Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

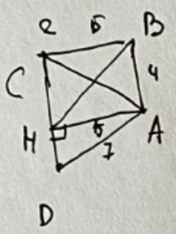
Шифр: **21100614**

ID профиля: **849028**

Вариант 22

Беловик лист 1

Задание 2



1) Проведём высоты AH_1 и BH_2

Докажем, что H_1 и H_2 - совпадают

$\triangle CBD = \triangle CAD$ (т.к. $CB = CA$; $DB = DA$; CD - общ.)

$\Downarrow$

$\frac{CH_1}{H_1D} = \frac{CH_2}{H_2D} \Rightarrow H_1 = H_2 = H$

2) Т.к. $BH \perp CD$; $AH \perp CD \Rightarrow AH$ и $BH \perp$ оси цилиндра, т.к. CD парал. из усл.

3) Т.к. $BH \perp$ оси и $AH \perp$ оси, то $(BHA) \perp$ оси, тогда описанная окр. около $\triangle ABH$ - это окружность, равная основаниям цилиндра $\Rightarrow$

радиус описанной около $\triangle ABH$ равен радиусу основания цилиндра

4) По теореме sin: а) из $\triangle ABH$

$$\frac{AB}{\sin\angle AHB} = 2R$$

$\left.\begin{array}{l} AB = const \\ \sin\angle AHB \in (0;1] \end{array}\right\} \Rightarrow 2R$ - наим., при sin наиб.

$\Downarrow$

$\angle AHB = 90^\circ$

$\Downarrow$

$R = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$

б) из $\triangle BHA$

$HB = HA$, а $\angle BHA = 90^\circ$; $BA = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow BH^2 + HA^2 = BA^2 \Rightarrow$

$BH = \frac{BA}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

5) из $\triangle CDB$ $CH = CB^2 - BH^2 = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$HD = DB^2 - BH^2 = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$

$CD = CH + HD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

Другого расположения быть не может., т.к. ~~[illegible]~~ CD - фиксированная, а при изменении ~~[illegible]~~ мест A и B между собой ничего не изменит-ся.

Ответ: $CD = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

21100614 (U849028 M1298995)

Беловик

лист $\sqrt{2}$

Задание 1 $S = a_1 + a_2 + \ldots a_{15} = 15a_1 + \frac{14 \cdot 15}{2} k = 15a_1 + 105k$

$(a_1+6k)(a_1+15k) = a_1^2 + 21a_1 k + 90k^2 > 15a_1 + 105k - 24$

$(a_1+10k)(a_1+11k) = a_1^2 + 21a_1 k + 110k^2 < 15a_1 + 105k + 4$

$110k^2 - 24 < 90k^2 + 4$

$20k^2 < 28$

$k^2 < \frac{28}{20}$

$|k| < \sqrt{\frac{28}{20}}$ $k > 0 \Rightarrow k = 1$, т.к. прогрессия возрастающая, и сост. из целых чисел

$k=1$

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 81 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \ (1) \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 \in R \setminus \{-3\} \\ a_1 \in (-\infty; -3-2\sqrt{2}) \end{cases}$

(1) $D = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2$

$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

$+ \quad -3-2\sqrt{2} \quad - \quad -3+2\sqrt{2} \quad +$

$\Rightarrow$ $a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3+2\sqrt{2})$

Из системы $\Rightarrow$ $a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3) \cup (-3; -3+2\sqrt{2})$

Ответ: $a_1 \in (-3-2\sqrt{2}; -3) \cup (-3; -3+2\sqrt{2})$

21100614 (U849028 M1298995)

Беловик

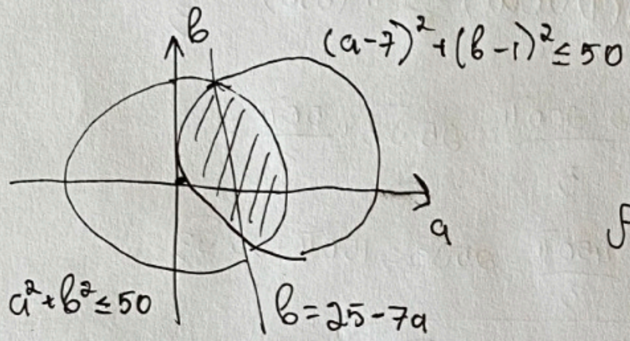
лист №3

Задание 3

$$\begin{cases}(x-a)+(y-b)^2 \le 50\\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b,50)\end{cases}$$

1) $a^2+b^2 \le \min(14a+2b,50)$

$$\left[\begin{array}{l}a^2+b^2 \le 14+2b,\ 14a+2b<50\\ a^2+b^2\le 50;\ 14a+2b \ge 50\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}(a-7)^2+(b-1)^2\le 50;\ b<25-7a\\ a^2+b^2\le 50;\ b\ge 25-7a\end{array}\right.$$



Итак, мы имеем две ω с равными радиусами $r=\sqrt{50}$

ρ между центрами $\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$

равняется r

$\rho=r$

$b=25-7a$

Мн-во точек $(a;b)$, удовлетворяющее условию $a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)$ явл-ся пересечением окр. и указ. штриховкой на графике.

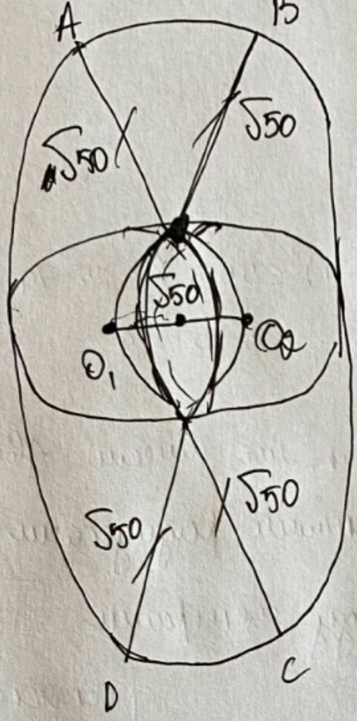
Теперь $(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$ - область внутри окружности с центром в точке (a,b) с радиусом $\sqrt{50}$

Следовательно, нам подойдут все точки из выделенной области и те, что находятся на расстоянии от неё, не превышающее $\sqrt{50}$.

Беловик

лист №4

Задание 3 (продолжение)



$$S = 2\cdot S(B\cup CO_1) - S(O_1MO_2N) + 2\cdot S(O\cup CN)$$

$$S(B\cup CO_1) = \frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{50}\right)^2 = \frac{200\pi}{3}$$

$$S(O_1MO_2N) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{50}\right)^2 = 25\sqrt{3}$$

$$S(O\cup CN) = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{50}\right)^2 = \frac{25\pi}{3}$$

$$S = \frac{2\cdot 200\pi}{3} - 25\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3} =$$

$$= \frac{450\pi}{3} - 25\sqrt{3} = 150\pi - 25\sqrt{3}$$

Ответ: $S_M = 150\pi - 25\sqrt{3}$

Черновик. ~~№~~1

S. $a_1; a_2; a_3 \dots$ x - шаг прогрессии

$a_7 a_{16} > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4$

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + x$

$a_3 = a_1 + 2x$

$S = 15a_1 + \frac{14 \cdot 15 x}{2} = 15a_1 + 105x = S$

Все знач: a_1

$(a_1 + 6x)(a_1 + 15x) > S - 24$

$a_1^2 + 15xa_1 + 6xa_1 + 90x^2 > S - 24$

$(a_1 + 10x)(a_1 + 11x) < S + 4$

$a_1^2 + 11a_1x + 10a_1x + 110x^2 < S + 4$

$t = S - 24 - a^2 - 21a_1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21xa_1 + 90x^2 > S - 24 \quad (1) \\ a_1^2 + 21a_1x + 110x^2 < S + 4 \quad (2) \end{cases}$$

$\cancel{(1)} - (2)$

$\cancel{90x^2 - 110x^2}$

$\cancel{S + 4 > S - 24} \Rightarrow$

$\cancel{a_{11}a_{12} > a_7 a_{16}}$

$\cancel{a_1^2 + 21a_1x + 110x^2 > a_1^2 + 21a_1x + 90x^2}$

$\cancel{110x^2 > 90x^2}$

• ~~$a_7 a_{16}$~~

$110x^2 < S + 4 - a_1^2 - 21a_1x \quad | - 28$

$90x^2 > S - 24 - a_1^2 - 21a_1x$.

$110x^2 - 28 < S - 24 - a_1^2 - 21a_1x = t$

$90x^2 > S - 24 - a_1^2 - 21a_1x = t$

$110x^2 - 28 < t$

$90x^2 > t$

$28 > 20x^2$

$14 > 10x^2$

$7 > 5x^2$

a_1 - цел.

x - цел $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

т.к. прогр. возраст.

$x = 1$

?

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > S - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < S + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 114 > S \\ a_1^2 + 21a_1 + 106 < S \end{cases}$$

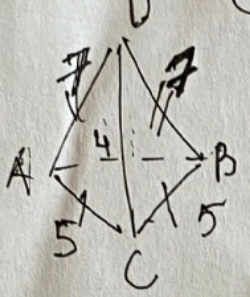
21100614 (U849028 M1298995)

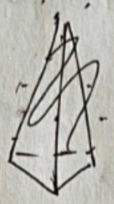
Б2

$AB=4$

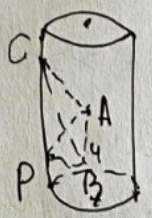
$AC=CB=5$

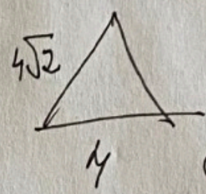
$AD+DB=7$





$DC \parallel OO_1 \Rightarrow DC \in$ образующей.





$r < \sqrt{16\cdot 2+16\cdot 2}$

$AH = BH = x = 4$

$CH = \sqrt{25-16} = 4$

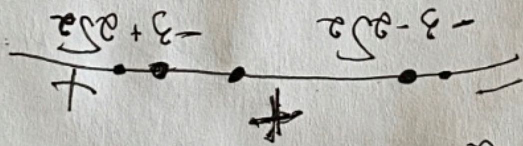
Проведём высоты AH_1 и BH_2.

$\frac{AD}{\sin\angle AHM}$

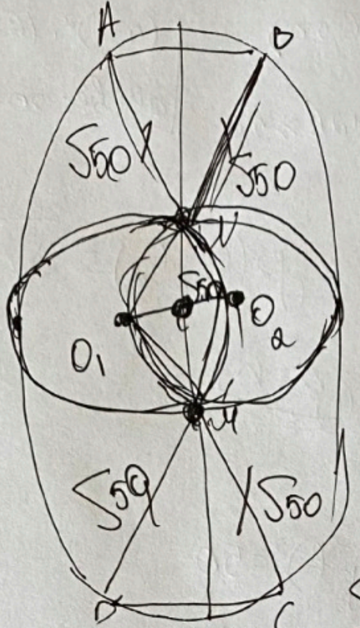
$MD = \sqrt{49-16} =$

$= \sqrt{33}$

$CD = 3+\sqrt{33}$



Черновик Б



$S = 2 \cdot S(B \cup CO_1) - S(O_1 M O_2 N) + 2 \cdot S(D \cup CN)$

$\cancel{8\Delta}$ $S(B \cup CO_1) = \frac{1}{3}\pi (2\sqrt{50})^2 = \frac{200\pi}{3}$

$S(O_1 M O_2 N) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{50})^2 = 25\sqrt{3}$

$S(D \cup CN) = \frac{1}{6} \pi (\sqrt{50})^2 = \frac{25\pi}{3}$

$S = \frac{2 \cdot 200\pi}{3} - 25\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3} =$

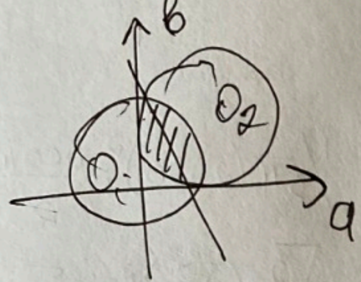
$= \frac{450\pi}{3} - 25\sqrt{3} = \underline{150\pi - 25\sqrt{3}}$

???

Черновик №2

$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \\ a^2+b^2 \le 50;\ 14a+2b \ge 50 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (a-7)^2+(b-1)^2 \le 5;\ b < 25-7a \\ a^2+b^2 \le 50;\ b \ge 25-7a \end{array}\right.$$



$r = \sqrt{50}$

$\rho(O_1; O_2) = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$

$\rho = r$

$b = 25-7a$

$(x-a)^2+(y-b)^2 < 50$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100614**

ID профиля: **849028**

Вариант 22

Беловик

Задание 4

лист Б 1

$$\begin{cases} НОД = 2\cdot 7 \\ НОК = 2^{17}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

$a = 2^{x}\cdot 7^{y}$ $\quad b = 2^{x_2}\cdot 7^{y_2}$ $\quad c = 2^{x_3}\cdot 7^{y_3}$

$17 \geq x_i \geq 1$; $18 \geq y_i \geq 1$

Хотя бы для одного случая $x_i = 1$ и $x_n = 17$; $y_i = 1$ и $y_m = 17$

Для вариантов показателя степени „2": (1)

$3\cdot 2\cdot 15 + 3 + 3$

Т.к. 1) для первого слагаемого мы берем $x_i = 17$; $x_n = 1$ и промежуток значений $2 \leq x_u \leq 16$

2) для 2-ого слагаемого мы берём $x_i = 17$; $x_n = x_u = 1$

3) для 3-его слагаемого мы берём $x_i = 1$; $x_n = x_u = 17$

Аналогично поступаем с показателями степени „7": (2)

$3\cdot 2\cdot 16 + 3 + 3 = 6\cdot 17$

Объединяя (1) и (2) получаем:

$6^2\cdot 4^2\cdot 17 = 9792$

$\boxed{\text{Ответ: } 9792}$

Беловик

Задание 6

лист 2

Дано: $\triangle ABC$ - остроуг.

$\omega(O;R)$

$\omega_1(O_1;r)$ - прох. ч-з т. A, O, C

$\omega_1 \cap BC = P$

касат. к ω перес. в т. T

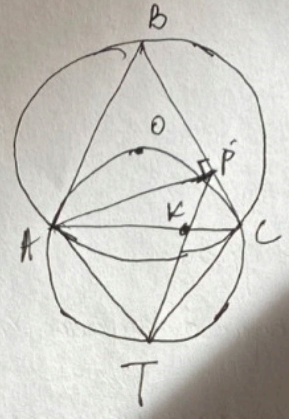
$TP \cap AC = K$

$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

а) Найти: $S_{\triangle ABC}$

б) найти AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$



Реш-е: а) $S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

$S_{APC} = 12$

$S_{APB} = \frac{3x}{2x} \cdot 10 = 15$

$S_{ABC} = 25$

$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC$ - т.к. опир на 1 дугу

$\angle CAT = \angle ACT = \angle ABC$, т.к. касат.

$\angle ATC + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow T \in \omega$

PT - бис-са из вне. $\triangle PCT$

$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{7}{5}$; $BP = AP = 7y$; $PC = 5y$

$\Downarrow$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{12y}{5y} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{BC \cdot S_{\triangle APC}}{PC} = \frac{12^2}{5} = 28{,}8$

Ответ: 28,8

Беловик

лист №3

Задание 6 (продолжение):

Реш-е: б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \beta$

$\sin 2\beta = \frac{24}{25}$

Найти: AC

$\beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{4}{5}$

$S_{APB} = \frac{12^2}{5} - 12 = \frac{7y \cdot 7y \cdot \sin(180 - 2\beta)}{2} = \frac{49y^2}{2} \cdot \frac{24}{25} = 16{,}8 \Rightarrow y^2 = \frac{5}{7}$

Из $\triangle APB$

$\frac{7y}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin 2\beta} \Rightarrow AB = \frac{7y \cdot \frac{24}{25}}{\frac{3}{5}}$

В $\triangle ABC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta = \left(\frac{56y}{5}\right)^2 + 12^2y^2 - \frac{56y \cdot 12y \cdot \frac{4}{5} \cdot 2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{56^2}{5^2} + 12^2 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 56 \cdot 12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$

Ответ: $AC = \sqrt{\frac{56^2}{5^2} + 12^2 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 56 \cdot 12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$

Беловик | лист №4

Задание №5

$a = \frac{x}{2}+1$; $b = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$; $c = \frac{3x}{2} - 6$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2} \left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right) = \log_{a^2} b$

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}}} \left(\frac{3x}{2} - 6\right)^2 = \log_{\sqrt{b}} c^2$

$\log_{\sqrt{\frac{3x}{2} - 6}} \left(\frac{x}{2}+1\right) = \log_{\sqrt{c}} a$

$\begin{cases} \log_{a^2} b = \log_{\sqrt{b}} c^2 = k \\ \log_{\sqrt{c}} a = k-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^{2k} = b = c^2 \\ \sqrt{c}^{(k-1)} = a \end{cases}$ $\begin{cases} a^{2k} = b \\ b^{k/2} = c^2 \\ c^{\frac{k-1}{2}} = a \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} k=5 \\ k=-3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^{-6} = b \\ b^{-1,5} = c^2 \\ -2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} a^{10} = b \\ b^{2,5} = c^2 \\ 2 = a \end{cases} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} \log_{a^2} b = \log_{\sqrt{c}} a = k \\ \log_{\sqrt{b}} c^2 = k-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a^{2k} = b \\ \sqrt{c}^k = a \\ \sqrt{b}^{k-1} = c^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a^{2k} = b \\ c^{k/2} = a \\ b^{\frac{k-1}{2}} = c^2 \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{c} a^4 = b \\ (\sqrt{c})^2 = a \\ c = a \\ a^4 = b \end{array}}$

$\begin{cases} a^{2k} = b \\ c = a^{\frac{2}{k}} \\ a^{2k \cdot \frac{k-1}{4}} = a^{2/k} \end{cases}$

$\frac{k^2-k}{2} = \frac{2}{k} \Rightarrow 4 = k^3 - k^2$.

Подставляем знач.

$\frac{3x}{2} - 6 = \frac{x}{2} + 1$

$x = 2$

$\left(\frac{7}{2}+1\right)^4 = \frac{49}{2} - \frac{17}{4}$ – не подх.

$\cancel{\left(\frac{x}{2}+1\right) = \left(\frac{7x}{2} - \frac{17}{4}\right)}$

$\frac{x}{2} + 1 = \frac{3x}{2} - 6 \,\Big|\cdot 2$

$x + 2 = 3x - 6$

$x = 7$

Ответ: 7

[redacted]

Черновик №2

Задание 5

(1) $\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$; (2) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$; (3) $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

(1):

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{7x}{2}\right)}{\log_{(\frac{x}{2}+1)}\left(\frac{17}{4}\right)} = \frac{\log_{\frac{x}{2}+1}\frac{7x}{2}}{2\log_{\frac{x}{2}+1}\frac{17}{4}}$$

(2):

$$\frac{\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\frac{3x}{2}}{\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}6}$$

(3): $2\log_{\frac{3x}{2}-6}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\log_{\frac{3x}{2}}1$

(3) = 0

1) (1) = (3); (2) − 1 = (1)

2) (2) = (3); (1) − 1 = (2)

3) (1) = (2); (3) − 1 = (1)

Для 1) $\frac{\log_{(\frac{x}{2}+1)}\frac{7x}{2}}{2\log_{(\frac{x}{2}+1)}\frac{17}{4}}=0$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\frac{7x}{2}=0$ П/ш $\frac{7x}{2}=1$

$x=\frac{7}{2}=3,5$

$\cancel{\frac{\log_{\left(\frac{7\cdot 3,5}{2}-\frac{17}{4}\right)}\frac{3\cdot 3,5}{2}}{\log_{\left(\frac{7\cdot 3,5}{2}-\frac{17}{4}\right)}6}}$

$\frac{1}{2}\log_{2,75}\frac{24,5}{2}-\frac{17}{4}=$

$=\frac{1}{2}\log_{2,75}12,25-4,25=$

$=\frac{1}{2}\log_{2,75}8=$

$=\frac{1}{2}\log_{2,75}8$

Черновик

Черновик №1

Задание 4

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 14 \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

$14 = 2 \cdot 7$

$a \vdots 2$ $b \vdots 2$ $c \vdots 2$
$\vdots 7$ $\vdots 7$ $\vdots 7$

$(2^{17} \cdot 7^{18}) \vdots a$
$\vdots b$
$\vdots c$

т.к. НОК состоит из тех же множителей, что и НОД, то следовательно одно из чисел „a", „b" или „c" будет равняться 14-ти.

на случай $a = 14$, то остается, что

2^{16} и 7^{17} распределяется на два числа b и c

$2 \cdot 7$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

2^2 2^3 2^4 2^5 2^6 2^7 ...

15 $2^{16} \cdot 17$

вариантов. на кажд. из случаев 2^{a+1}, что идут попарно с $2^{14} \cdot 7$; $2^{13} \cdot 7^2$ и т.д.

то есть, на каждый из случаев у нас выходит по 15 факторов.

$\boxed{15 \cdot 15 = 225}$

$3 \cdot 66 = 198$

$3 \cdot (30 + 2) = 3 \cdot 32$

$3(32 + 2) = 3 \cdot 34$

36
+ 16
216
36
+ 36
+ 16

Аналогично с ситуациями, когда 14-ти равняется b и c

$225 \cdot 3 = 675$

т.к. в каждом из случаев, у нас учитывается, что 14-ти равняется и b и c то

+ 576
+ 17
4032
576
9792

Задание 6 | Черновик.

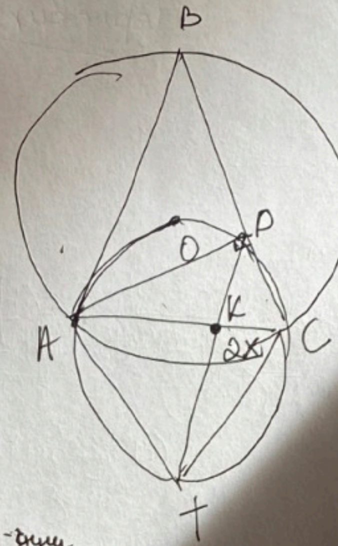
$S_{APK}=7$

$S_{CPK}=5$

$S_{ADC}=12$

$S_{ADB}=\frac{3x}{2x}\cdot 10=15$

$S_{ABC}=25$



$\angle ADC=\angle AOC=2\angle ABC$ т.к. на 1 дугу

$\angle CAT=\angle ACT=\angle ABC$ - т.к. касательные

$\angle ATC+\angle ABC=180 \Rightarrow T\in\omega$

DT - бисс-са из верш. $\triangle DCT$

$\frac{AD}{DC}=\frac{S_{ADK}}{S_{CDK}}=\frac{7}{5}$; $BD=AD=7k$. $DC=5k$

$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{BC\cdot S_{ADC}}{DC}=\frac{12\cdot 12}{5}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BC}{DC}=\frac{12k}{5k}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{12^2}{5}=28,8$

Ответ: 28,8.

б) $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\Rightarrow$ ~~...~~ $\arcsin\frac{3}{5}$ $\arccos\frac{4}{5}$ ~~...~~

$\sin 2\beta=\frac{24}{25}$

По теор. син.:

$\frac{74}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin 2\beta}\Rightarrow AB=\frac{74\cdot\sin 2\beta}{\sin\beta}$