Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100221**

ID профиля: **849406**

Вариант 22

Чистовик

№1.

$S = 15a_1 + \frac{14 \cdot 15}{2} q = 15a_1 + 105q$, где q – шаг арифметической прогрессии.

$a_7 = a_1 + 6q$; $a_{16} = a_1 + 15q$; $a_{11} = a_1 + 10q$; $a_{12} = a_1 + 11q$.

По условию задачи.

$a_7 a_{16} > S - 24 \quad (1)$

$S + 4 > a_{11} a_{12} \quad (2)$

$(1) + (2)$ и вычтем S. Итого: $a_7 a_{16} + 4 > a_{11} a_{12} - 24$.

$$a_1^2 + 21a_1 q + 90q^2 + 4 > a_1^2 + 21qa_1 + 110q^2 - 24$$

$$28 > 20q^2$$

$$1{,}4 = \frac{7}{5} > q^2. \quad (3)$$

Заметим, что $q \in \mathbb{N}$ ($q > 0$ т.к. прогрессия возрастающая и $q \in \mathbb{Z}$, т.к. прогрессия состоит из целых чисел).

Из (3) $|q| \leq \sqrt{1{,}4} < 2$. Значит, $q = 1$ (т.к. $q \in \mathbb{N}$).

Получаем, что $S = 15a_1 + 105$.

$a_7 a_{16} = a_1^2 + 21a_1 + 90 > S - 24 = 15a_1 + 81$

$$a_1^2 + 6a_1 + 9 = (a_1 + 3)^2 > 0.$$

Значит, $a_1 \neq -3$.

$a_{11} a_{12} = a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4$.

$$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0.$$

$$D = 36 - 4 = 32$$

$$a_1 = \frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $a_1 \in (-3 - 2\sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2})$, т.к. старший коэффициент при $a_1^2 > 0$. Получаем, что т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$; $a_1 \neq -3$; $a_1 = -5; -4; -2; -1$

(т.к. $-6 < -3 - 2\sqrt{2}$ $(-3 < -2\sqrt{2}\ (9 > 8))$; $-3 + 2\sqrt{2} < 0$ $(3 > 2\sqrt{2})$).

$-5 > -3 - 2\sqrt{2}$ $\qquad -3 + 2\sqrt{2} > -1$

Ответ: $a_1 = -5; -4; -2; -1$.

1

Чистовик.

№3.

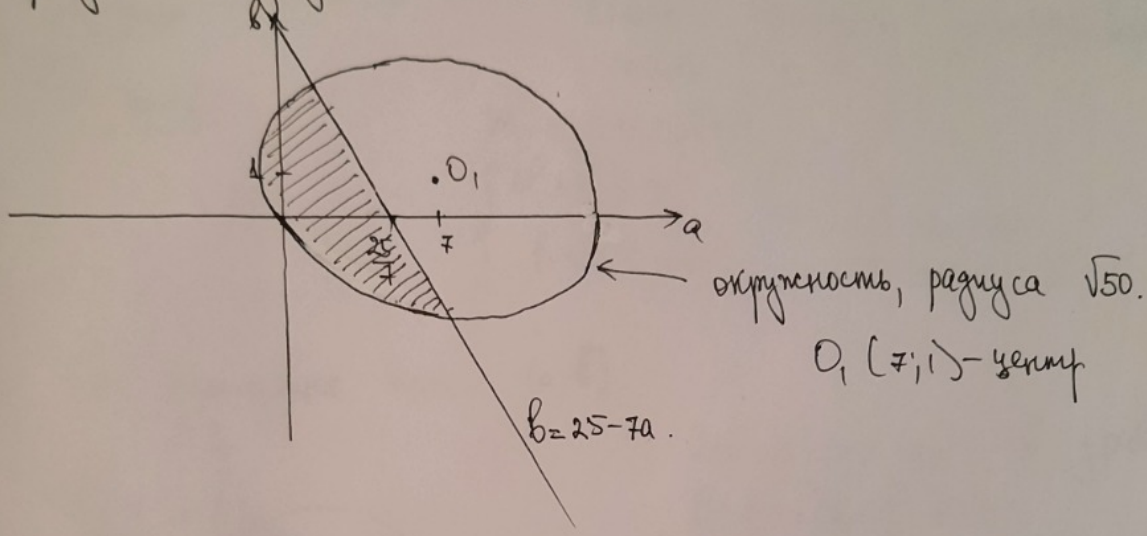
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50). \end{cases}$$

1) $14a+2b<50$. Тогда

$a^2+b^2 \le 14a+2b$

$a^2-14a+49+b^2-2b+1 = (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50.$

Нарисуем подходящие $(a;b)$ на плоскости.



Т.к. $14a+2b<50$, то нам подходит вся часть плоскости, находящаяся ниже прямой $7a+b=50$. Т.к. $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$, то нам подходят точки, находящиеся внутри окружности. Итого в данном пункте нам подходит заштрихованная часть.

т. пересечения прямой и окружности.

$$\begin{cases} (a-7)^2-(b-1)^2=50 \\ 14a+2b=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-14a+b^2-2b=0 \\ b=25-7a \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a^2+25^2+49a^2-50\cdot 7a=50. \\ b=25-7a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=14a+2b=50. \\ b=25-7a \end{cases}$$

$50a^2-50\cdot 7a+25^2-50=0 \quad /:25$

$2a^2-14a+25-2=0.$

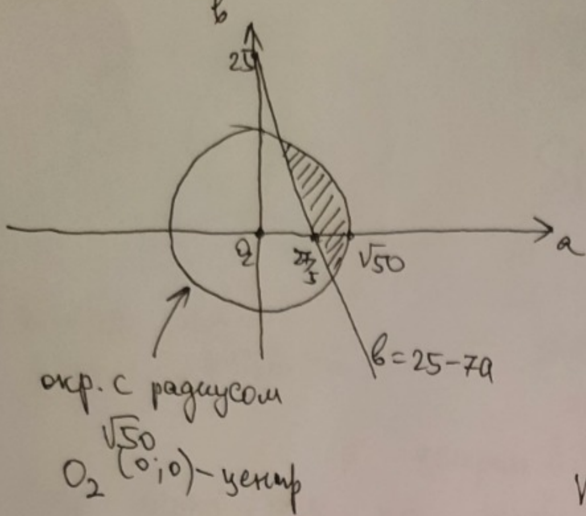
$2a^2-14a+23=0.$

$a=\frac{7\pm\sqrt{3}}{2} \qquad b=25-\frac{7\cdot(7\pm\sqrt{3})}{2}$

Чистовик.

№3. Продолжение.

2) $50 < 14a + 2b$. Тогда $a^2+b^2 \le 50$.



Т.к. $7a+b>25$, то подходит часть плости, находящаяся выше прямой $b=25-7a$.

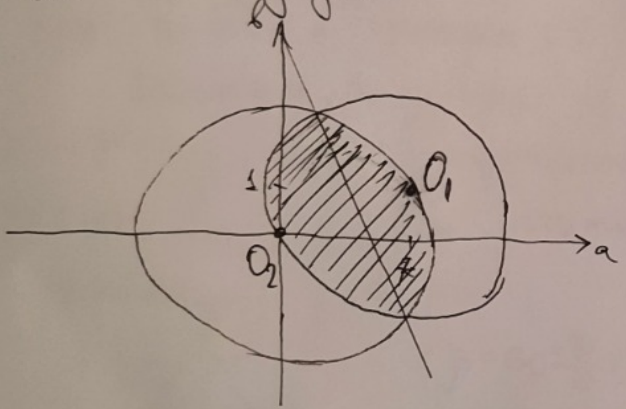
Т.к. $a^2+b^2 \le 50$, то подходят точки, находящиеся внутри окружности.

Итого подходит заштрихованная часть.

т. пересечения.

$$\begin{cases} a^2+b^2=50 \\ b=25-7a \end{cases}$$ ← совпадают с т. пересечения в 1 случае.

Итого все подходящие точки $(a;b)$.



Заметим, что в уравнении $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$

a − координата центра окр по оси x

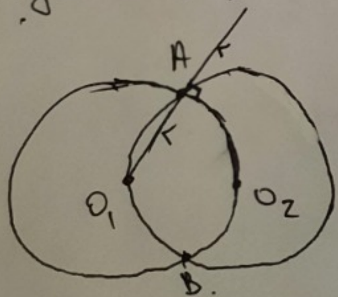
b − координата центра окр. по оси y.

Следовательно, координатные плоскости (xy) и (ab) совпадают. Заштрихованная часть − координаты центров окружностей с радиусами √50, удовлетворяющие условию.

Радиусы окружностей с центрами в O_1 и O_2 (ω_1 и ω_2 соответственно) равны.

Найдем $S(M)$

$S(M) = S$ заштрихованной части + S ободка, шириной √50

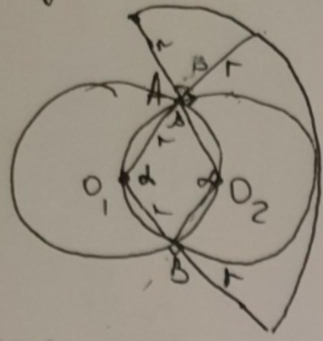


Ободок получается построением точек на расстоянии √50 от каждой граничной точки заштрихованной области.

Пусть A и B − общие точки двух окружностей.

Чистовик.

№3 Продолжение.



Заметим, что данная площадь разбивается на сумму нескольких площадей.

$$S(M)=2(S_1+S_2)-S_{O_1AO_2B}.$$

* видная под углом $\angle AO_1B=\alpha$

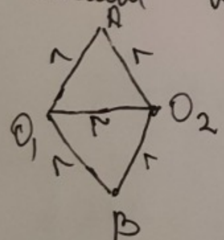
S_1 – площадь сектора окр. γ_1 радиуса $2\sqrt{50}$ и центром в O_1* (т.к. окружности γ_1 и γ_2 одинаковы, то площадь сектора окр. $r=2\sqrt{50}$ с цетром в O_2 и видная под углом $\angle AO_2B$ равна S_1) Это верно, т.к. по условию $O_1\in\omega_2$, $O_2\in\omega_1$, $r_1=r_2=r$, и $\angle AO_1B=\angle AO_2B$ из симметрии так же.

S_2 – площадь сектора окр. γ_3 радиуса $\sqrt{50}$ и цетром в A, видный под углом $\angle O_1AO_2=\beta$. (Аналогично для части с окр. $r_0=\sqrt{50}$ и центром в B).

Заметим, что край γ_1 является краем фигуры M (т.к. радиус окр. $\perp$ окружности).

Также $S_{O_1AO_2B}$ мы считаем дважды. Площадь сектора: αr_0^2
α – угол.

Посчитаем α и β.



$\angle\beta=60°=\frac{\pi}{3}$ (т.к. $O_1A=O_1O_2=O_2A$ (т.к. это все радиусы).)

$\angle\alpha=\frac{360-2\beta}{2}=120°=\frac{2}{3}\pi$

$$S_{O_1AO_2B}=O_1A\cdot AO_2\cdot\sin\beta=\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}\cdot\frac{\sqrt3}{2}=25\sqrt3.$$

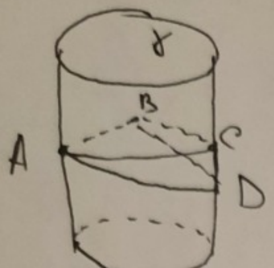
Итого: $S(M)=2\left((2\sqrt{50})^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{3}(\sqrt{50})^2\right)-25\sqrt3=$

$=2\left(\frac{8\cdot50}{3}\pi+\frac{50}{3}\pi\right)-25\sqrt3=\frac{2\cdot50\cdot\pi\cdot\cancel{9}^{3}}{\cancel{3}}-25\sqrt3=300\pi-25\sqrt3.$

Ответ: $S(M)=300\pi-25\sqrt3$.

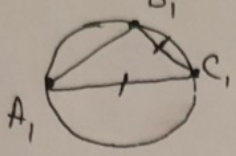
Чистовик.

№2.



γ – плоскость основания цилиндра.

Рассмотрим проекцию тетраэдра на основание цилиндра.

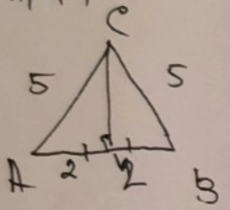


Точки C и D спроектируются в одну точку, т.к. CD ∥ оси цилиндра.

Заметим, что $S_{A_1B_1C_1} = \cos\alpha \, S_{ABC}$

(где $\alpha = \angle(\gamma, (ABC))$).

Т.к. длины всех сторон перейдут Δ в длины сторон $\Delta A_1B_1C_1$ с помощью домножения их на $\cos\alpha$.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{25-4} = 2\sqrt{21}.$$

Заметим, что площадь Δ выражается через R – радиус опис. окр. с помощью формулы $S = \frac{abc}{4R}$

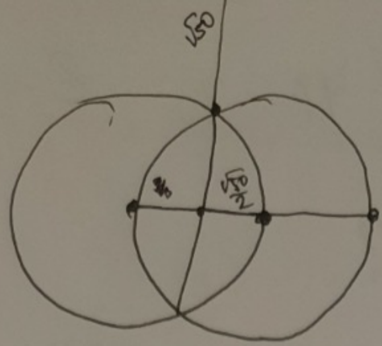
Получаем, что $S(A_1B_1C_1) = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC \cdot \cos^3\alpha}{4R} = \cos\alpha \cdot S(ABC)$.

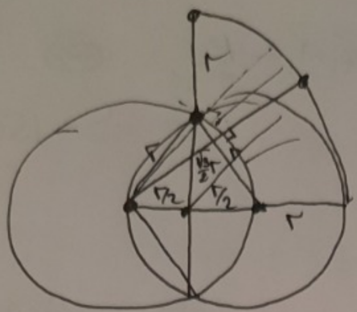
$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC \cdot \cos^2\alpha}{4 \cdot S(ABC)} = \frac{\cancel{4} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos^2\alpha}{\cancel{4} \cdot 2\sqrt{21}} = \frac{25}{2\sqrt{21}} \cos^2\alpha.$$

$\cos\alpha \neq 0$ (т.к. $(ABC) \not\perp \gamma$ (т.к. $CD \perp \gamma$)).

Получаем, что R минимально при $\alpha \to 90°$.

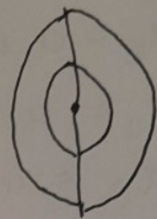
Заметим, что аналогичные рассуждения можно провести для Δ ABD.



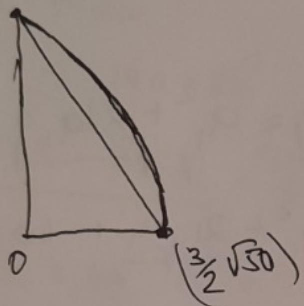


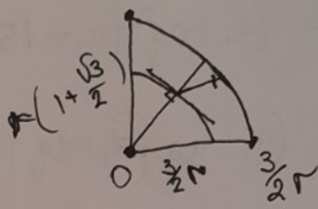
$r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$ и $\frac{3}{2}r$

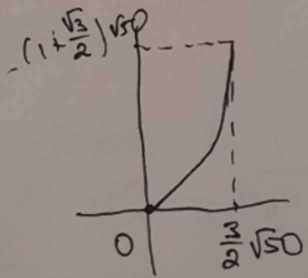
Будет эллипс.



$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{50}$





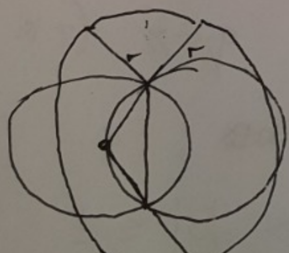


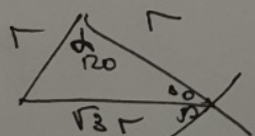
y

$\cancel{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\sqrt{50}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{50} =$

$= \frac{2}{3} \times \cdot 1$





$3\cancel{r^2} = 2\cancel{r^2} - 2\cos\alpha\,\cancel{r^2}$

$1 = -2\cos\alpha$

$-\frac{1}{2} = \cos\alpha$

$\alpha = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$

$50a^2 + \dots$

Черновик

① S – сумма 15 первых членов ар. пр. $\mathbb{Z}$

$a_7 a_{16} > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4$ $\quad a_1 - ?$

$\cancel{S = 15a_1 + \frac{14\cdot 15}{2} q = 15a_1 + 7\cdot 15 q}$ ⊕ $S = 15a_1 + 7\cdot 15q$.

$15 \cdot 7 = 105$

$a_7 = a_1 + 6q$

$a_{16} = a_1 + 15q$

$a_{11} = a_1 + 10q$

$a_{12} = a_1 + 11q$

$15 + 6 = 21$ $\quad 15 \cdot 6 = 90$

$a_7 a_{16} = (a_1+6q)(a_1+15q) = a_1^2 + \underline{21a_1 q} + 90q^2 > 15a_1 + 15q - 24$

$a_{11} a_{12} = (a_1+10q)(a_1+11q) = a_1^2 + \underline{21qa_1} + 110q^2 < 15a_1 + 105q + 4$

$a_1^2 + 21a_1 q + 90q^2 > 15a_1 + 105q - 24.$

$$+\begin{array}{l} a_7 a_{16} > S - 24 \\ S + 4 > a_{11} a_{12} \\ \hline a_7 a_{16} + 4 > a_{11} a_{12} - 24 \end{array}$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 q} + 90q^2 + 4 > \cancel{a_1^2} + \cancel{21qa_1} + 110q^2 - 24$

$28 > 20q^2$

$1\frac{2}{5} = \frac{7}{5} > q^2$ $\quad q \in \mathbb{Z}$ (т.к. посл. из $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow |q| \leq 1.$ $\quad q > 0$ (т.к. возрастающая)

Итого $q = 1$

Значит, $a_7 a_{16} = a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24 = 15a_1 + 81$

$S = 15a_1 + 105$ $\quad 105 - 24 = 81$ $\quad a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$D = 36 - 36 = 0.$ $\quad (a_1+3)^2 \quad a_1 \neq -3$

③ $S(M)$ - ?

$\exists\ a; b.$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\ 50) \end{cases}$$

круг. с центром в $(a;b)$.

$a^2+b^2 \le \min(14a+2b;\ 50)$

1) $14a+2b < 50$

$7a+b < 25.$

$a^2+b^2 \le 14a+2b.$

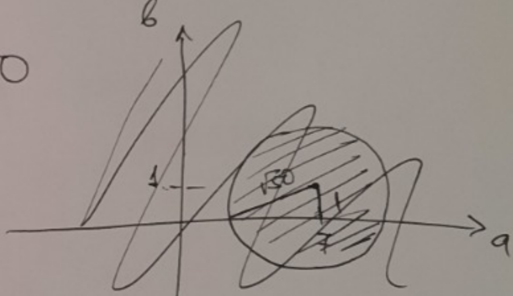
Тогда так.

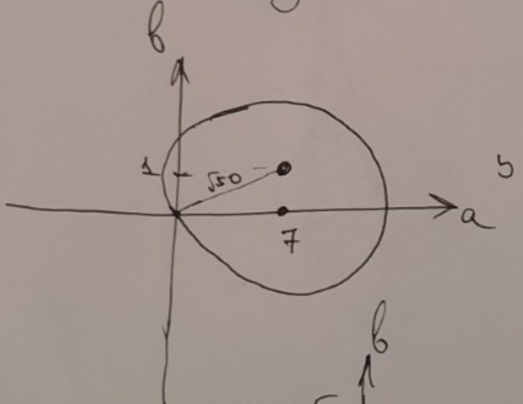
$|a|<14 \quad |b|<2$ ⊕.

$a^2-14a+49+b^2-2b+1$

$(a-7)^2+(b-1)^2 < 50$

возможные А.





$7a+b=25$

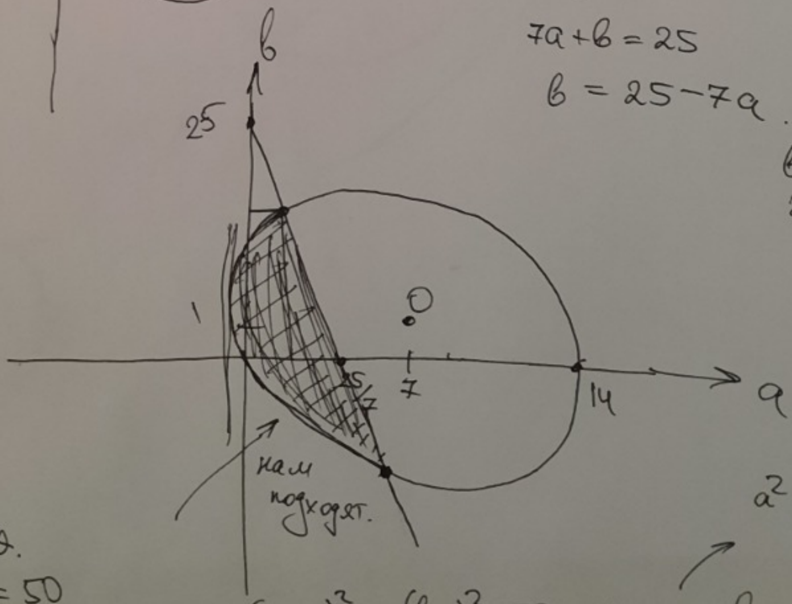
$b=25-7a.$

$b=0$

$25=7a$

$a=\frac{25}{7}$

$3\frac{4}{7}$



$a^2+b^2=50.$

т. пересечения.

$(a-7)^2+(b-1)^2=50$

$14a+2b=50$

$7a+b=25$

$(a-7)^2-(b-1)^2=50.=14a+2b.$

$a^2-14a+49+b^2-2b+1=50$

$a^2 + 25^2 + 49a^2 - 50\cdot 7a = 50.$

$50a^2 - 50\cdot 7a + 25^2 - 50 = 0. \quad /:25$

$2a^2 - 14a + 25 - 2 = 0.$

$2a^2 - 14a + 23 = 0.$

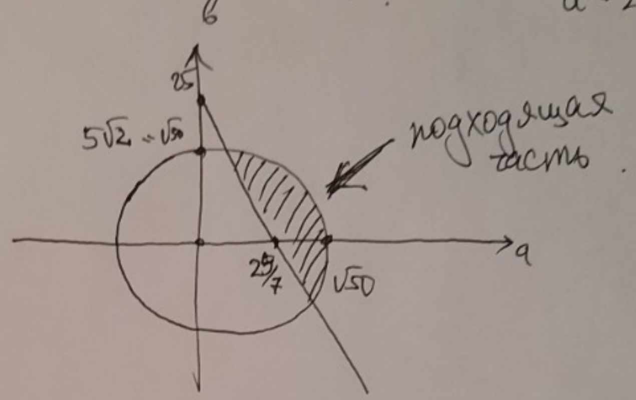
$D/4 = 49 - \underset{46}{23\cdot 2} = 3$

$a = \frac{7 \pm \sqrt{3}}{2}$ ← т. пересечения.

$a^2+b^2=50;$
$b = 25 - 7a.$
$a^2 + 25^2 + 49a^2 - 50\cdot 7a = 50$

2) $50 < 14a + 2b.$

$a^2 + b^2 < 50$



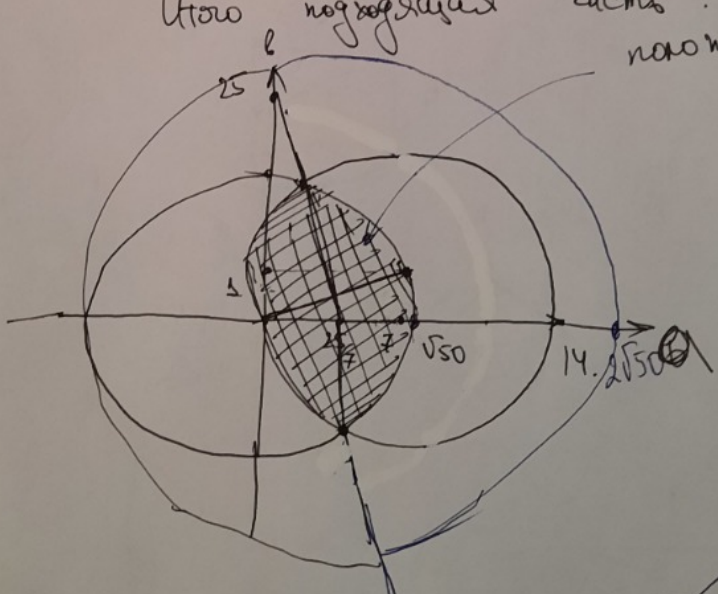
$5\sqrt{2} > \frac{25}{7}$

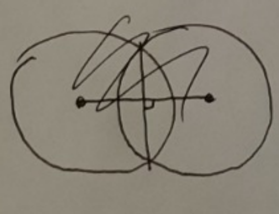
$35\sqrt{2} ? 25$

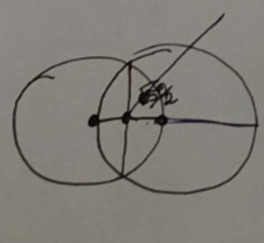
$7\sqrt{2} ? 5$

$>$

Итого подходящая часть:







$r = \frac{3 - \sqrt{50}}{2}$ – ?

8) $\frac{9}{3} = 3$

Черновик.

$-3+2\sqrt{2} < 0$

$2\sqrt{2} < 3$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 109$

$-6 <$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0$

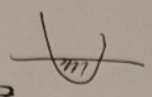
$32/4 = 8$

$-6 \; ? \; -3-2\sqrt{2}$

$D = 36-4 = 32 = 4^2 \cdot 2$

$-3 < -2\sqrt{2}$

$a_1 = -3 \pm 2\sqrt{2}$



$9 > 8$

$\oplus$: $2\sqrt{2} > 1$

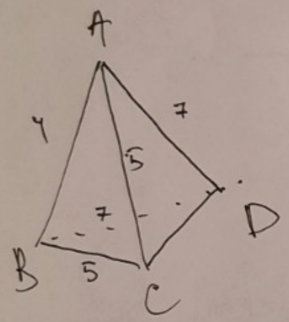
в этом промежутке a $\oplus$.

(2). Тетраэдр $ABCD$ $AB=4$ $AC=CB=5$

$AD=DB=7$.

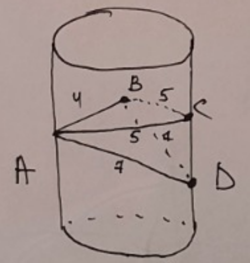
r – min.

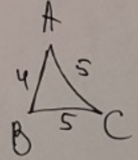
CD-?



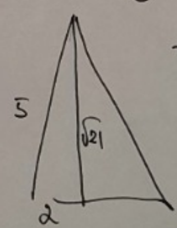
все вершины на боковой пов.

$CD \parallel$ оси цилиндра.



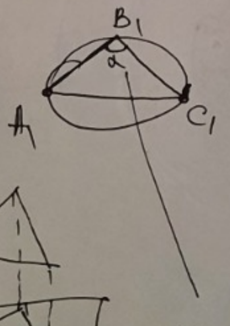


$S = 4\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21} = 2\sqrt{21}$

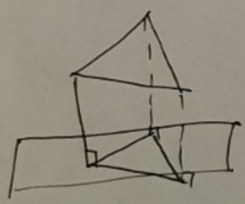


$25-4=21$

Проекция на основание



$2R = \frac{A_1C_1}{\sin\alpha}$



угол не меняется (?)

$\cos\alpha \cdot a$

$\cos\alpha \neq 0$

$S_1 = S\cdot\cos\alpha$

$S = \frac{abc_1}{4R}$

$S\cos\alpha = \frac{\cos^3\alpha \cdot abc}{4R}$

$R = \frac{\cos^2\alpha\, abc}{S}$.

21100221 (U849406 M1296547)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100221**

ID профиля: **849406**

Вариант 22

№4.

Чистовик.

Т.к. НОД$(a;b;c) = 14$, то все числа $\vdots 2$ и на 7

Т.к. НОК$(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$, числа $a;b;c$ не делятся на любое простое число, не равное 2 или 7. То есть.

$a = 2^{k_1} \cdot 7^{p_1}$; $b = 2^{k_2} \cdot 7^{p_2}$; $c = 2^{k_3} \cdot 7^{p_3}$; $k_i; p_i \in \mathbb{N}$

Заметим, что $\max(k_1;k_2;k_3) = 17$ (иначе бы вхождение 2 в НОК было бы иным). Аналогично $\max(p_1;p_2;p_3) = 18$.

Кол-во способов выбрать оставшиеся k_2' и k_3' (если $k_1' = 17$) равно 17^2 (каждое из k_2' и k_3' может быть от 1 до 17). Кол-во способов выбрать p_2' и p_3' (если $p_1' = 18$) равно 18^2 (каждое из p_2' и p_3' может быть от 1 до 18).

Итого выбрать k_2'; k_3'; p_2' и p_3' равно:

$17^2 \cdot 18^2 = 289 \cdot 324 = 93636$. Что равно кол-ву способов выбрать $k_1;k_2;k_3;p_1;p_2;p_3$.

Заметим теперь, что для каждой группы $(k_1;k_2;k_3;p_1;p_2;p_3)$ Существует: $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 6^2 = 36$ вариантов троек $a;b;c$.

(k_1 – степень 2 у $a;b;c$ – 3 вар.; k_2 – степень 2 у $a;b;c$, но не у того числа, у кого степень k_1 – 2 вар. k_3 определяется однозначно. Так же для p_i).

Итого вариантов $= 17^2 \cdot 18^2 \cdot 6^2 = 93636 \cdot 36 = 3370896$.

Ответ: $(17 \cdot 18 \cdot 6)^2 = 3370896$

21100221 (U849406 M1296548)

Чистовик.

N5.

ОДЗ:

$\frac{x}{2}+1>0$ $\quad$ $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0$ $\quad$ $\frac{3x}{2}-6>0$ $\quad$ Итого:

$x>-2$ $\quad$ $x>\frac{17}{14}$ $\quad$ $x>4$ $\quad$ $x>4;\ x\neq \frac{14}{3}$.

$\frac{x}{2}+1\neq 1$ $\quad$ $\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1$ $\quad$ $\frac{3x}{2}-6\neq 1$

$x\neq 0$ $\quad$ $x\neq \frac{3}{2}$ $\quad$ $x\neq \frac{14}{3}$

Пусть $\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}=u$; $\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=v$; $\frac{x}{2}+1=\omega$.

Наши числа имеют вид: $\log_{\omega^2}u^2=\log_\omega u$; $\log_u v^4=4\log_u v$; $\log_u\omega$

1) $\log_\omega u=\log_v\omega$ $\quad /\cdot\log_v\omega$ $\quad$; $4\log_u v=\log_v\omega-1$

$\log_v\omega\cdot\log_\omega u=\log_v u=(\log_v\omega)^2$

$v^{\log_v u}=u=(v^{\log_v\omega})^2=\omega^2 \quad /^2$

$u^2=\omega^4$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=\left(\frac{x}{2}+1\right)^4=\frac{x^4}{2^4}+4\frac{x^3}{2^3}+6\frac{x^2}{2^2}+4\frac{x}{2}+1$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=\frac{x^4}{2^4}+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}+2x+1$

$\frac{x^4}{2^4}+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{2}+\frac{4-7}{2}x+\frac{4+17}{4}=0$

$x^4+8x^3+24x^2+24x+84=0$.

Заметим, что в данном случае условие задачи аналогично

$$\begin{cases}\log_v u=(\log_v\omega)^2\\ \frac{4}{\log_v u}=\log_v\omega-1\end{cases}$$

Пусть $\log_v u=t$; $\log_v\omega=p$.

Тогда
$$\begin{cases}t=p^2\\ \frac{4}{t}=p-1\end{cases}$$

$\frac{4}{p^2}=p-1$

$4=p^3-p^2$; $p^3-p^2-4=0$. $\quad$ $p=2$ – корень

$p^3-p^2-4=(p-2)(p^2+p+2)=0$.

$D=1-8<0$. Корней нет.

№5 Продолжение.

Чистовик.

1) Получаем, что. $p=2$; $\log_v w=2$

$w=v^2$

$\frac{x}{2}+1=\frac{3x}{2}-6$

$7=x$

2). $\log_w u = 4\log_u v$. $/\cdot \log_u v$

$\log_w u \cdot \log_u v = \log_w v = (2\log_u v)^2$.

$\log_v w = \log_w u - 1 = 4\log_u v - 1$

Итого: $\begin{cases} \log_w v = 4(\log_u v)^2 \\ \frac{1}{\log_w v} = 4\log_u v - 1 \end{cases}$

Пусть $\log_w v = t$; $\log_u v = p$.

Тогда: $\begin{cases} t = 4p^2 \\ \frac{1}{t} = 4p-1 \end{cases}$

$\frac{1}{4p^2} = 4p-1$

$1 = 16p^3-4p^2$; $16p^3-4p^2-1=0$. $p=\frac{1}{2}$ – корень

$16p^3-4p^2-1=(2p-1)(8p^2+2p+1)=0$

$D=4-32<0$ – корней нет.

Значит, $p=\frac{1}{2}$.

$\log_u v=\frac{1}{2}$. $v=\sqrt{u}$ $/^2$

$v^2=u$

$\frac{3x}{2}-6=\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}$ $/^2$.

$\frac{9}{4}x^2+36-18x=\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}$ $/\cdot 4$.

$9x^2-(18\cdot4+14)x+36\cdot4+17 = 9x^2-86x+161=0$.

$D=20^2$ $x=\frac{43\pm20}{9}$; $x_1=7$; $x_2=\frac{23}{9}$ (но $x_2=\frac{23}{9}<4$. Не подходит по ОДЗ).

21100221 (U849406 M1296548)

Чистовик.

N5. Продолжение.

3) $4\log_u v = \log_v w$ $/\cdot \log_u v$

$4(\log_u v)^2 = \log_u v \cdot \log_v w = \log_u w.$

$\log_w u = 4\log_u v - 1.$

Итого: $\begin{cases} (2\log_u v)^2 = \log_u w \\ \frac{1}{\log_u w} = 4\log_u v - 1 \end{cases}$

Пусть $\log_u v = p$; $\log_u w = t$

Тогда

$\begin{cases} 4p^2 = t \\ \frac{1}{t} = 4p - 1 \end{cases}$

$\frac{1}{4p^2} = 4p - 1$

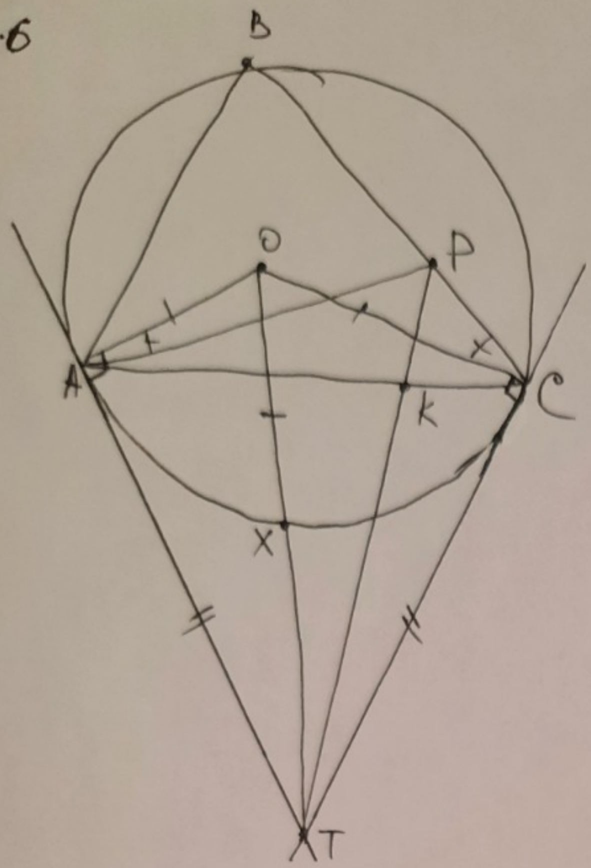
$16p^3 - 4p - 1 = 0$ | Аналогично пункту 2. $p = \frac{1}{2}$; других корней нет).

$\log_u v = p = \frac{1}{2}$. Аналогично 2 пункту $x = 7$.

Ответ: $x = 7$.

Чистовик

N.6



$AT = TC$ (т.к. AT и TC – касательные)

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ (т.к. O – центр окр.; AT, TC – касательные)

Заметим, что точки AOPCT лежат на одной окружности.

(Пусть $\angle ABC = \beta$, тогда $\angle AOC = 2\beta$ (т.к. это центральный угол, опирающийся на ту же дугу)

$\angle ATC = \dfrac{\breve{ABC} - \breve{AC}}{2} = 180 - 2\beta$.

Итого $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow AOCT$ – вписанный

т.к. AOPC также впис $\Rightarrow$ AOPCT лежат на одной окружности)

OT – диаметр этой окружности

$\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{AKP}}{S_{PKC}} = \dfrac{7}{5}$. Пусть $AK = 7x$; $KC = 5x$.

$\deg K = AK \cdot KC = KP \cdot KT = 35x^2$

$S_{ABC} = S_{APK} + S_{PKC} + S_{BPA}$.

Пусть $(OT) \cup \omega = X$. Тогда $XT(XT + 2R) = AT^2$ (R – радиус ω)

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \dfrac{BH}{PH_1} = \dfrac{BC}{PC}$ BH – высота $\triangle ABC$

PH_1 – высота $\triangle APC$.

21100221 (U849406 M1296548)

Черновик

(4) $(a; b; c)$ – кол-во троек.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 14. \\ НОК(a;b;c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

$a = 2^{k_1} \cdot 7^{p_1}$

$b = 2^{k_2} \cdot 7^{p_2}$

$c = 2^{k_3} \cdot 7^{p_3}$

$\max(k_1; k_2; k_3) = 17$

$\max(p_1; p_2; p_3) = 18$

выбрать

НУО. 17 — k_1; $1 \to 18$ — 16 ва

$16 \cdot 16 \leftarrow$ вар. выбрать k_2 и k_3

$17 \cdot 17 \leftarrow$ вар выбрать p_2 и p_3

$k_3 \leftarrow p_2$

k_1, $k_{2?1}$, $k_{2?6}$

$\cancel{16^2 \cdot 17^2} \leftarrow$ ~~кол~~

$17^2 \cdot 18^2$. Кол-во вар выбрать $k_2; k_3; p_2; p_3$.

Кол-во вар распределить

~~$\cdot \frac{3 \cdot 2}{2}$ $\cdot \frac{3 \cdot 2}{2}$ между a, b, c.~~

$\cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$

$\uparrow$ выбрать k_2 букву $a; b; c$

$\uparrow$ 6^2. $2^2 \cdot 3^2$

$256 \cdot 289 \cdot 36$.

$18 \times 18 = 144 + 18 = 324$

289×324: 1156, 578, 867, $= 93636$

93636×36: 561816, 280908, $= 3370896$

256×289: 2304, 2048, 512, $= 73984$

73984×36: 443904, 221952, $= 2663424$

$14+2$

$7+6$

$=$

13

Черновик

$9\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 > \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}.$

$36 \cdot 4 = 144$

$9\left(\frac{x^2}{4}+4-2x\right) > \frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \quad / \cdot 4.$

$\cancel{36x^2}$

$9x^2+144-72x > 14x-17$

$144 + 17 = 161$

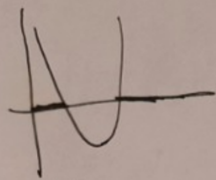
$9x^2-86x+161>0.$

$43 \cdot 43 = 1849 \qquad 161 \cdot 9 = 1449$

$\frac{D}{4} = 20^2.$

$1849 - 1449 = 400$

$x = \frac{43 \pm 20}{9}$ → $\frac{63}{9} = 7$ → $\frac{23}{9}.$



x не принадлежит этому участку.

$\log_w v = (2\log_u v^2)^2$

$\log_u v = a$

$4a^2 = \log_w v$

$\log_w v = (2\log_u v)^2$

$\left((v)^a\right)^{4a} = w$, $(v)^a = u$

$u = v^a$

$w = v^{4a^2} = \left((v^a)^a\right)^2 = (u^a)^2$

$\log_w v = \frac{1}{\log_v w} \qquad \log_u v = \frac{1}{\log_v w}$

$\frac{1}{\log_v w} = \frac{4}{(\log_v w)^2}$

$(\log_v w)^2 = 4\log_v w$

$\left(u^{\log_v w}\right)^{\log_u w} = \left(v^{\log_v w}\right)^4.$

$\log_u w = 4.$

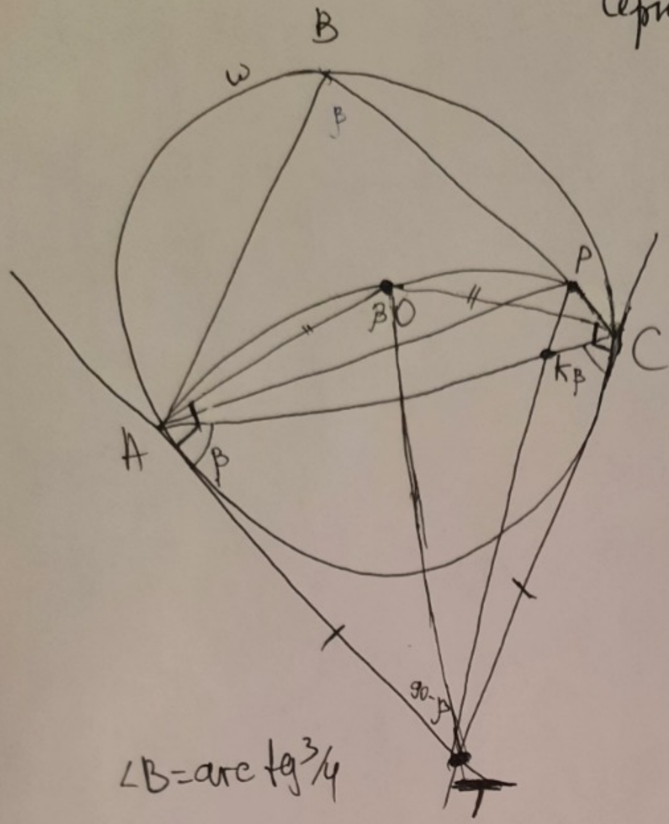
$w = u^4$

$\frac{3x}{2} \qquad 21 \cdot 4 = 84 \qquad \frac{21}{4}$

$\frac{x}{2} + 1 = \left(\frac{7}{2}x - \frac{17}{4}\right)$

⑥

Черновик. кас к ω

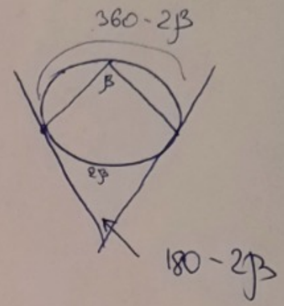


ТI

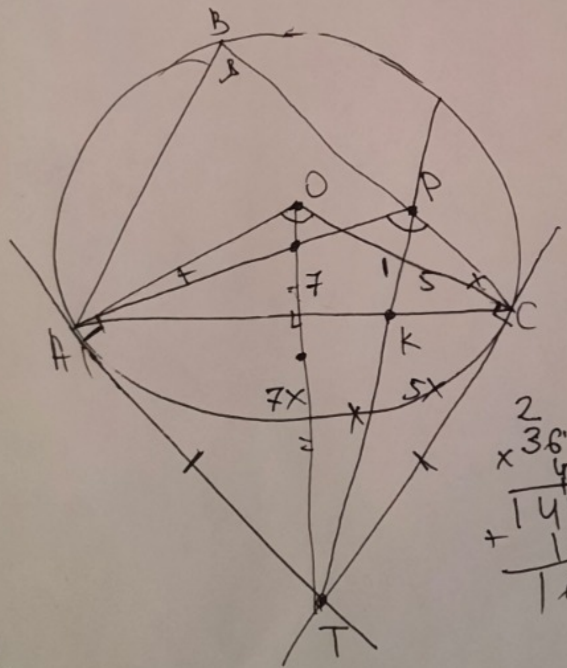
$S_{APK} = 7$

$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} - ?$



$\angle B = \mathrm{arc\,tg}\, 3/4$



$\frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$

$\angle APC = \angle AOC = 2\beta$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \\ +\ 17 \\ \hline 161 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ \times\ 4 \\ \hline 72 \\ +\ 14 \\ \hline 86 \end{array}$$

$\frac{AK}{KP} = \frac{KT}{KC}$

$\frac{1}{2}$ $\quad 2 - 1 - 1$

$\frac{3 \cdot \cancel{6}\ 3}{\cancel{2}} = 9$

$$\begin{array}{l|l} 16p^3 - 4p^2 - 1 & 2p - 1 \\ \underline{16p^2 - 8p} & 8p^2 + 2p + 1 \\ \quad 4p^2 - 1 & \\ \quad \underline{4p^2 - 2p} & \\ \quad\quad 2p - 1 & \end{array}$$

$4 \cdot (\log_4 v)^2 = \log_4 v \cdot \log_4 w = \log_4 w$

$4p^2 = t$

⑤ Черновик

$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$ $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$

$\shortparallel$

$\log_{(\frac{x}{2}+1)}\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}$

x – ?

Двое равны, а третье <1

$\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}} = u$

$\sqrt{\frac{3x}{2}-6} = v$

$\frac{x}{2}+1 = w$

$\log_w u$; $\log_u v^4$; $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right) =$

$4\log_u v$ $= \cancel{\log_w} \quad \log_v w$

1) $\log_w u = \log_v w \quad / \cdot \log_v w \quad \log_a b = \log_a c \cdot \log_c b$

$\log_v w \cdot \log_w u = \log_v u = (\log_v w)^2$

$u = w$

Тогда $\log_w u = 1 = \log_v w$

$\Rightarrow 4\log_u v = 4$ $\ominus$.

2) $\log_w u = 4\log_u v \quad / \cdot \log_u v$

$\log_w u \log_u v = \log_w v = (2\log_u v)^2 > 1.$ $\quad \log_v w = \frac{1}{\log_w v}$

$\log_w v = 4\log_u^2 v$

$\log_u^2 v > \frac{1}{4}$

$\log_u v > \frac{1}{2}$

$v > \sqrt{u}$ $\quad /^2$ (т.к. $v; u > 0$.

$v^2 > u$

$\frac{3x}{2} - 6 > \sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}$

$\frac{x}{2}+1>0$

$x>-2$

ОДЗ $x \neq 0$.

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}>0$

$\downarrow$

$\frac{7x}{2} > \frac{17}{4}$

$x > \frac{17}{14}$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} \neq 1$

$(14x - 17 \neq 4$

$14x \neq 21$

$x \neq \frac{3}{2})$

$\frac{3x}{2} - 6 \neq 1$

$3x - 12 \neq 2$

$3x \neq 14$

$x \neq \frac{14}{3}$

$\frac{3x}{2} - 6 > 0$

$\frac{x}{2} - 2 > 0$

$x > 4$

Итого: $x \neq \frac{14}{3}; \frac{3}{2}; 0$

$x > 4$.

$16 - 64 + 96 - \cancel{24}\ 48 + 84$ Черновик

$\times \frac{24}{4}$, 96

$\log_w u \cdot \log_u v = \log_w v = \log_w w \cdot \log_u v = \log_u w$

$\log_w v = \frac{1}{\log_w u}$

если 4.

$2^8 - 2^9 + 3 2^3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \ /$

$4 - 16$

$6 - 64$

$2^6 - 2^7 + 3 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 7$

~~64 − 32 +~~

$-64 + 3 \cdot 32 \underbrace{- \cancel{3} \cdot 12 + 21}_{+9}$ $-$

$-\frac{21}{12}$, 9

$\times \frac{32}{3}$, 96

$4 \log_u v + 1 = 4 \log_u v u = \log_w u$

~~$4 \log_u v = \log_w \frac{u}{w}$~~

$\log_u v^4 = \log_w \frac{u}{w} \quad / \cdot \log_v w$

$\log_v w \cdot \log_w \frac{u}{w} = \log_v \frac{u}{w}$

$4 \log_u v \cdot \log_v w = 4 \log_u w$

$$\begin{cases} \log_v u = (\log_v w)^2 \\ \frac{4}{\log_v u} = \log_v w - 1 \end{cases}$$

$t = p^2$

$\frac{4}{t} = p - 1$

$$\begin{array}{l|l} p^3 - p^2 - 4 & p - 2 \\ \cline{2-2} -\ p^3 - 2p^2 & p^2 + p + 2 \\ \hline p^2 - 4 & \\ -\ p^2 - 2p & \\ \hline 2p - 4p & \end{array}$$

$D = 1 -$

21100221 (U849406 M1296548)