Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100537**

ID профиля: **874419**

Вариант 22

Чистовик B-22 Математика 11 кл.

№1) По условию: $\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ a_{11} a_{12} < S+4 \end{cases}$,

где $S = S_{15}$ – сумма первых 15-ти членов,

т.е $S = (2a_1 + 14d) \cdot \frac{15}{2} = 15(a_1 + 7d)$

Из условия: $\begin{cases} (a_1+6d)\cdot(a_1+15d) > S-24 \\ (a_1+10d)\cdot(a_1+11d) < S+4 \end{cases}$

Сложив, получим:

$S+4-(S-24) > (a_1^2 + 21a_1 d + 110d^2) - (a_1^2 + 21a_1 d + 90d^2) \Rightarrow$

$28 > 20d^2$

Но, т.к d - целое и положительное, то $d = 1$

Подставляем в исходную систему:

$\begin{cases} a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} (a_1+3)^2 > 0 \\ (a_1+3)^2 < 8 \end{cases}$

Тогда: $\begin{cases} a_1 + 3 \neq 0 \\ |a_1+3| < 2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{т.к } (a+3) \text{ - целое}} \begin{cases} a_1 + 3 \neq 0 \\ |a_1+3| \leq 2 \end{cases}$

1

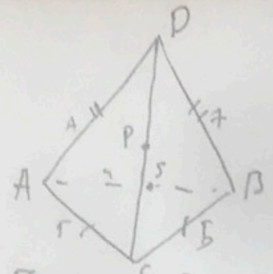
Тогда $|a_1+3| = 1$ или $|a_1+3| = 2$

Ответ: $a_1 = -5$; $a_1 = -1$; $a_1 = -4$; $a_1 = -2$

21100537 (U874419 M1300077)

чистовик В-22 Математика 11 класс

№2)



Дано: $AD = DB = 7$

$AC = CB = 5$

$AB = 4$

1.) Пусть S - середина AB $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ - равнобедр $\Rightarrow$

$SC \perp AB \perp DS \Rightarrow AB \perp DCS \Rightarrow AB \perp DC \Rightarrow AB \perp$ основанию цилиндра

2.) Тогда проекция $A'D'$ на основание цилиндра ребра $AB = AB$.

Т.К. $R = min \Rightarrow A'D' = AB = 2R \Rightarrow R = 2$

3) Из $\triangle ABC$: $CS = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

Из $\triangle ABD$: $DS = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$

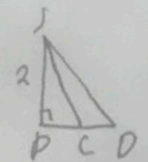
I Тогда:

SP - высота в SCD

$SP = R = 2$

$CD = \sqrt{21-4} + \sqrt{45-4} = \sqrt{17} + \sqrt{41}$

II Или:



Тогда $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$

Ответ: $CD = \sqrt{41} \pm \sqrt{17}$

2

21100537 (U874419 M1300077)

Черновик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 50\\ a^2+b^2\le \min(14a+2b,50)\end{cases}$$

Но если бы

по логике

по условию $AC = DC \Rightarrow AD$ - равнобедр

ABD тоже равнобедр

Черновик

$a_{11} = a_{10} + d$

$a_{11} = x + 10d$

$S_{15} - ?$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24,\ a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$14 \cdot 32 > 420,\ 22 \cdot 24 < 448$

$a_1 - ?$

$a_7 = a_6 + d$

$7x = 6x + d$

$x = d$

$S_{15} = a_1 + a_2 \dots a_{15}$

$a_1 - x$

$a_1 - x \Rightarrow a_2 = a_1 + x \quad a_3 - 3x$

$\boxed{d<0}$

$22 \cdot 24 = 88 + 44 = 528$

$12 \cdot 11 = 12 + 12 = 132$

$11 \cdot 12 = 22 + 11 = 132$

$16 \cdot 7 = 112$

$7x \cdot 16x > S - 24, \quad 11x \cdot 12x < S + 4$

$448 > 420,$

$16 \cdot 7 = 112$

$a_2 = a_1 + d$

$a_2 = x + d$

1 2 3 4 5 6 7

~~$7x \cdot 16x > S - 24$~~

~~$S + 4 < S - 24$~~

~~$11x \cdot 12$~~

$112x > S - 24,\ 132x < S + 4$

$a_3 = x + d + d$

$a_7 \cdot a_{16} > a_{11} \cdot a_{12}$

$a_1 \neq x$

$a_7 \cdot a_{16} > S - 24$

$S + 4 < S - 24$

$S - 24 < S + 4$

$a_7 = x + 6d \quad a_7 \cdot a_{16} > a_{11} \cdot a_{12}$

$a_7 \cdot a_{16} > a_{11} \cdot a_{12}$

$S + 4 < a_{11} \cdot a_{12}$

$S - 28 < S$

$S - S < 28$

$S - 24 = a_{11} \cdot a_{12}$

$S - 24 = a_{11} \cdot a_{12}$

$S < S + 28$

$S = a_{11} \cdot a_{12} + 24$

$S = x$

2 4 6 8 10 12 $\overset{14}{a_{11}} \cdot a_{12} + 24 < S + 28$

$15 \cdot 6 = 90$

$a_1 + d = a_2$

$a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

~~$x + 24 < x - 24$~~

$a_2 - a_1 = d$

$14 \cdot 32 = 28 + 42 = 448$

$a_7 \cdot a_{16} > a_{11} \cdot a_{12} < S + 4$

$a_7 \cdot a_{16} = S + 4$

$14 \cdot 32 = S + 4$

$448 = S + 4$

$S = 444$

$a_7 \cdot a_{16} > a_{11} \cdot a_{12}$

$(x + 6d) \cdot (x + 15d) > (x + 10d) \cdot (x + 11d)$

$x^2 + 15xd + 6dx + 90d^2 > x^2 + 11xd + 10xd + 110d^2$

$\cancel{x^2} + \cancel{21xd} + 90d^2 > \cancel{x^2} + \cancel{21xd} + 110d^2$

$90d^2 > 110d^2$

$d^2 > \frac{11d^2}{9}$

$90d^2 - 110d^2 > 0 \quad d^2 < 0$

$-20d^2 > 0 \quad d < 0$

$20d^2 < 0$

1

21100537 (U874419 M1300077)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100537**

ID профиля: **874419**

Вариант 22

№4)

Дано: $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 2\cdot 7 & (1) \\ НОК(a;b;c) = 2^{17}\cdot 7^{18} & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow$ $a; b; c$ имеют в своем разложении только делители 2 и 7.

Посмотрим на делитель 2.

Пусть 2 в a входит в степени x;
в b входит в степени y;
в c входит в степени z.

Из системы следует, что наименьшее из x, y, z — $\underline{1}$,
наибольшее — 17.

Значит, одно из $x, y, z = 1$,
другое — 17,
третье — от 1 до 17.

Всего троек (x, y, z): $17 \cdot 3! - 6 = 96$

(Выбор 3-его числа) (перестановка троек) Тройки $(1;1;17)$ и $(1;17;17)$ переставляются 3-мя способами.

Теперь рассмотрим делитель 7.
Для него, аналогично, $18 \cdot 3! - 3 - 3 = 102$.
Числа a, b, c задаются полностью однозначно,
Тогда троек a, b, c $96 \cdot 102 = 9792$

3

Ответ: 9792

№5)

$\log\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^2, \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = \log\left((4{,}5)^2, \frac{81}{4}\right) = 1$

$\log\left(\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} ; \left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\right) = \log\left(\sqrt{\frac{81}{4}} ; (4{,}5)^2\right) = 2$

$\log\left(\sqrt{\frac{3x}{2}-6} ; \frac{x}{2}+1\right) = \log\left(\sqrt{4{,}5} ; 4{,}5\right) = 2$

$x = 7$ подходит

2) $\log\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 ; \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right) = 2$

$\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 = \left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)^2$

$\frac{x^2}{4} + x + 1 = \frac{49}{4} \cdot x^2 - \frac{119}{4} \cdot x + \frac{289}{16}$

$x^2 + 4x + 4 = 49x^2 - 119x + \frac{289}{4}$

$48x^2 - 123x + \frac{273}{4} = 0$

$x_1 = \frac{13}{16}$

$x_2 = \frac{7}{4}$

При подстановке этих корней в $\frac{3x}{2}-6$ получим число < 0

Значит они не подходят под ОДЗ $\frac{3x}{2}-6>0$ т.к у нас есть $\log\left(\sqrt{\frac{3x}{2-6}} ; \frac{x}{2}+1\right)$

$x > 4$

Значит есть только 1 корень : $x = 7$

Ответ: $x = 7$

4

Черновик

$\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \times\ 96 \\ \hline 612 \\ +\ 918\ \ \\ \hline 9792 \end{array}$$

$\log_{\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2}\left(\frac{14x-17}{4}\right)$

$10+10+17=27$

$\frac{1}{2}\log_{\left|\frac{x}{2}+1\right|}\left(\frac{14x-17}{4}\right)$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=2\cdot 7 \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{14}\cdot 7^{18} \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow$ a, b, c имеют в своем разложении только делитель 2 и 7 ...

Только тогда и тогда

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 17 \\ \hline 98 \\ +\ 14\ \ \\ \hline 238 \end{array}$$

3