Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100107**

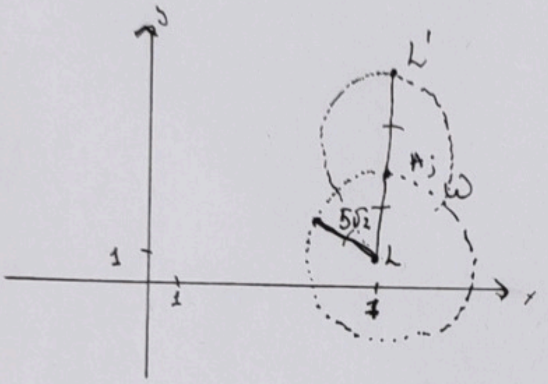
ID профиля: **800793**

Вариант 22

L

Чистовик

Мн-ству точек с координатами $(a;b)$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга и на его окружности радиуса $\sqrt{50}$, и с центром в точке $L(7;1)$. Это уравнение $(a-7)^2+(b-1)^2\le 50$. (*).



Уравнению $(x-a)^2+(b-y)^2\le 50$ удовлетворяет мн-ство точек $(x;y)$, лежащее внутри круга и на его окружности радиуса также $\sqrt{50}$, с центром в точке $A_j(a;b)$. Исходя из рассуждения выше, имеем, что мн-ство точек $(x;y)$, удовлетворяющих условию задачи, есть множество точек, лежащих внутри кругов и на их окружностей радиуса $\sqrt{50}$, с центрами в точках с координатами $(a;b)$, которые в свою очередь, удовлетворяют условию (*).

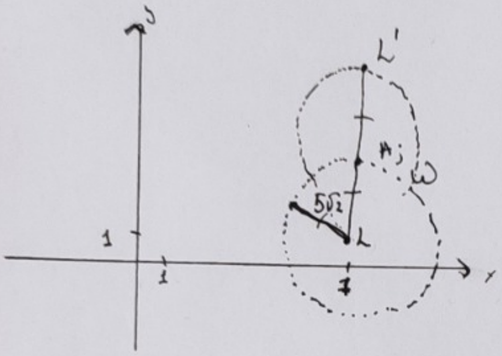
Возьмём любую точку на окружности круга ω (см. рисунок). Обозначим эту точку A_j. Возьмём другую точку L', такую, что L, A_j, L' лежат на 1 прямой, и $LA_j = A_jL'$. Т.к. A_j лежит на окружность, то $LA_j = L'A_j = 5\sqrt2$, а значит L' лежит на окружности радиуса $5\sqrt2$, с центром в A_j. Проделывая данную операцию для всех точек окружности ω, получим мн-ство всех точек L'. Эти точки образуют окружность радиуса $10\sqrt2$ с центром в L, причём все удовлетворяют условию задачи (координаты L' удовлетворяют $(x-a)^2+(y-b)^2\le 50$). А тогда, искомая фигура M есть ни что иное, как круг и его окружность радиуса $10\sqrt2$ с центром в $L(7;1)$. Тогда её площадь S_M равна:

$S_M = \pi R^2 = \pi\cdot(10\sqrt2)^2 = 200\pi$.

Ответ: $S_M = 200\pi$.

Чистовик

Мн-ству точек с координатами $(a;b)$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга и на его окружности радиуса $\sqrt{50}$, и с центром в точке $L(7;1)$. Это уравнение $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$. (*).



Уравнению $(x-a)^2+(b-y)^2 \le 50$ удовлетворяет мн-ство точек $(x;y)$, лежащие внутри круга и на его окружности радиуса также $\sqrt{50}$, с центром в точке $A_j(a;b)$. Исходя из рассуждения выше, имеем, что мн-ство точек $(x;y)$, удовлетворяющих условию задачи, есть множество точек, лежащих внутри кругов и на их окружностей радиуса $\sqrt{50}$, с центром в точках с координатами $(a;b)$, которые в свою очередь, удовлетворяют условию (*).

Возьмём любую точку на окружности круга ω (см. рисунок). Обозначим эту точку A_j. Возьмём другую точку L', такую, что L, A_j, L' лежат на 1 прямой, и $LA_j = A_jL'$. Т.к. A_j лежит на окружность, то $LA_j = L'A_j = 5\sqrt{2}$, а значит L' лежит на окружности радиуса $5\sqrt{2}$, с центром в A_j. Проделывая данную операцию для всех точек окружности ω, получим мн-ство всех точек L'. Эти точки образуют окружность радиуса $10\sqrt{2}$ с центром в L, причём все удовлетворяют условию задачи (координаты L' удовлетворяют $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 50$). А тогда, искомая фигура M есть ни что иное, как круг и его окружность радиуса $10\sqrt{2}$ с центром в $L(7;1)$. Тогда её площадь S_M равна: $S_M = \pi R^2 = \pi \cdot (10\sqrt{2})^2 = 200\pi$.

Ответ: $S_M = 200\pi$.

Чистовик

№3

Пусть $50 \geq 14a+2b$, это 1 случай, а $50 \leq 14a+2b$, это 2 случай

1) $\begin{cases} 50 \geq 14a+2b \\ a^2+b^2 \leq 14a+2b \end{cases}$

$$\begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50. \\ 50 \geq 14a+2b \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 50 \leq 14a+2b \\ a^2+b^2 \leq 50. \end{cases}$ Складывая эти 2 нер-ва, получим

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 14a+2b \\ 50 \leq 14a+2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50 \leq 14a+2b \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50. \end{cases}$$

Теперь проведём важное наблюдение. Разбивая мн-ства чисел a и b на случаи 1 и 2, мы также разбиваем мн-ство искомых точек $(x;y)$. Другими словами, мн-ство точек $(x;y)$ удовлетворяющих задаче, это объединение случаев 1 и 2. Т.е. есть:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 50 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 50 \geq 14a+2b \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50 \end{cases} \\ \begin{cases} 50 \leq 14+2b \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Но заметим, что объединение случая 1 и 2 это одно нер-во: $(a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50$. Это верно потому, что объединение 2 нер-в —

$\left[\begin{array}{l} 50 \geq 14a+2b \\ 50 \leq 14a+2b \end{array} \right.$, есть ни что иное, как мн-ство всех действительных значений.

Поэтому исходное условие равносильно этому:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(b-y)^2 \leq 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \leq 50 \end{cases}$$

Теперь рассмотрим декартовую систему координат:

Чистовик

№3

Пусть $50 \ge 14a+2b$, это 1 случай, а $50 \le 14a+2b$, это 2 случай

1) $\begin{cases} 50 \ge 14a+2b \\ a^2+b^2 \le 14a+2b \end{cases}$

$\begin{cases} (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50. \\ 50 \geqslant 14a+2b \end{cases}$

2) $\begin{cases} 50 \le 14a+2b \\ a^2+b^2 \le 50. \end{cases}$ Складывая эти 2 нер-ва, получим

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 14a+2b \\ 50 \le 14a+2b \end{cases}$

$\begin{cases} 50 \le 14a+2b \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50. \end{cases}$

Теперь проведём важное наблюдение. Разбивая мн-ства чисел a и b на случаи 1 и 2, мы также разбиваем мн-ство искомых точек (x;y). Другими словами, мн-ство точек (x;y) удовлетворяющих задаче, это объединение случаев 1 и 2. То есть:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 50 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 50 \geqslant 14a+2b \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases} \\ \begin{cases} 50 \le 14+2b \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Но заметим, что объединение случая 1 и 2 это одно нер-во: $(a-7)^2+(b-1)^2 \le 50$. Это верно потому, что объединение 2 нер-в —

$\left[\begin{array}{l} 50 \ge 14a+2b \\ 50 \le 14a+2b \end{array}\right.$, есть ни что иное, как мн-ство всех действительных значений.

Поэтому исходное условие равносильно этому:

$\begin{cases} (x-a)^2+(b-y)^2 \le 50 \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \le 50 \end{cases}$

Теперь рассмотрим декартову систему координат:

Чистовик

№1

По условию $a_i \in \mathbb{Z}$, если d – разность прогрессии, то $d \in \mathbb{Z}$, $d>0$.

$$S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{a_1+(a_1+14d)}{2}\cdot 15 = (a_1+7d)\cdot 15.$$

$$\begin{cases} a_7 a_{16} > S-24 \\ a_{11} a_{12} < S+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+15d) > S-24 \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < S+4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow S+4 > (a_1+10d)(a_1+11d).$$

Сложим 2 неравенства системы учитывая знак.

$$S+4+a_1^2+90d^2+21a_1d > S-24+a_1^2+110d^2+21a_1d$$

$$20d^2<28;$$

Из-за того что $d>0$ (условие, что прогрессия возрастающая), и $d \in \mathbb{Z}$, то $d=1$.

Имеем:

$$\begin{cases} (a_1+6)(a_1+15) > (a_1+7)\cdot 15-24 \\ (a_1+10)(a_1+11) < (a_1+7)\cdot 15+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+90+21a_1 > 15a_1+105-24 \\ a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+105+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+6a_1+9>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+3)^2>0 \\ a_1^2+6a_1+1<0 \end{cases}$$

Решая элементарную систему уравнений, находим, что a_1 может принимать любые значения из множества $\{-5;-4;-2;-1\}$

Ответ: $a_1 = \{-5;-4;-2;-1\}$.

Чистовик

№1

По условию $a_i \in \mathbb{Z}$, если d – разность прогрессии, то $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$.

$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{a_1 + (a_1 + 14d)}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15.$

$\begin{cases} a_7 a_{16} > S - 24 \\ a_{11} a_{12} < S + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > S - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < S + 4 \end{cases} \iff S + 4 > (a_1 + 10d)(a_1 + 11d).$

Сложим 2 неравенства системы учитывая знак.

$S + 4 + a_1^2 + 90d^2 + 21a_1 d > S - 24 + a_1^2 + 110d^2 + 21a_1 d$

$20d^2 < 28;$

Из-за того что $d > 0$ (условие, что прогрессия возрастающая), и $d \in \mathbb{Z}$, то $d = 1$.

Имеем:

$\begin{cases} (a_1 + 6)(a_1 + 15) > (a_1 + 7) \cdot 15 - 24 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 11) < (a_1 + 7) \cdot 15 + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 90 + 21a_1 > 15a_1 + 105 - 24 \\ a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$

Решая элементарную систему уравнений, находим, что a_1 может принимать любые значения из множества $\{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 = \{-5; -4; -2; -1\}$.

Черновик

$a_1 \in \mathbb{Z}$,

$S = \frac{a_1 + a_{15}}{2} 15.$ $\quad d > 0$ $\quad a_1 \cdot 15 +$

$a_7 a_{11} > S - 24$

$a_{11} a_{12} < S + 4.$ $\quad S = (a_1 + 7d) 15.$

$a_1 - 2$

$S = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15.$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > (a_1 + 7d)15 - 24 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < (a_1 + 7d) \cdot 15 + 4. \end{cases}$$

$a_1^2 + 21da_1 + 90d^2 > 15a_1 + 105a_1 d - 24$

$a_1^2 + 110d^2 + 21a_1 d < 15a_1 + 105a_1 d + 4$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 90d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105a_1 d} + 4 > \cancel{a_1^2} + \cancel{21a_1 d} + 110d^2 + \cancel{15a_1} + \cancel{105a_1 d} - 24$

$20d^2 < 28$

$d = 1.$ $\quad -33a_1 \quad 120$

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105a_1 - 24$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105a_1 + 4$ $\quad 33^2 - 4 \cdot 114 = 33^2 - 456$

$\cancel{a_1^2 - 33a_1 + 114 > 0}$ $\quad 100^2 - 33 \cdot 100$

$\cancel{a_1^2 - 33a_1 + 106 < 0.}$ $\quad 3x^2 - 33 \cdot 3x$

$33(-2) > 0.$

$a_1^2 + 21a_1 + 90 > 15a_1 + 105 - 24$

$a_1^2 + 21a_1 + 110 < 15a_1 + 105 + 4$ $\quad a_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = -3 \pm \sqrt{8}.$ $\quad -6 \quad -4 \quad - 3 \; -$

$a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0$

$a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0.$ $\quad -5 \quad 26 - 30$

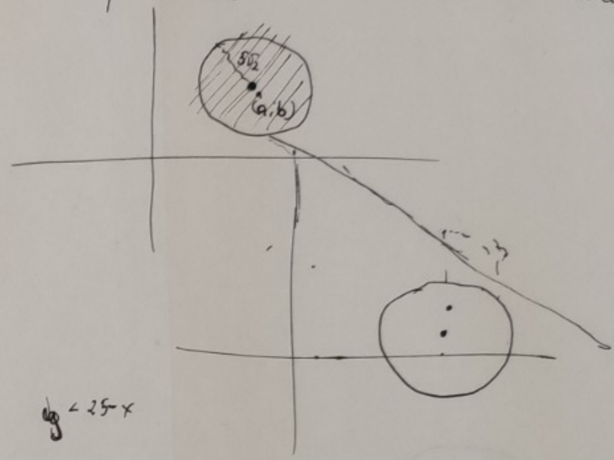
$36 - 32$

1) $14a + 2b \leq 50$

$(a - 9)^2 + (b - 5)^2 \leq 50,$

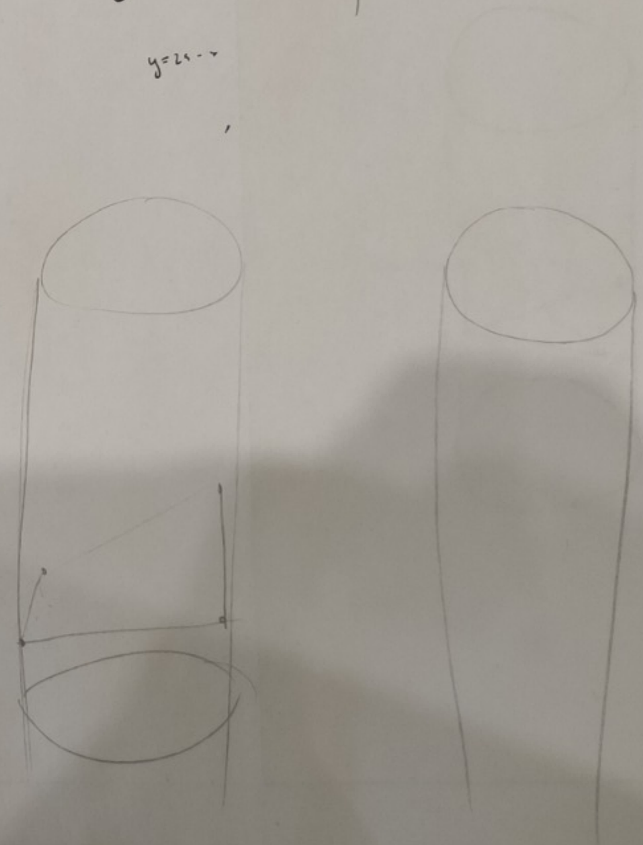
$(a - 7)^2 + (b - 1)^2 \leq 50$

Черновик $\quad x; y$ - точка, тогда он в этом круге.



$y < 25 - x$

$y = 2$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100107**

ID профиля: **800793**

Вариант 22

Чистовик

Б1

Т.к. НОК$(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}$, то a, b, c, имеют следующий вид:

$a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$
$b=2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$
$c=2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$.

Причём, $\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)=17$, $\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)=18$.

Т.к. НОД$(a;b;c)=7\cdot 2$, то каждое из них делится на 7 и на 2, т.е.

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)=1$, $\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)=1$.

Тогда имеем, что из 6 степеней $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ есть ровно 2 min и 2 max. (по одной ~~максимальной~~, максимальной минимальной степени для 2 и 7).

Вариантов выбора 2 мест из 3 для максимальной и минимальной степени двойки равно 6.

Действительно: $\begin{cases}\alpha_1=1\\ \beta_1=17\end{cases}$, $\begin{cases}\alpha_1=1\\ \gamma_1=17\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1=1\\ \gamma_1=17\end{cases}$, $\begin{cases}\beta_1=1\\ \alpha_1=17\end{cases}$, $\begin{cases}\gamma_1=1\\ \alpha_1=17\end{cases}$, $\begin{cases}\gamma_1=1\\ \beta_1=17\end{cases}$.

Аналогичные рассуждения и для семёрки.

Остаётся 2 свободных места, которые могут быть от 1 до 17 для двойки и от 1 до 18 для семёрки.

Тогда общее кол-во троек $(a;b;c)$ равно:

$6\cdot 6\cdot(17\cdot 18)=36\cdot 17\cdot 18=18^2\cdot 34$.

Ответ: $18^2\cdot 34$.

Чистовик

Теперь найдём AC зная, что $tg\, B = \frac{3}{4}$.

Сразу же находим, что $\sin B = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{4}{5}$.

Имеем, что $\angle TPC = \angle ABC = B$, значит $TP \parallel AB$, в частности $KP \parallel AB$.

Для $\triangle APK$ имеем, что

$$S_{APK} = 7 = \frac{7t \cdot PK \cdot \sin B}{2} = \frac{7t \cdot \frac{3}{5} \cdot PK}{2} = \frac{21}{10} t \cdot PK.$$

$$PK = \frac{10}{3t}.$$

Т.к. $KP \parallel AB$, то $\triangle KPC \sim \triangle ABC$. (подобные $\triangle$).

Откуда

$$\frac{PK}{AB} = \frac{PC}{BC}.$$

AB найдём по т-ме синусов в $\triangle ABP$: $\frac{AB}{\sin 2B} = \frac{BP}{\sin B}$. $AB = BP \cdot 2\cos B = \frac{56}{5} t$.

Тогда

$$\frac{\frac{10}{3t}}{\frac{56}{5}t} = \frac{5t}{12t}$$

$$\sin 2B = 2\sin B \cos B = \frac{24}{25}$$
$$\cos 2B = \frac{7}{25}$$

$$\frac{50}{3 \cdot 56 t^2} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{10}{14t^2} = 1, \quad t^2 = \frac{5}{7}.$$

По т-ме косинусов в $\triangle APC$:

$$7^2 t^2 + 5^2 t^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 t^2 \cdot \cos 2B = AC^2.$$

$$t^2\left(49 + 25 - 70 \cdot \frac{7}{25}\right) = AC^2.$$

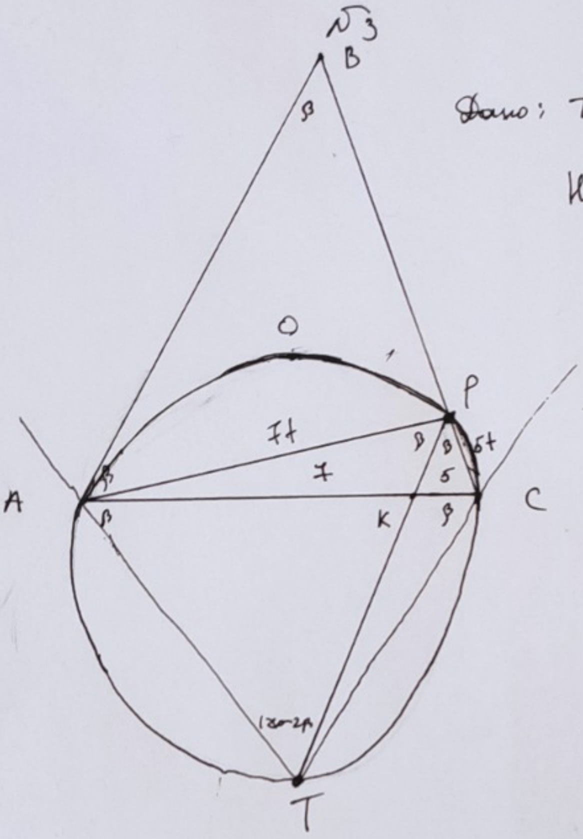
$AC = 4\sqrt{\frac{17}{7}}$

Ответ: $AC = 4\sqrt{\frac{17}{7}}$, $S_{ABC} = \frac{12^2}{5}$

2

Чистовик

№3



Дано: $tg\,B = \frac{3}{4}$; $S_{AKP} = 7$; $S_{PKC} = 5$.

Найти: AC; S_{ABC}.

Решение

Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда по св-ву касательных $\angle TAC = \angle TCA = \beta = \angle ABC$.

Значит $\angle ATC = 180 - 2\beta$

$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$.

Значит пятиугольник $AOPCT$ — вписанный, т.к. $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ$.

$\angle AOC = \angle APC = 2\beta$.

Т.к. $TA = TC$, то $\beta = \angle TCA = \angle TPC = \angle TPA = \angle TAC$.

Следовательно, PK — биссектриса $\angle APC$.

Пусть $AP = 7t$. Тогда по св-ву биссектрисы, $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{7}{5}$, т.к. у $\triangle APK$ и $\triangle PKC$ общая высота. Откуда $PC = 5t$

$\angle BPA = 180^\circ - \angle APC = 180 - 2\beta$. Тогда $\angle BAP = 180 - (180 - 2\beta + \beta) = \beta$, т.е. $\angle PAB = \angle PBA$, значит $BP = AP = 7t$.

$\triangle ABP$ и $\triangle APC$ имеют общую высоту к BC, значит: $\frac{S_{APC}}{S_{APB}} = \frac{5t}{7t}$.

$\frac{12}{S_{APB}} = \frac{5}{7}$ $S_{APB} = \frac{12 \cdot 7}{5}$.

$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{12 \cdot 7}{5} + 12 = \frac{12^2}{5}$.