Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100092**

ID профиля: **168887**

Вариант 22

Чистовик

N 1

a_1 - первый член ~~последовательности~~. прогрессии

d - разность прогрессии $\qquad S = a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$

$$S = 15a_1 + d + 2d + \dots + 14d = 15a_1 + \frac{14 \cdot 15}{2} d = 15a_1 + 7 \cdot 15 d = 15a_1 + 105d$$

(1) $a_7 \cdot a_{16} = (a_1 + 6d)(a_1 + 15d) > 15a_1 + 105d - 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 6a_1d + 15a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24 \Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1d + 90d^2 > 15a_1 + 105d - 24$

(2) $a_{11} \cdot a_{12} = (a_1 + 10d)(a_1 + 11d) < 15a_1 + 105d + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 21a_1d + 110d^2 < 15a_1 + 105d + 4$

~~$15a_1 + 105d$~~ Так как прогрессия возростающая, то $d > 0$, а т.к. прогрессия состоит из целых чисел, то d тоже целое $\Rightarrow$ $\Rightarrow d \geq 1$.

из (1) $24 + 90d^2 > 15a_1 + 105d - a_1^2 - 21a_1d$

из (2) $110d^2 - 4 < 15a_1 + 105d - a_1^2 - 21a_1d$ $\qquad$ поэтому

$24 + 90d^2 > \cancel{10}\, 110d^2 - 4 \Rightarrow 28 > 20d^2 \Rightarrow d^2 < \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$ (d целое)

если $d \geq 2$, то $d^2 \geq 4 > \frac{7}{5}$, поэтому $d = 1$., тогда

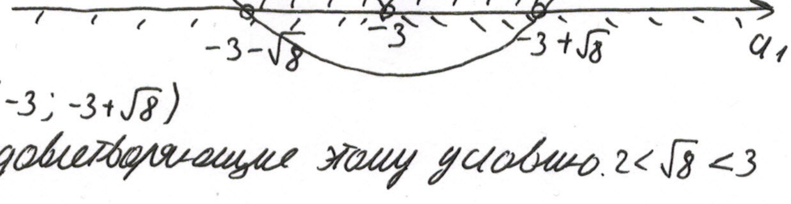
перепишем (1) и (2) подставив ~~вместо d=1~~. $d = 1$.

$$\begin{cases} (1)\ 24 + 90 > 15a_1 + 105 - a_1^2 - 21a_1 \\ (2)\ 110 - 4 < 15a_1 + 105 - a_1^2 - 21a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 114 - 105 > -a_1^2 - 6a_1 \\ 106 - 105 < -a_1^2 - 6a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 6a_1 + 9 > 0 \\ a_1^2 + 6a_1 + 1 < 0 \end{cases}$$

Решим эти неравенства методом интервалов

$$\begin{cases} (a_1 + 3)^2 > 0 \\ (a_1 + 3 + \sqrt{8})(a_1 + 3 - \sqrt{8}) < 0 \end{cases}$$



отсюда $a_1 \in (-3-\sqrt{8}; -3) \cup (-3; -3+\sqrt{8})$

Найдём все целые a_1 удовлетворяющие этому условию. $2 < \sqrt{8} < 3$

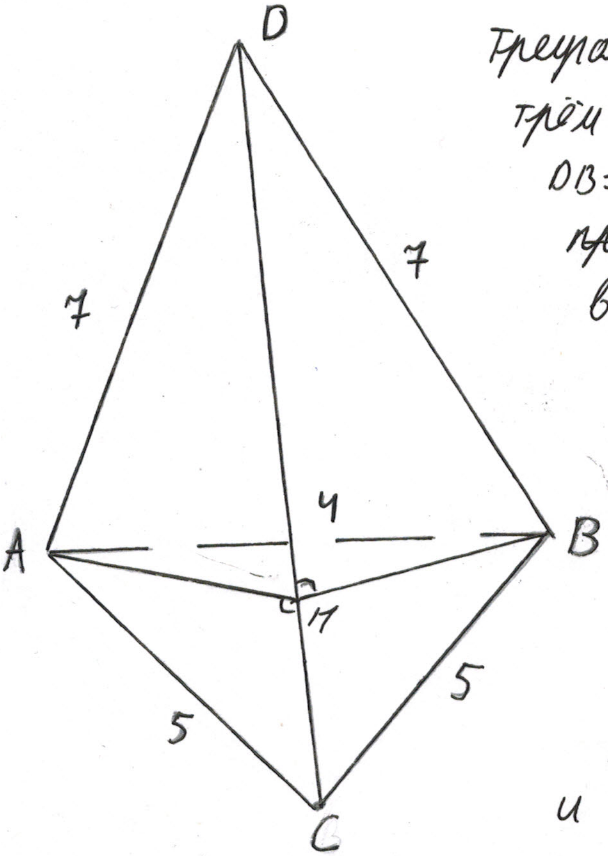
подходят $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$

1

Чистовик

N 2



Треугольники $\triangle ADC = \triangle$ ~~ВЧ~~ BDC по трём сторонам

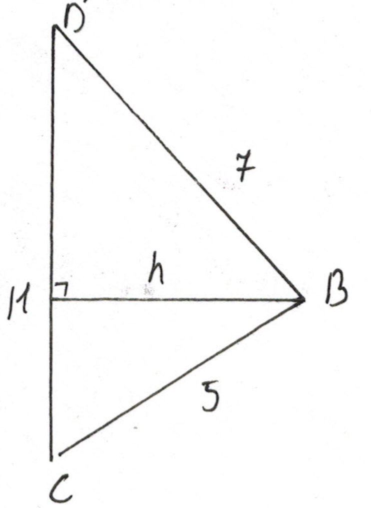
$DB = AD$, $CB = AC$, DC — общая

~~при~~ $\Rightarrow$ значит высоты в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ опущенные из вершин A и B соответственно равны и попадают в одну точку на стороне DC.

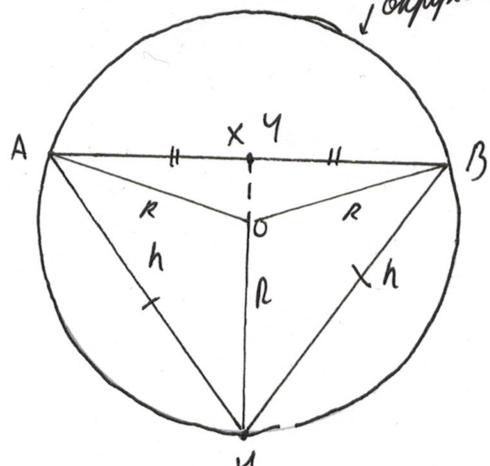
$AH = HB$.

По условию все точки A, B, C и D лежат на боковой поверхности цилиндра и DC параллельно оси цилиндра

Тогда DC перпендикулярна плоскости сечения цилиндра, перпендикулярной оси. Тогда так как AB перпендикулярно DC, и AH и HB — перпендикулярны DC, то треугольник ABH вписан в окружность сечения, перпендикулярного оси цилиндра.



окружность ~~перпендик~~ сечения, перпендикулярного оси цилиндра.



Найдём h, для которого радиус окружности, описанной около треугольника ABH — минимален. обозначим радиус за R

по теореме пифагора для $\triangle XBO$

X — середина AB. $R = \sqrt{XB^2+XO^2} \geq XB = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимальный радиус равен 2 $\Rightarrow \angle BOH = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$ ← по теореме пифагора для $\triangle BOH$.

Чистовик

Продолжение задачи № 2

найдём CD.

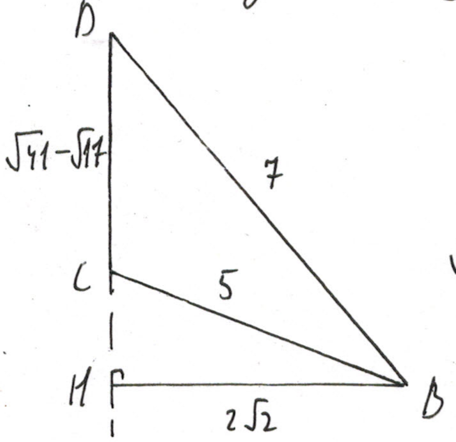
~~CD = CH + HD~~. По теореме пифагора для △ DBH:

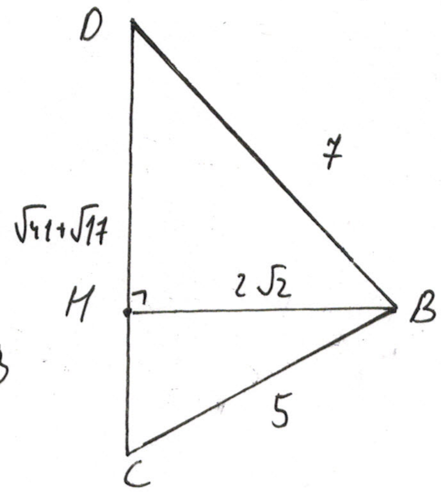
$7^2 = (2\sqrt{2})^2 + (HD)^2 \Rightarrow 49 = 8 + (HD)^2 \Rightarrow HD = \sqrt{41}$.

По теореме пифагора для △ HBC:

$5^2 = (2\sqrt{2})^2 + (HC)^2 \Rightarrow 25 = 8 + (HC)^2 \Rightarrow HC = \sqrt{17}$

Поэтому есть 2 варианта ~~[illegible]~~





$CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$ или
$CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Ответ: ~~$CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$~~ $CD = \sqrt{41} - \sqrt{17}$ или $CD = \sqrt{41} + \sqrt{17}$

Чистовик

N 3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 50 \\ a^2+b^2 \le \min(14a+2b, 50) \end{cases}$$

первое неравенство системы- неравенство круга с центром (a, b) и радиусом $\sqrt{50}$.

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \le x^2-2ax+y^2-2by+\min(14a+2b,50)$$

если $14a+2b \ge 50$, то это получается то же самое первое ~~уравнение~~ неравенство системы, а если $14a+2b<50$, то

$(\cancel{x}-a)^2+(y-b)^2$ - квадрат расстояния от точки (x, y). до точки (a, b). Таким образом ~~утверждается, что~~ для фигуры M можно найти точку (a, b), такую, что расстояние от (a, b) до любой точки фигуры M ~~мень~~ не больше $\sqrt{50}$, таким образом все точки фигуры M находятся на расстоянии не больше $\sqrt{50}$ от точки (a, b), то есть в пределах круга с центром (a, b) и радиусом $\sqrt{50}$.

в качестве точки (a, b) например подойдёт точка $(6, 1)$

$6^2+1^2=37 \le \min(14\cdot6+2\cdot1, 50) = \min(86, 50)=50$. Тогда площадь M не больше площади круга радиусом $\sqrt{50}$. Тогда S_M - площадь фигуры M $\Rightarrow S_M \le \pi\cdot(\sqrt{50})^2=50\pi$.

~~Ответ: $S_M \le 50\pi$~~. Таким образом Фигура M находится внутри круга с центром $(6, 1)$ и радиусом $\sqrt{50}$. для неё существует точка $(a, b)=(6, 1)$, удовлетворяющая обоим неравенствам системы.

Ответ: ~~$0 \le S$~~ $S_M \in [0; 50\pi]$

4

Черновик

$$\begin{array}{r} \times\ 15 \\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{32}}{2} = -3 \pm \frac{2\sqrt{8}}{2} = -3 \pm \sqrt{8}$$

$$\begin{array}{r} -\ 25 \\ 8 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 84 \\ 2 \\ \hline 86 \end{array}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100092**

ID профиля: **168887**

Вариант 22

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 14 = 2^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a, b, c) = 2^{17} \cdot 7^{18} \end{cases}$$

каждое из чисел a, b, c делится на 2^1 и на 7^1

причём найдётся число, которое делится на 2^1, но не делится на 2^2, иначе НОД(a, b, c) делился бы на 2^2.

аналогично найдётся число делящееся на 7^1, но не делящееся на 7^2.

среди двух чисел среди a, b, c надо распределить 2^{16} и 7^{17}.

$3 = C_3^2$ способами выбираем 2 числа куда мы буде распределять 2^{16}. Затем есть 17 вариантов в какой степени туда ~~добавить дво~~ входит двойка, ~~помимо 2^1~~.

степени вхождения двойки в выбран. числа → (~~0, 16); (1, 15); (2, 14); ... ; (15, 1); (16; 0)~~ (1, 17); (2, 16); .... (16; 2); (17; 1) – 17 вариантов

Для семёрки. $3 = C_3^2$ способами выбираем 2 числа куда мы распредлим 7^{17}. Всего существует 18 вариантов распределения. 7^{17} по этим числам.

степени вхождения семёрки в выбраные числа:

(1, 18); (2; 17); . . . ; (17; 2); (18; 1) – всего 18 вариантов

Итого различных троек $(3 \cdot 17) \cdot (3 \cdot 18) = 2754$

Ответ: 2754 тройки чисел (a, b, c).

Чистовик

N5

1) $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, 2) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, 3) $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$

Так как логарифмы определены, то

$\frac{x}{2}+1\geq 0,\quad \frac{x}{2}+1\neq 1$

$\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\geq 0,\quad \frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\neq 1$

$\frac{3x}{2}-6\geq 0,\quad \frac{3x}{2}-6\neq 1.$

поэтому

(1) $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$

(2) $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2=4\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)$

(3) $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=2\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)$

пусть 2 числа равны по a. тогда третье равно $a-1$.

$\log_{\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)=\cancel{\log\left(\frac{3x}{2}-6\right.}\ \frac{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}$

$\log_{\left(\frac{3x}{2}-6\right)}\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}$

Перемножим ~~ф.~~ (1), (2) и (3). Тогда.

$a\cdot a\cdot(a-1)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)}\cdot\frac{\log_{\frac{x}{2}+1}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=4.$

$a^3-a^2=4 \Rightarrow a^3-a^2-4=0 \quad a=2$ решение

$a^3-a^2-4=(a-2)(a^2+a+2)=0$

уравнение $a^2+a+2=0$ решений не имеет т. к. $D=1-2\cdot 4=-7<0$

Чистовик

Продолжение задачи №5

$a = 2$

если $2\log_{(\frac{3x}{2}-6)}(\frac{x}{2}+1) = 2$, то

$\frac{x}{2}+1 = \frac{3x}{2}-6 \Rightarrow 7 = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\log_{(\frac{49}{2}-\frac{17}{4})}(\frac{21}{2}-6) = 4\log_{\frac{81}{4}}\frac{9}{2} = \cancel{2}\,4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{7}{2}+1)}(\frac{7\cdot 7}{2}-\frac{17}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{9}{2}}\frac{81}{4} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$

$x = 7$ подходит.

если $4\log_{(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4})}(\frac{3x}{2}-6) = 2$, то ~~то не решение~~.

$(\frac{3x}{2}-6)^2 = (\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}) \Rightarrow (3x-12)^2 = (14x-17)$

$9x^2 - 72x + 144 = 14x - 17 \Rightarrow$

$9x^2 - 86x + 161 = 0$ корни $x = 7$ и $x = \frac{161}{7\cdot 9} = \frac{23}{9}$

тогда $\frac{1}{2}\log_{(\frac{23}{18}+1)}(\frac{7\cdot 23}{18}-\frac{17}{4}) =$

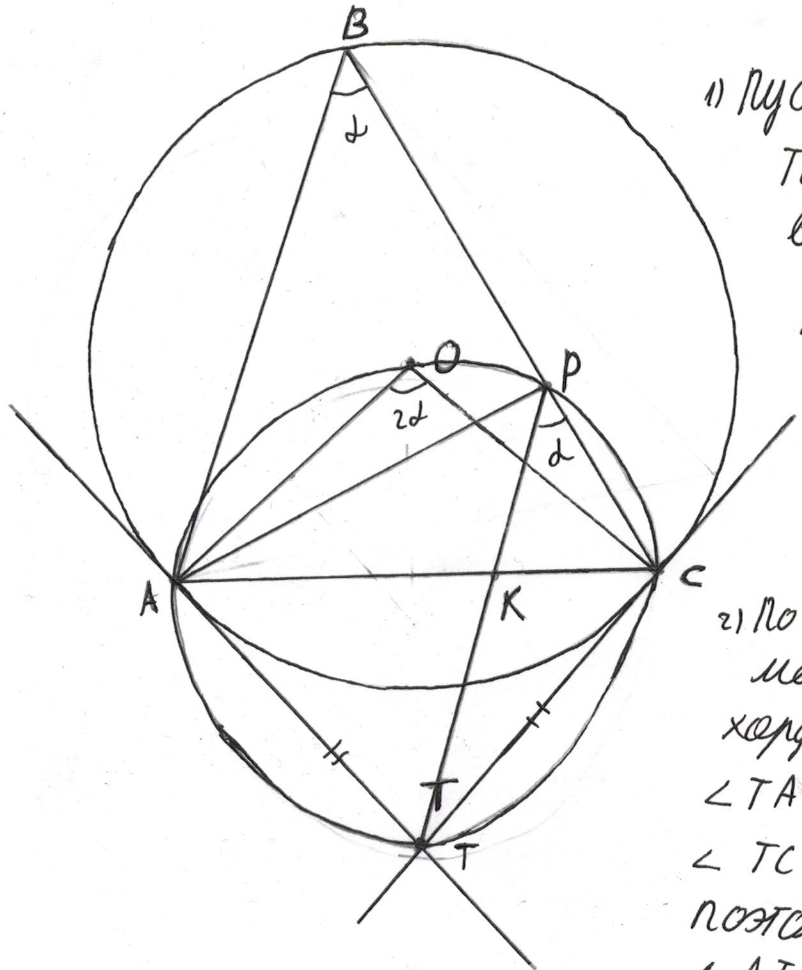
$= \frac{1}{2}\log_{\frac{41}{18}}(\frac{169}{9\cdot 18}) \neq 2$ $\cancel{\neq 1}$ и $\frac{1}{2}\log_{\frac{41}{18}}(\frac{169}{2\cdot 18}) \neq 1$

~~если $\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}+1)}(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}) = 2 \Leftrightarrow$~~ больше вариантов нет т.к. ~~каждое из этих~~ хотя бы одно из чисел (2) или (3) должно быть равняться 2.

Ответ: $x = 7$

Чистовик

№ 6



1) Пусть $\angle ABC = \alpha$

Тогда по теореме о вписанном и центральном угле $\angle AOC = 2\alpha$, т. к. он центральный в окружности ω, а $\angle ABC$ вписанный в окружность ω

2) По теореме об угле между касательной и хордой

$\angle TAC = \angle ABC = \alpha$

$\angle TCA = \angle CBA = \alpha$.

Поэтому угол

$\angle ATC = 180° \cancel{- \alpha - \alpha} - \angle CAT - \angle TCA = 180° - 2\alpha$ — из теоремы о сумме углов треугольника.

Рассмотрим четырёхугольник AOCT. он вписанный так как $\angle AOC + \angle ATC = 180°$ и ~~он лежи~~ точка T лежит на окружности, описанной около треугольника $\triangle AOC$.

$\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$ — как углы опирающиеся на одну и ту-же дугу. $AT = TC$ — как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, поэтому ~~дугу дуга $\overset{\frown}{AT}$ = ду~~ дуги $\overset{\frown}{AT}$ и $\overset{\frown}{CT}$ равны. $\overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{CT}$.

Поэтому $\angle APT = \angle TPC$ — как углы опирающиеся на равные дуги. $\angle APT = \angle TPC = \frac{\angle APC}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

~~продолж~~ Чистовик

продолжение задачи N 6

$\angle KPC = \angle ABC$

$\angle PCK = \angle BCA$ общий, поэтому $\triangle ABC$ подобен $\triangle KPC$.

Найдём коэффициент подобия.

в $\triangle APK$ и в $\triangle KPC$ высота, опущенная из вершины P на AC - совпадает, поэтому если h - длина этой высоты, то

площадь $S_{APK} = \frac{h \cdot |AK|}{2} = 7$

$S_{KPC} = \frac{h \cdot |KC|}{2} = 5$ $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{7}{5} = \frac{|AK|}{|KC|} \Rightarrow$

$\Rightarrow |AK| = \frac{7}{5}|KC| \Rightarrow |AC| = |KC| + |AK| = |KC| + \frac{7}{5}|KC| = \frac{12}{5}|KC|$

Поэтому коэффициент подобия треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle KPC$

равен $k = \frac{|AC|}{|KC|} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = k^2 = \frac{12^2}{5^2}$, где S_{ABC} - площадь треугольника ABC. поэтому

$S_{ABC} = k^2 \cdot S_{KPC} = \frac{12^2}{5^2} \cdot 5 = \frac{144}{25} \cdot 5 = \boxed{\frac{144}{5}}$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

R - радиус описаной окружности, поэтому

$2R = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{3} \cdot 5 \Rightarrow AC = \frac{6R}{5}$ - по теореме синусов

Ответ: $S_{ABC} = \frac{144}{5}$

Черновик.

$$\begin{array}{r} \times\, 18 \\ 17 \\ \hline +\,126 \\ 18 \\ \hline 306 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 306 \\ 9 \\ \hline 2754 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - a^2 + 0\cdot a - 4 & a - 2 \\ \cline{2-2} -\,a^3 - 2a^2 & a^2 + a + 2 \\ \cline{1-1} \quad -\,\cancel{1}a^2 + 0a^2 & \\ \quad\;\; a^2 - 2a^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 2a - 4 & \\ \qquad -\,2a - 4 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 49 \\ 2 \\ \hline 98 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 98 \\ -\,17 \\ \hline \cancel{79} \\ 81 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,161 & 7 \\ \cline{2-2} 14 & 23 \\ \cline{1-1} 21 & \end{array}$$

$$\frac{41}{18}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 23 \\ 7 \\ \hline 161 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 161 \\ 2 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 9 \\ \hline 153 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 322 \\ -\,153 \\ \hline 169 \end{array}$$