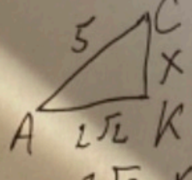
$\angle AKB=90^\circ$



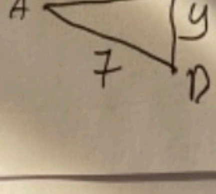
$\sqrt{21-4}=\sqrt{17}$ $+$ $=CD$

$\sqrt{45-4}=\sqrt{41}$





$\Rightarrow x=\sqrt{25-8}=\sqrt{18}=3\sqrt2$

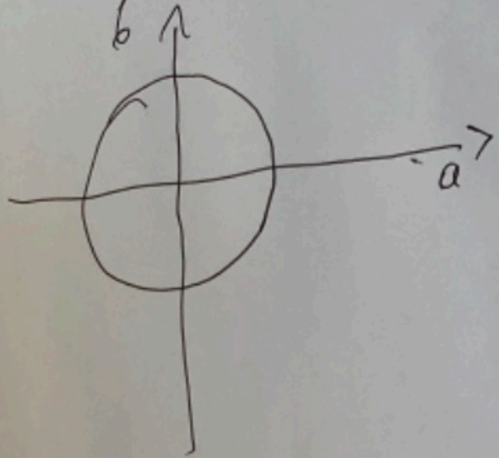


$\Rightarrow y=\sqrt{49-8}=\sqrt{41}$

$CD=3\sqrt2+\sqrt{41}$

Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$



$14a+2b$

5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100628**

ID профиля: **105758**

Вариант 22

Вариант 22 Чистовик

4. $НОД(a;b;c)=2\cdot 7$

$НОК(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}$

Пусть $a=14m$, $b=14n$, $c=14q$, тогда

$НОД(m;n;q)=1$

$НОК(m;n;q)=2^{16}\cdot 2^{17}$

Тогда одно из чисел определяется только степенями двойки от 0 до 16, другое степенями семёрки от 0 до 17, а третье определяется ~~[illegible]~~ максимальными степенями 2 и 7-ки:

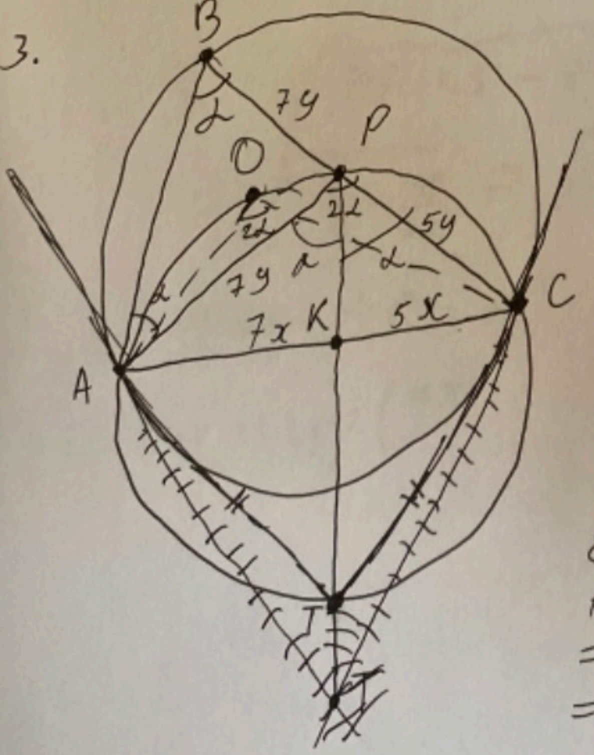
$m=2^p$, $p=\{0,1,2\ldots 16\}$

$n=7^s$, $s=\{0,1,2\ldots 17\}$

$q=2^{16}\cdot 7^{17}$, тогда число m можно выбрать 17 способами, а число n - 18, тогда всего выборок будет $17\cdot 18=306$, с учётом повторов и перестановок их будет $305\cdot 6+3=1833$

Ответ: 1833

3.



а) $S_{APK}=7=\frac{1}{2}h\cdot AK$, $S_{CPK}=5=\frac{1}{2}h\cdot KC$ $\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{7}{5}$

Пусть $\angle ABC=\alpha$, тогда $\angle AOC=2\alpha$. 1

$\angle APC=\angle AOC=2\alpha$ (опир. на дугу $\overset{\smile}{AC}$) $\Rightarrow$

$\angle BPA=180-2\alpha \Rightarrow \angle BAP=180-\angle ABP-\angle BPA=\alpha \Rightarrow$

$\triangle ABP$ - р/б $\Rightarrow BP=AP$.

$OC-R \Rightarrow OC\perp CT \Rightarrow \angle PCT=90^0 \Rightarrow PT$ - диаметр и T лежит на окр.

$AT=TC$ (др. кас. к окр, провед. из 1т.)

$\Rightarrow \angle APT=\angle TPC=\alpha \Rightarrow \angle BAP=\angle APT$ (н.л.у) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB\parallel PK$, по Th. Фалеса $AK:KC=BP:PC \Rightarrow$

$\Rightarrow BP:PC=7:5$, $BP=AP=7y$.

$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{7}{5} \Rightarrow S_{ABP}=\frac{7}{5}S_{APC}=\frac{7}{5}(S_{APK}+S_{CPK})=\frac{7}{5}\cdot 12 \Rightarrow$

Вариант 22 Чистовик

$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = 12 + \frac{7}{5} \cdot 12 = 12\left(1 + \frac{7}{5}\right) = \frac{12^2}{5} = \frac{144}{5}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{144}{5} = 28{,}8$

б) $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$

$S_{APK} = \frac{1}{2} \cdot 7y \cdot 5y \cdot \sin 2\alpha = 12$ $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$

$\frac{35}{2} y^2 \sin 2\alpha = 12$

$y^2 \cdot \frac{24}{25} = \frac{24}{35}$

$y^2 = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

$y = \sqrt{\frac{5}{7}}$

$AC = \sqrt{\cancel{45}y^2 + 25y^2 - 2 \cdot 35y^2 \cos 2\alpha} =$

$= y\sqrt{45 + 25 - 70 \cdot \frac{7}{25}} = y\sqrt{70\left(1 - \frac{7}{25}\right)} = y\sqrt{70\left(\frac{18}{25}\right)} =$

$= \sqrt{\frac{5}{7} \cdot 70 \cdot \frac{18}{25}} = \sqrt{\frac{180}{5}} = \sqrt{36} = 6$

Ответ: $AC = 6$

2. $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(7x\right.$

Черновик

4.

НОД $(a;b;c) = 2 \cdot 7$

НОК $(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

Одно из чисел содержит 2^{17}

Одно из чисел содержит 7^{18}

Каждое из чисел хотя бы $7 \cdot 2$

I. $2^{17} 7$ $\quad 2 \cdot 7^{18}$ $\quad 2^n \cdot 7^m$ $\quad n$ 1..17, m 1..18

$\boxed{17 \cdot 18 \cdot 3}$

II. $2^{17} \cdot 2^{18}$ $\quad 2 \cdot 7^m$ $\quad 2^n \cdot 7^m$

$(m^2 n + n^2 m) \cdot 3$ $\quad 3 \cdot 17 \cdot 18 (17+18)$

$3 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 35$

	I	II	III
2	1	n	17
7	1	m	18

$(16 \cdot 6 + 3) \cdot (17 \cdot 6 + 3) = 99 \cdot 105 =$

$= 10500 - 105 =$

$= \boxed{10395}$

abc
acb
bac
bca
cab
cba

aab
aba
baa

16×6

36
60
96

Ответ: 10395

1

$16 \cdot 17 \cdot 6 + 3$

16×17: 112, 160, 272

$272 \times 6 = 1632$

1635

$305 \times 6 = 1830$

Ответ: 10395

5. Черновик

$$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\quad \log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2,\quad \log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$

$\frac{3x}{2}-6=c$

$\frac{1}{2}\log_a b,\quad 4\log_b c,\quad 2\log_c a$

две равны, ост. < на 1

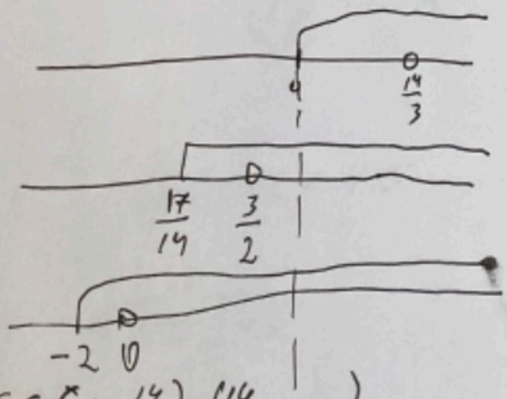
$\log_a b = 8\log_b c$

$\frac{\ln b}{\ln a} = 8\frac{\ln c}{\ln b}$

$\ln^2 b = 8\ln a \ln c$

$2\log_c a = 4\log_b c - 1$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2}-6>0 & x>4 \\ \frac{3x}{2}-6\neq 1 & x\neq \frac{14}{3} \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0 & x>\frac{17}{14} \\ \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1 & x\neq \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2}+1>0 & x>-2 \\ \frac{x}{2}+1\neq 1 & x\neq 0 \end{cases}$$



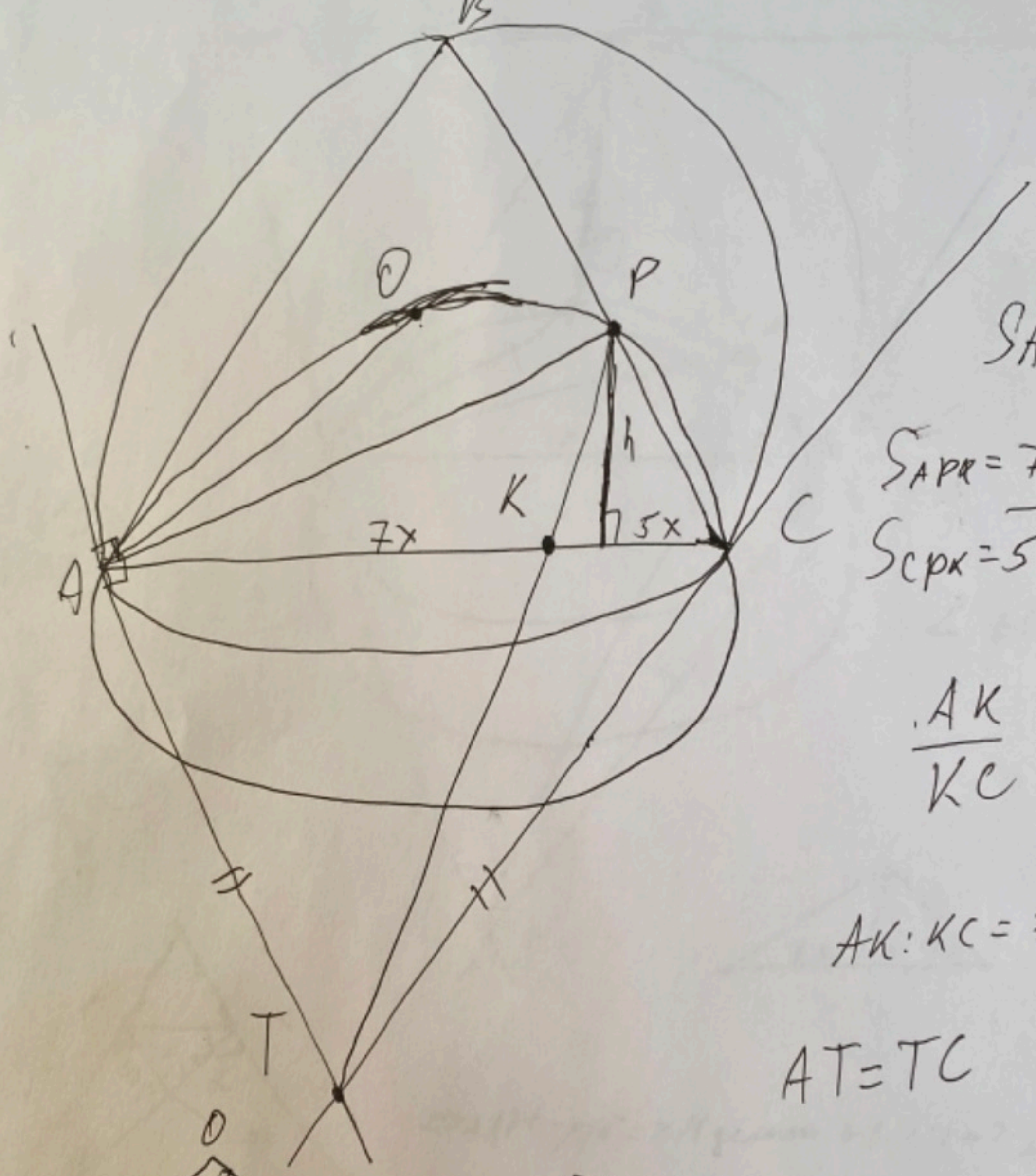
$x\in\left(4;\frac{14}{3}\right)\cup\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$

2

21100628 (U105758 M1300586)

Черновик

6



S_{ABC} – ?

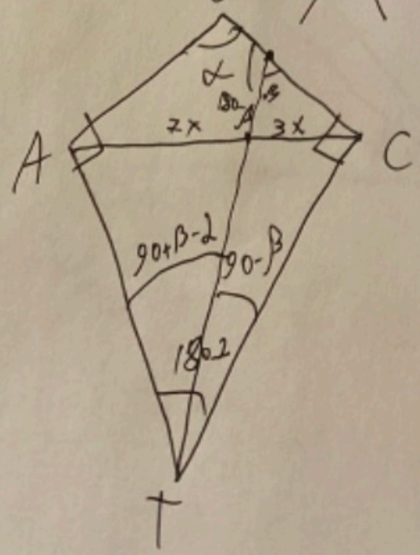
$S_{APK} = 7 = \frac{1}{2} AK \cdot h$

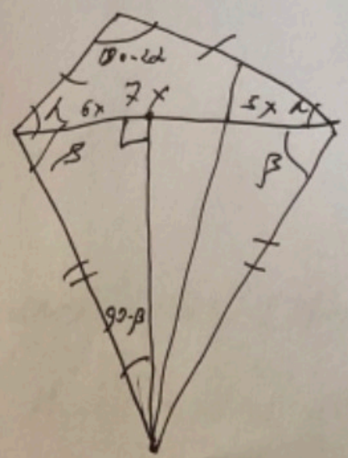
$S_{CPK} = 5 = \frac{1}{2} KC \cdot h$

$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$

$AK : KC = 7 : 5$

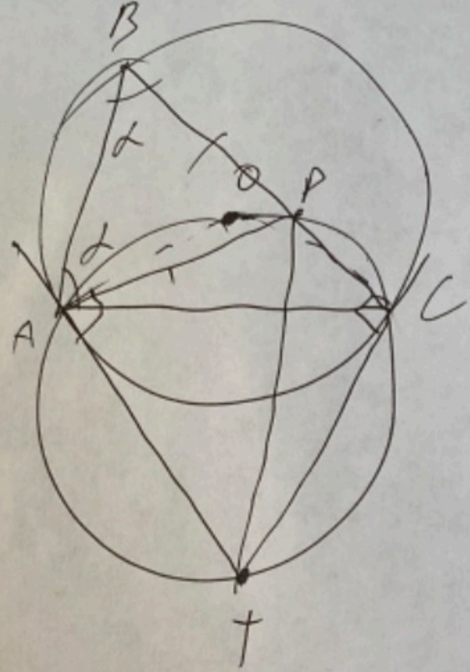
$AT = TC$





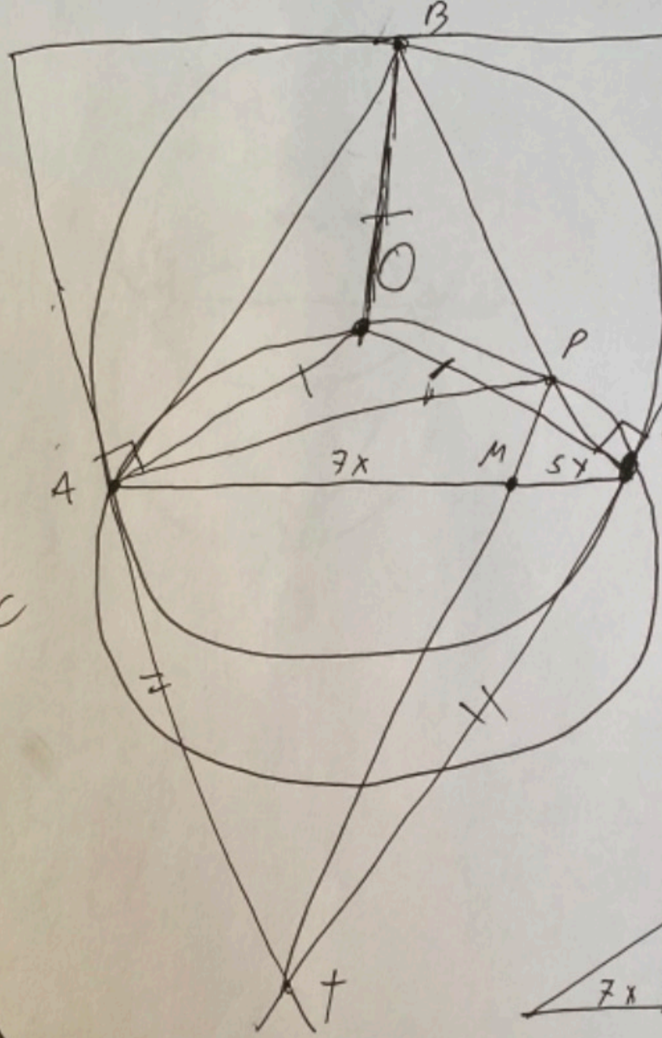
3

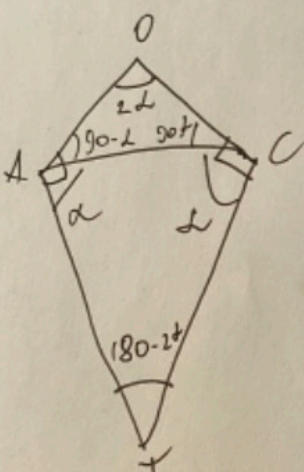
Черновик



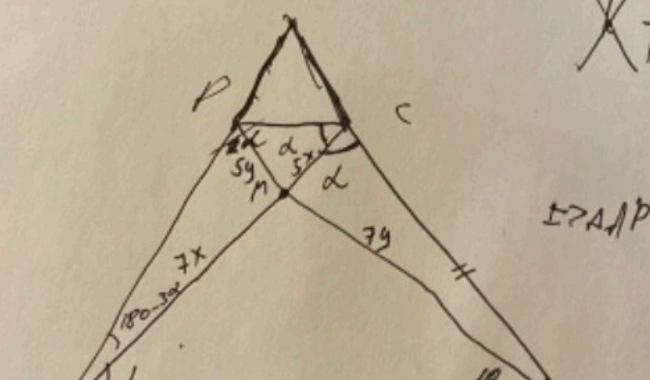
5

Черновик

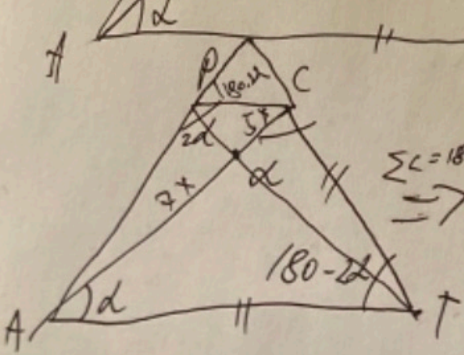




$\angle APC = \angle AOC$



=> ΔAPC - р/б => M делит AC 1:1 => AT ∥ PC



$\Sigma \angle = 180^\circ$ => APCT - можно вписать в окр.

$AM \cdot MC = PM \cdot MT = 35x^2$

4