Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100139**

ID профиля: **255690**

Вариант 22

№ 1 **Чистовик №1**

Пусть a_1 – первый член
q – разность арифм прогр. $(q>0)$

Т.к. арифм. прогрессия имеет целые члены, то
a_1 и $q \in \mathbb{Z}$.

Тогда: $S = 15a_1 + \frac{14\cdot 15}{2}q = 15a_1 + 105q$

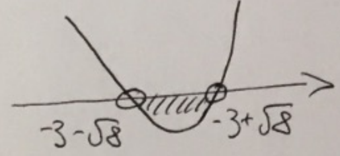
$a_7a_{16} = (a_1+6q)(a_1+15q) = a^2+21qa_1+90q^2$
$a_{11}a_{12} = (a_1+10q)(a_1+11q) = a^2+21qa_1+110q^2$
$a_{11}a_{12} - a_7a_6 = 20q^2$

$S-24 < a_7a_{16}$
$a_{11}a_{12} < S+4$

Тогда $S-24+20q^2 < a_7a_{16}+20q^2 = a_{11}a_{12} < S+4$
$S-24+20q^2 < S+4$
$20q^2 < 28$
$q^2 < \frac{28}{20}$
$q^2 < 1,4$, но при этом $q\in\mathbb{Z}$ и больше 0,
тогда $q=1$.

$\begin{cases} -24+15a_1+105 < a_1^2+21a_1+90 \\ 15a_1+105+4 > a_1^2+21a_1+110 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}$

$(a_1+3)^2>0 \Rightarrow a\in(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$
$a_1+6a+1<0$: $D=36-4=32$, $a_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{32}}{2} = -3\pm\sqrt{8}$; $3>\sqrt{8}>2$, тогда пусть $\sqrt{8}=2+\varphi$ $(0<\varphi<1)$



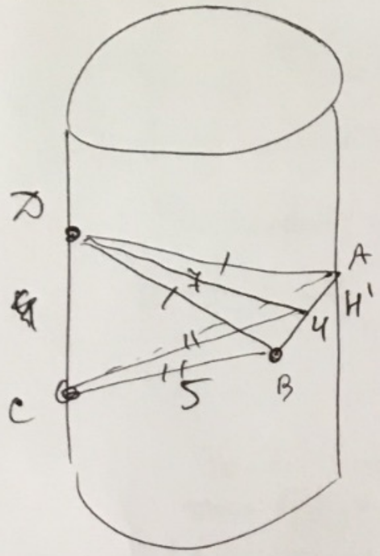
Тк $a_1\in\mathbb{Z}$, то $a_1\in(-5-\varphi;-1+\varphi)$
При условии $a\in\mathbb{Z}$: $a_1\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$

Тк у нас $a\notin\{-3\}$ из первого выражение, то
$a_1\in\{-5;-4;-2;-1\}$

Ответ: $a_1\in\{-5;-4;-2;-1\}$

Чистовик №3

№2



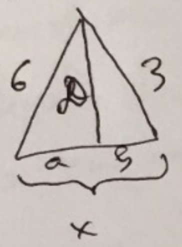
Радиус цилиндра наименьший при $\frac{AB}{2} = \frac{4}{2}$ = радиусу, тк $AC = CB$ и $AD = DB$, то $AB \perp CD$, тогда min R это $\frac{AB}{2}$.

Тогда найдем CD:

$DH' = \sqrt{49-16} = \sqrt{36} = 6$

$CH' = \sqrt{25-16} = 3$

Тогда



$D = 4$

$x = a + b$

$a = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$

$b = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

$x = \sqrt{20} + \sqrt{5}$

№3

Чистовик №2

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 50 & ① \\ a^2+b^2\leq \min(14a+2b,50) & ②\end{cases}$$

Рассмотрим 2 выражение и распишем 2 случая.

$a^2+b^2\leq 50$ и $a^2+b^2\leq 14a+2b$

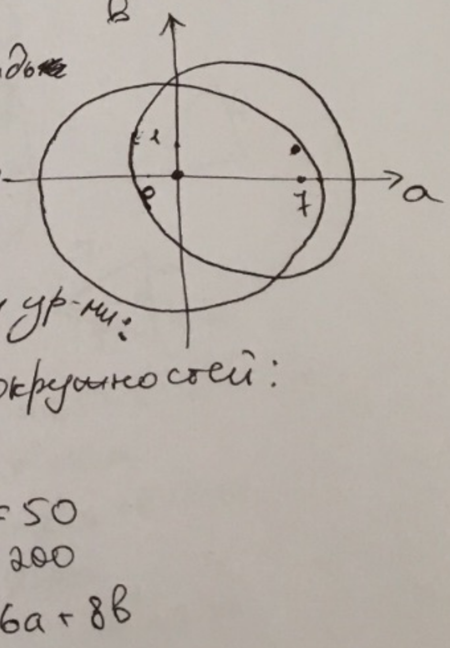
$a^2-14a+49+b^2-2b+1\leq 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\leq 50$

Тогда нам подходят точки $(a$ и $b)$ такие, что они будут пересечениями тех двух графиков окружностей с радиусом $\sqrt{50}$ и центрами в точках $(0;0)$ и $(7;1)$

Площадью M будет площадь всех точек, расстояние от которых до пересечения окружностей будет $\leq\sqrt{50}$ (из 1 ур-ие)

Тогда искомой площадью M является площадь пересечения двух окружностей с теми же центрами, но радиусом большим на $\sqrt{50}$, т.е. в 2 раза большим. ~~Те перес~~ Ур-ие этих окружностей будет задаваться следующими ур-ми:



$$\begin{cases}a^2+b^2\leq(2\sqrt{50})^2 \\ (a-7)^2+(b-1)^2\leq(2\sqrt{50})^2\end{cases}$$

Найдем т. пересечения окружностей:

$a^2+b^2=(a-7)^2+(b-1)^2$

~~$a=3,5$~~

~~$b=0,5$~~

$$\begin{cases}14a+2b=50 \\ a^2+b^2=200\end{cases}$$

$a^2+b^2=56a+8b$

$a=56,\ b=8$

~~$a=0,\ b=8$~~

~~$b=0 \quad a=8$~~

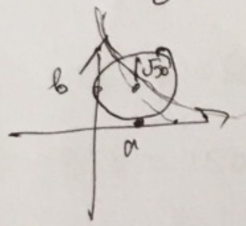
21100139 (U255690 M1302596)

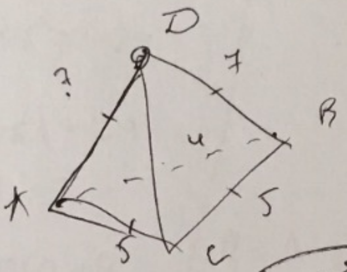
Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+b; 50) \end{cases}$$

$x^2+y^2+2xa-2yb+a^2+b^2 \le 50$

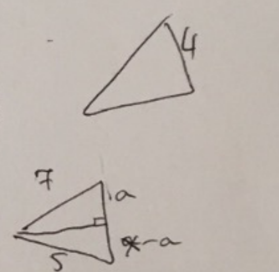
$50-x^2-y^2-2xa-2yb \le \min(14a+b; 50)$

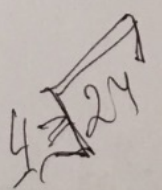




$49-a^2=25-a^2-x^2+2xa$

$x^2-2xa+24=0$





$49-a^2=25-x^2-a^2+2xa.$

$24=-x^2+2xa$

$x^2-2xa+24=0.$

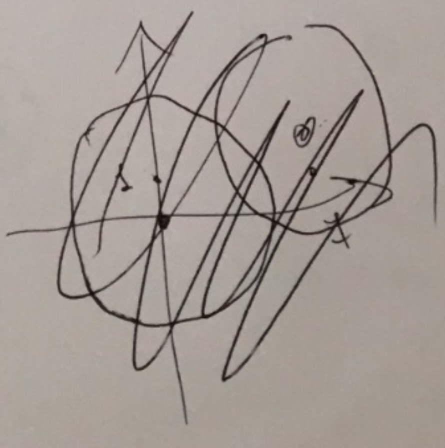
$D \ge 0$

$4a^2-4\cdot 24$

$a^2-24 \ge 0$

$a \ge |\sqrt{24}|$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(xa+yb)+a^2+b^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$



21100139 (U255690 M1302596)

Черновик.

S - сумма 15 Тарогр.

$a_7 \cdot a_{16} > S-24$

$a_{11} a_{12} < S+4 \qquad a_1 - ?$

Сумма первых 15 гл: $15a_1 + 15 \cdot 7q$

$15a_1 + 105q$

$(a_1+6q)(a_1+15q) > 15a_1 + 105q - 24$

$\star\ a_1^2 + 21a_1q + 90q > 15a_1 + 105q - 24$

$(a_1+10q)(a_1+11q) < 15a_1 + 105q + 4$

$a_1^2 + 21a_1q + 110q < 15a_1 + 105q + 4$

$S-24 < \dots$

$\dots + 20q \leq S+4$

$S < \dots + 24 + 20q < S+4$

$q \geq 1$

$S-24 < p_1$

$S-24+20q < p_1+20q < S+4$

$S-24+20q < S+4$

$S+20q < S+28$

$20q < 28$

$q=1$

$(1)\ \left[\begin{array}{l} a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+81 \\ a_1^2+6a_1+9 > 0 \end{array}\right. \qquad D=0$

-3

$a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+109$

$a_1^2+6a_1+1 < 0.$

$D = 36-4 = 32$

$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = \left[-3 \pm \sqrt{8}\right.$

$3 > \sqrt{8} > 2$

$a < 0$

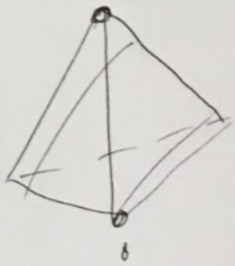
$-3-\sqrt{8} \qquad -3+\sqrt{8}$

$-5,\dots \qquad -0,\dots$

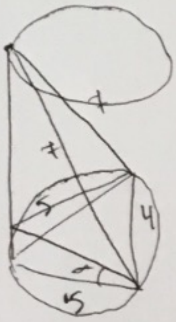
$-5, 4, 3, 2, 1$

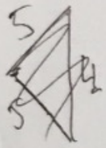
21100139 (U255690 M1302596)

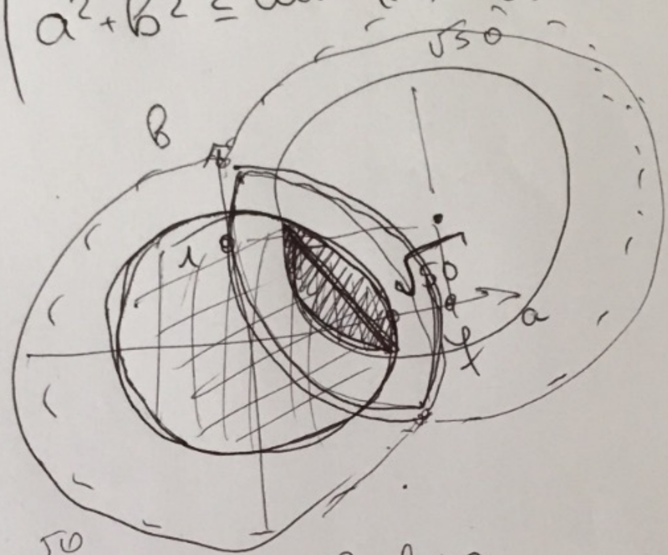
Черновик



$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b;50) \end{cases}$$







$\frac{50}{14}-7$ $\frac{50}{14}$

$a^2-14a+b^2-2b\le 0$

$a(a-14)$

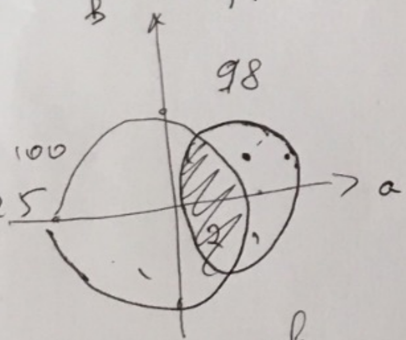
$a^2-14a+49+b^2-2b+1\le 50$

$(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$

98

121 100

4 25



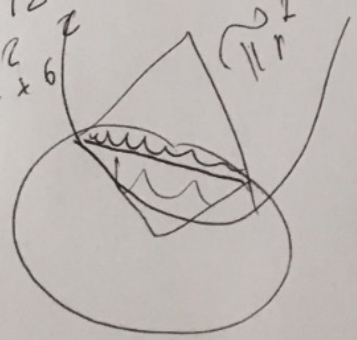
$a+b$

2 11

1 18

18^2 17^2+6

$18^2-17^2=35$



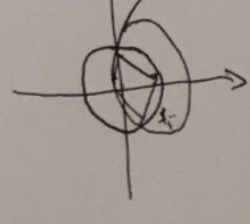
$\alpha_1 \dots$

$S_1-S_2 \to$ answer.

$S_1=\frac{1}{2}R^2(\alpha_1-\sin\alpha_1)$

$S_2=\frac{1}{2}R^2(\alpha_2-\sin\alpha_2)$

$R^2(\alpha_1-\sin\alpha_1)$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100139**

ID профиля: **255690**

Вариант 22

№ 5   В-22   Чистовик №1

Пусть $\frac{x}{2}+1=a$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}=b$

$\frac{3x}{2}-6=c$, тогда даны 3 лог.:

$\frac{1}{2}\log_a b$, $2\log_b c$, $2\log_c a$

Заметим, что их произведение всегда представимо, как $x\cdot x\cdot(x-1)$, либо:

$4\log_a b\log_b c\log_c a$, что равно

$4\log_a a=4$

Тогда $x^3-x^2-4=0$.

$x_1=2\mapsto(x-2)x^2+x^2-4=0$

$(x-2)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$: $D=1-8<0$

Тогда существует только $x=2$, но он является посторонним, т.к. при $x=2$ $\frac{3x}{2}-6=-3<0$, что значит, что он не входит в ОДЗ

Тогда $x\in\varnothing$

Ответ: $x\in\varnothing$

21100139 (U255690 M1302597)

№4 В-22

Чистовик №2

$НОД(a,b,c) = 14$

$НОК(a,b,c) = 2^{17} \cdot 7^{18}$

Тогда все числа представимы в виде $2^i \cdot 7^j$ $i, j \in \mathbb{Z}$

При этом, пусть $n_1 = 2^{i_1} 7^{j_1}$, тогда одно из $i = 1$,
$n_2 = 2^{i_2} 7^{j_2}$ другое 17,
$n_3 = 2^{i_3} 7^{j_3}$ третье любое (от 1 до 17)

$\langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ ← набор (a, b, c) неупорядоченный

а одно из $j = 1$,
другое 18,
третье — любое (от 1 до 18)

Для выполнения условий про НОК и НОД.

Тогда пусть $i_3 \in [1; 17]$

$j_3 \in [1; 18]$. Заметим, что мы можем менять множители у чисел (одинаковые и все) (7^a и 7^b)

Тогда вариантов $17 \cdot 18 \cdot 36$ где $36 \to 6_1 \cdot 6_2$

6_1 — кол-во вариантов создать число

6_2 — кол-во упорядоченных комбинаций

Теперь рассмотрим случай, когда $i_3 = i_1$ или i_2
и $j_3 = j_1$ или j_2
Тогда повторится $4 \cdot 6$ случаев
а таких ситуаций 4.
тогда $4 \cdot 6 \cdot 4$

Если только $i_3 = i_2$ или i_1 или $j_3 = j_1$ или j_2
таких ситуаций 6, каждый повтор вычитает 6 вариантов, а повторов будет 17 и 18 (зависит от степени j или i)

Тогда кол-во подходящих вариантов:

$17 \cdot 18 \cdot 36 - 17 \cdot 36 - 18 \cdot 36 + 1 =$ ← случай, когда все равны т.к. мы вычитаем 2 раза

$= 16 \cdot 17 \cdot 36$

Ответ: $16 \cdot 17 \cdot 36$

Черновик

$\frac{1}{2}\log_a b \quad 4\log_b c \quad 2\log_c a$

$a = \frac{x}{2} + 1$

$b = \frac{7x}{2} - \frac{17}{4}$

$c = \frac{3x}{2} - 6.$

$\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a$

$\frac{1}{2}\log_a b = 2\frac{1}{\log_a c}$

$\log_a b \cdot \log_a c = 4$

НОД = 14

НОК = $2^{17} \cdot 7^{18}$

$2^{17} \quad 7^{18} \quad 2^1 \quad 7^1$

$\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 + }$

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 16$ *

$a \cdot a^{(a-1)}$

$a^3 - a^2$

$2^{17} \quad 2^1 \quad 2^{1-17-1}$

$7^{18} \quad 7^1 \quad 7^{1\ 18-1}$

$15 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2$ – варианты $a = b + c$.

$16 \cdot 17 \cdot \underline{6}.$

Черновик

$$\begin{cases} 4\log_a b \log_b c \log_c a = G^3 - G^2 \\ \begin{cases} a = \frac{x+2}{2} \\ b = \frac{7x-17}{4} \\ c = \frac{3x-12}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$4\log_a a = G^3 - G^2$

$4 = x \times (x-1)$

$x^3 - x^2 - 4 = 0.$

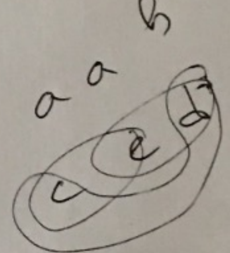
$x = 2$

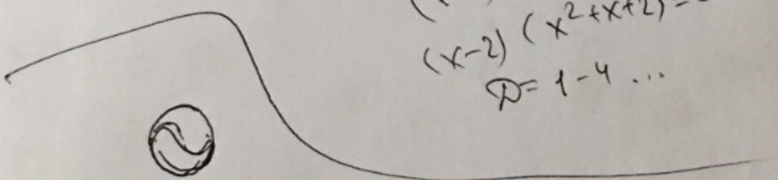
$(x-2)x^2 + x^2 - 4 = 0$

$(x-2)x^2 + (x-2)(x+2) = 0$

$(x-2)(x^2+x+2) = 0$

$D = 1 - 4 \ldots$





3·6·2

6·6

3·6

$2^1 \; 2^{17} \; 2^1$

$7^1 \; 7^{18} \; 7^1$

парыскет

какие.

17·18 ·3·2·3·2 → 2·2·6·4

17·18 − 18

18·17·36 − 24 − 17·3 − 18·3

(36 − 4·6)·4 +

16·15·36 + (36 − 4·6) +

36(9 + 8,5 + 3 − $\frac{8}{3}$ + 16·15

18·18 + 17·18 + 3·36 − 4·6·4

+ 16·15·36.

16·15·36 + 3·36 − 4·64 + (36 − 18) 17

(36 − 18) 18

Черновик

$НОД(abc) = 14$ наиб.

$НОК(abc) = 2^{17}\cdot 7^{18}$

$a = 2^i \cdot 7^j$

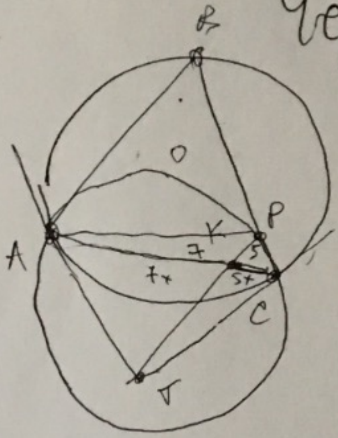
$a = 7^{18}\cdot 2^i \quad 1<i<17$

$b = 2^{17}\cdot 7^j \quad 1<j<18$

$c = 2^k \cdot 7^{\cancel{7}\,8}$

$17\cdot 18\cdot 3\cdot 2 -$ 2^{17} 7^{18} 2^1 7^1 $2^{1..17}$ $7^{1..18}$

2^{16} 2^{17}



$\log_{(\frac{x}{2}+1)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$

$\frac{x}{2}+1 = a$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4} = b$

$\log_{a^2} b \quad \log_{\sqrt{b}} (Ba)^2 \quad \log_{\sqrt{Ba}} a$

$\frac{3x}{2}-6$

$b - 4a = \frac{3x}{2} - \frac{17-16}{4}$

a b c

$\frac{x}{2}+1; \quad \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}; \quad \frac{3x}{2}-6$

$\log_{\sqrt{b}} c^2 \quad \log_{\sqrt{c}} a$

$\log_{a^2} b$

$\frac{1}{2}\log_a b \quad 4\log_b c \quad 2\log_c a$

= Вала