Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104948**

ID профиля: **309813**

Вариант 21

Чистовик
вар. 21

№1)

$$a_1,\ a_1+d,\ \dots,\ a_1+6d$$

$$S=\frac{(a_1+a_1+6d)7}{2}=7(a_1+3d)$$

$$\begin{cases} a_8a_{17}>S+27 \\ a_{11}a_{14}<S+60 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d)>7(a_1+3d)+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d)<7(a_1+3d)+60 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2-7a_1-21d-27>0 \\ -(a_1^2+23a_1d+130d^2-7a_1-21d-60)>0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

сложим

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1+23a_1d+130d^2-7a_1-21d-60<0 \\ 112d^2-130d^2-27+60>0 \end{cases}$$

$$-18d^2+33>0$$

$$d^2<\frac{33}{18},\quad d<\sqrt{\frac{33}{18}}=\sqrt{1{,}8(3)}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ 117\ \ \\ \hline 1521 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 38 \\ 38 \\ \hline 304 \\ 114\ \ \\ \hline 1444 \end{array}$$

Т.к. все члены прогрессии целые, то d — целое

$1{,}3<\sqrt{1{,}8(3)}<1{,}4$, тогда $d=1$

$d>0$ (т.к. прогрессия возрастающая)

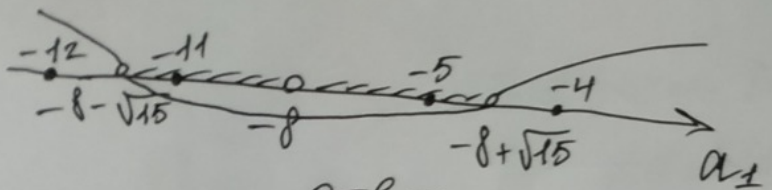
тогда

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112-7a_1-21-27>0 \\ a_1^2+23a_1+130-7a_1-21-60<0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (a_1^2+16a_1+64)>0 \\ (a_1^2+16a_1+49)<0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ (a_1-(-8+\sqrt{15}))(a_1-(-8-\sqrt{15}))<0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_1\neq-8 \\ (a_1-(-8+\sqrt{15}))(a_1-(-8-\sqrt{15}))<0 \end{cases}$$

Б1 (продалжение)) Чистовик



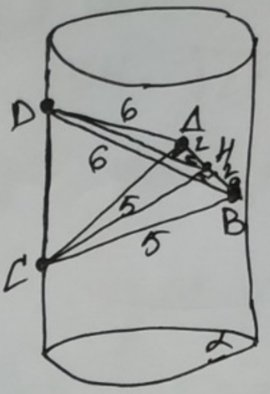
Ответ:

$\sqrt{15} \approx 3,9$

$a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Чистовик

№2)



1) Построим DH – высоту $\triangle ABD$

~~СН~~ $AH=BH$, т.к. он равнобедренный, тогда

CH – высота $\triangle ABC$, т.к. он равнобедренный

тогда $AB \perp DH$ и $AB \perp CH$, т.е.

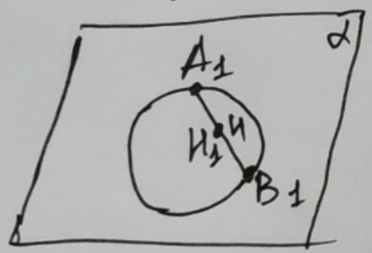
$AB \perp (CDH)$, $AB \perp CD$

2) т.к. $CD \perp \alpha$, то $(CDH) \perp \alpha$, тогда

плоскость основания

т.к. $AB \perp (CDH)$ и $AB \not\subset \alpha$, то $AB \parallel \alpha$.

тогда A_1B_1 – проекция AB на α равна длине AB



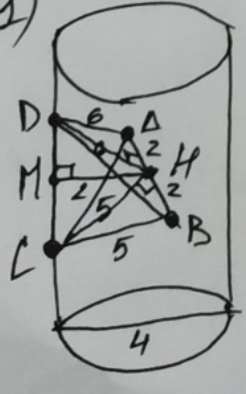
Радиус цилиндра минимален, если A_1B_1 находится в самой широкой части окружности основания, т.е. A_1B_1 – диаметр, $2r = 4$

$r = 2$

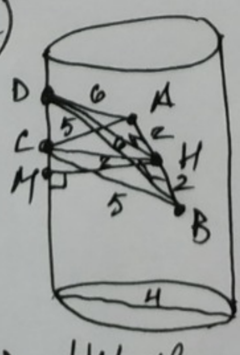
H_1 тогда – центр окр. основания, H лежит на оси цилиндра

тогда конфигураций рисунка две:

1)



2)



По т. Пифагора из $\triangle ADH$:

$DH = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

из $\triangle ACH$:

$CH = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

тогда по т. Пифагора из $\triangle DHM$:

$DM = \sqrt{32-4} = 2\sqrt{7}$

$HM \perp CD$, ~~HM равна~~ $HM = r$, т.к. H на оси цилиндра

3

Чистовик

№2 (продолжение)

из △ CHM:

$CH = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

тогда для рис. 1) : $CD = CH + DM = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

для рис. 2) : $CD = DM - CM = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

Ответ: $r = 2$

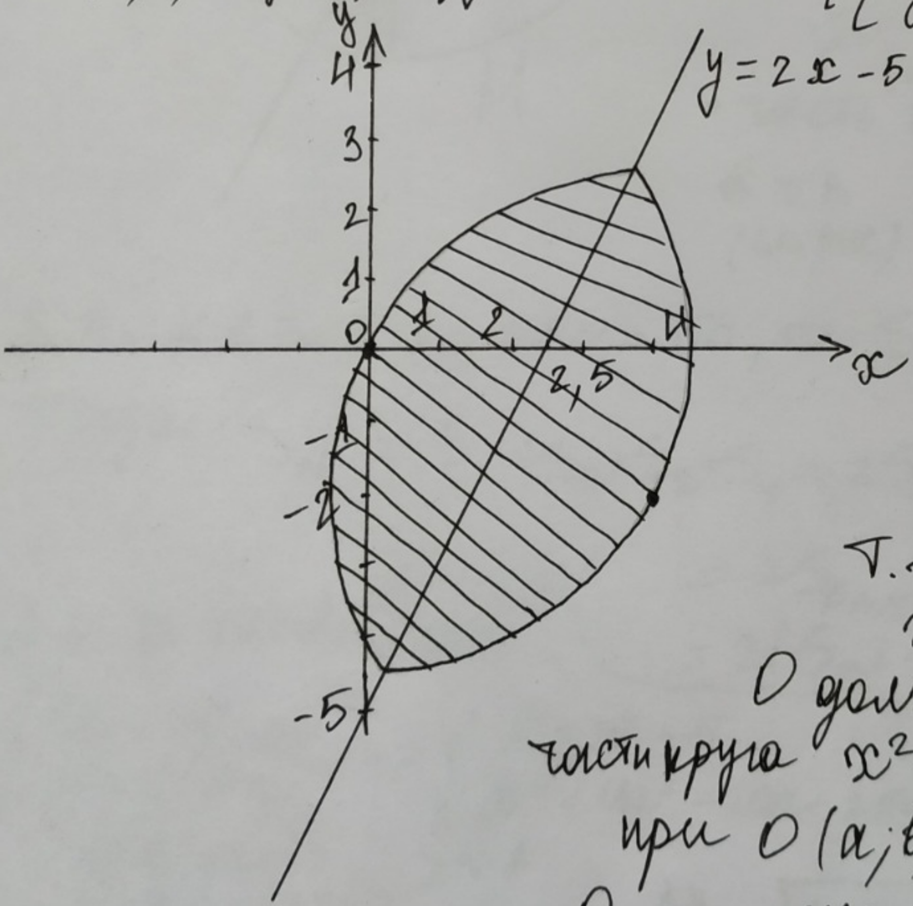
$\left[\begin{array}{l} CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17} \\ CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17} \end{array}\right.$

Чистовик

№3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}8a-4b\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases}\\ \begin{cases}8a-4b>20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \iff \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \quad \ldots(1)\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}b\ge 2a-5\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20 \quad \ldots(2)\end{cases}\\ \begin{cases}b<2a-5\\ a^2+b^2\le 20 \quad \ldots(3)\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$

$O(a;b)$ – центр окружности (1)



Если $O(a;b)$ лежит ниже этой прямой, то a и b должны удовлетворять системе (3); если выше, то системе (2).

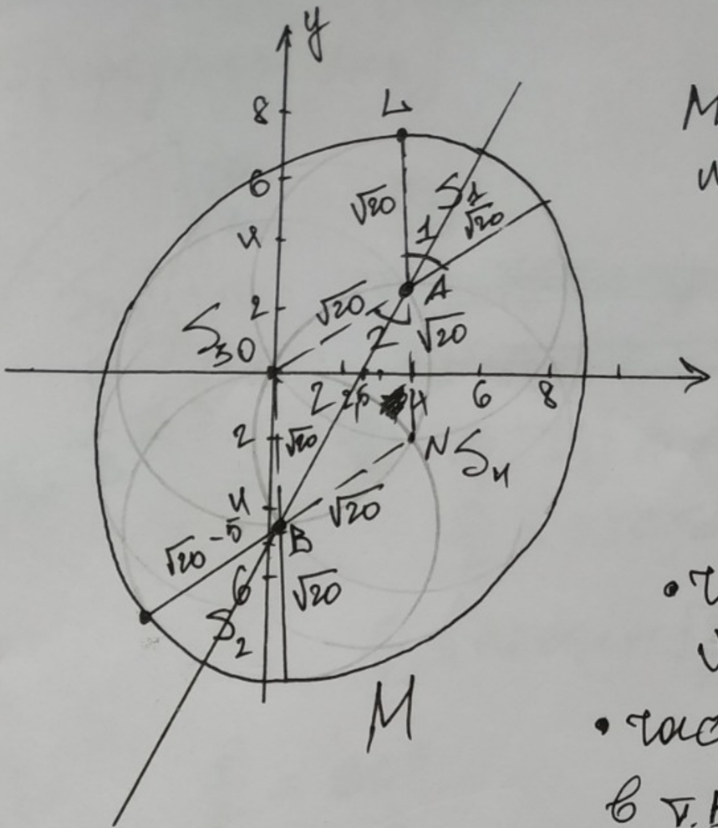
Т.е. при $O(a;b)$ ниже этой прямой O должно лежать внутри части круга $x^2+y^2\le 20$

при $O(a;b)$ выше этой прямой O должно лежать внутри части круга $(x-4)^2+(y+2)^2\le 20$

Т.о. O должно находиться в заштрихованной области, а фигура M – это объединение всех кругов с радиусом $\sqrt{20}$, ~~назад~~ с центром в заштрихованной области

5

№3 (продолжение) Чистовик



M — это фигура, которую можно разбить на 4:

- часть круга, радиусом $2\sqrt{20}$ с центром $(0;0)$ (площадь S_4)
- часть круга, радиусом $2\sqrt{20}$ с центром $(4;2)$ (площадь S_3)
- часть круга радиусом $\sqrt{20}$ с центром в т. A (площадь S_1) (см рис.)
- часть круга с центром в т. B радиуса $\sqrt{20}$ (см. рис.) (площадь S_2)

т.к. $\angle 1 = \angle 2$ $AL = AN = \sqrt{20}$, то $S_1 = S_2 = S_{\triangle ONA}$

Тогда $S_M = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S_1 + 2S_3 =$

$= 2S_{OAN} + 2S_3 = S_{BOAN} + 2S_3 =$

$= 2(S_3 + S_{ANB})$

A и B таковы, что

$$\begin{cases} 8a - 4b = 20 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 5 \\ a^2 + 4a^2 - 20a + 25 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 5 \\ a^2 - 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ b = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases} \text{— т. A} \\ \begin{cases} a = 2 - \sqrt{3} \\ b = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases} \text{— т. B} \end{array}\right.$$

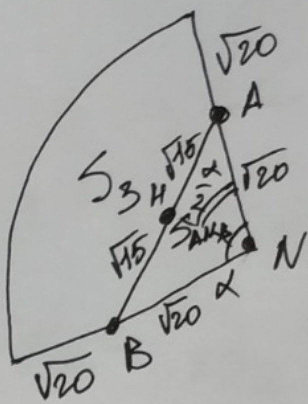
$AB = \sqrt{(2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}))^2 + (-1+2\sqrt{3} - (-1-2\sqrt{3}))^2} =$

$= \sqrt{12 + 48} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

~~№3~~

Чистовик

№3 (продолжение)



~~По т. Пифагора~~

~~$NH = \sqrt{20-15} = \sqrt{5}$~~

Из $\triangle ANH$:

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$$

$$\alpha = 120^\circ$$

Тогда $S_{ANB} + S_3 = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi R^2$, $R = 2\sqrt{20}$

$$S_{ANB} + S_3 = \frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot 4\cdot 20 = \frac{80\pi}{3}$$

$$S_M = 2(S_{ANB} + S_3) = \frac{160\pi}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S_M = \frac{160\pi}{3}$ (кв. ед.)

Черновик

$8a-4b=20$

$a^2+b^2=20$

$b=2a-5$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0$

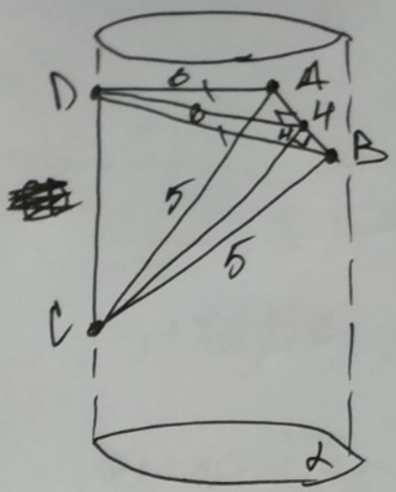
$a^2-4a+1=0$

$D=16-4=(2\sqrt{3})^2$

$$\left[\begin{array}{l} a=2+\sqrt{3} \\ a=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} b=-1+2\sqrt{3} \\ b=-1-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Черновик



$CD \perp AB$

$CD \perp$ осн.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b \ge 2a-5 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \end{cases} \\ \begin{cases} b < 2a-5 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}\end{array}\right.\end{cases}$$

$8a-4b \le 20$

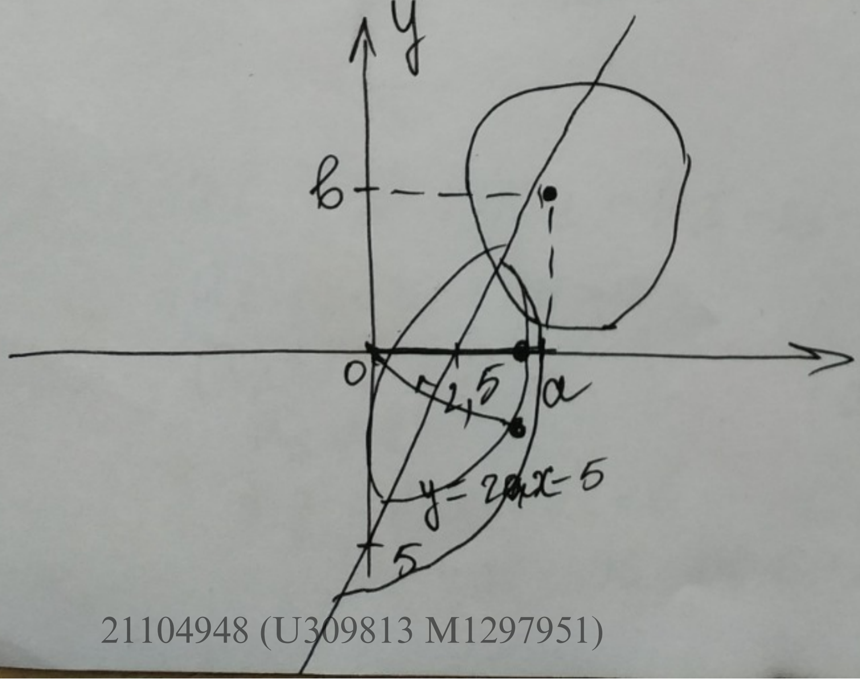
$b \ge 2a-5$

$a^2+b^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$(a^2-8a+16)+(b^2+4b+4) \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$



~~$y=kx$~~

~~$-2=4k$~~

~~$k=-0,5$~~

~~$\frac{1}{-0,5}=-2$~~

Черновик

$$\underbrace{a_1, a_1+d, \dots, a_1+6d}$$

$$S=\frac{(2a_1+6d)7}{2}=(a_1+3d)7$$

$(a_1+7d)(a_1+16d)>S+27$

$(a_1+10d)(a_1+13d)<S+60$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d)>(a_1+3d)7+27\\(a_1+10d)(a_1+13d)<(a_1+3d)7+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+23a_1d+112d^2-7a_1-21d-27>0\\a_1^2+23a_1d+\end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l}33 & 18\\ -18 & 1,8(3)\\ \hline 150 & \\ 144 & \\ \hline 60 & \\ -54 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

$169<183<196$

$a_1^2+16a_1+112-21-27>0$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$

$a_1\neq 8$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$D=256-196=60=(2\sqrt{15})^2$

$\left(a_1-\frac{-16+\sqrt{60}}{2}\right)(a_1-$

21104948 (U309813 M1297951)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

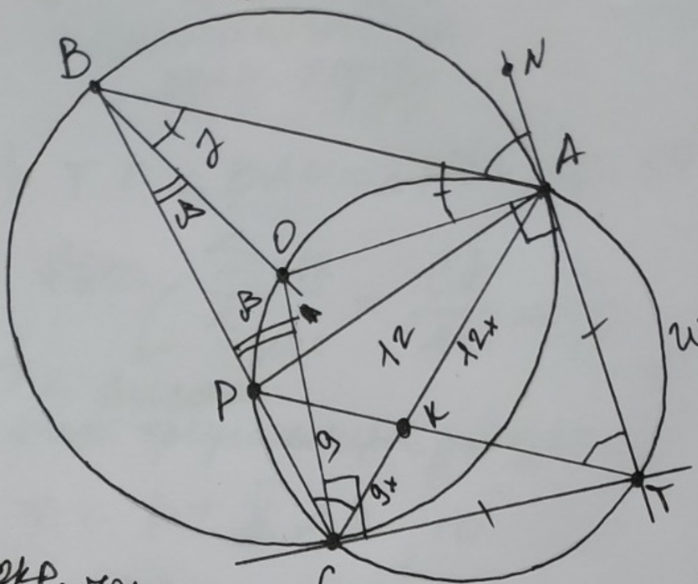
Шифр: **21104948**

ID профиля: **309813**

Вариант 21

Чистовик

№6)



ω_1 – окр. через A, O, C.

1) Пусть $\angle PBO = \beta$
$\angle ABO = \gamma$
Тогда т.к. центр ~~~~ описанной около $\triangle ABC$ окружности лежит ~~~~ в точке пересечения серединных перпендикуляров, то $\angle BCO = \angle OBC = \beta$
$\angle BAO = \angle ABO = \gamma$

2) Т.к. CT и AT – касательные, то $\angle OAT = \angle OCT = 90°$,
тогда $\angle BCT = 90° + \beta$, $\angle BAT = 90° + \gamma$
Тогда из четырехугольника BATC:
$$\angle ATC = 360° - (\gamma + \beta) - (90° + \gamma) - (90° + \beta) =$$
$$= 180° - 2\gamma - 2\beta$$

3) $\underbrace{\angle COA}_{\text{центральный в } \omega} = \underbrace{2\angle CBA}_{\text{вписанный в } \omega} = 2\beta + 2\gamma$

4) Т.к. $\angle ATC + \angle COA = 180° - 2\gamma - 2\beta + 2\gamma + 2\beta = 180°$,
то четырехугольник COAT – вписанный, т.е. точка T лежит на окружности ω_1

5) ~~Тогда~~ $\underbrace{\angle BAN}_{\text{угол между хордой AB и касательной в } \omega} = \underbrace{\angle BCA}_{\text{вписанный на хорду AB в } \omega}$

1

Чистовик

№6 (продолжение)

6) $\angle PCA = \angle PTA$ — вписанные опир. на одну хорду, тогда $\angle PTA = \angle BCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PTA = \angle BAN$

7) т.к. $\angle BAN = \angle PTA$, то $PT \parallel AB$

8) $\frac{S_{CPK}}{S_{KPA}} = \frac{CK}{AK} = \frac{9}{12}$

т.к. высота у этих треугольников общая.

9) т.к. $PT \parallel AB$, то

$\triangle PCK \sim \triangle BCA$ (по двум углам)

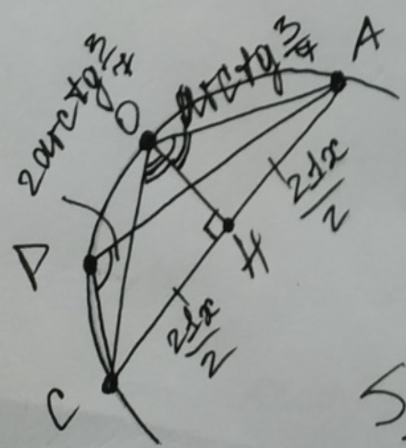
$k = \frac{CK}{CA} = \frac{9x}{21x} = \frac{3}{7}$

тогда $\frac{S_{PCK}}{S_{BCA}} = k^2$

$S_{ABC} = \frac{S_{PCK}}{k^2} = \frac{9}{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = 49$

10) т.к. $\angle ABC = arctg\frac{3}{7}$, то $\angle AOC = 2arctg\frac{3}{7}$,

тогда $\angle APC = 2arctg\frac{3}{7}$



$\frac{AH}{OH} = tg\angle AOH$

$\frac{AH}{OH} = \frac{3}{7}$

$OH = \frac{7AH}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{21x}{2} = \frac{49x}{2}$

$S_{AOC} = \frac{AC \cdot OH}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21x}{2} \cdot \frac{49x}{2}$

Чистовик

№5) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\quad x>\frac{3}{2}$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$ $\quad x\neq 2$

Пусть $a=\sqrt{2x-3}$

$b=x+1$

$c=2x^2-3x+5$, тогда числа

$\log_a b$

$\log_c a^4 = 4\log_c a$

$\log_b c$

8 $\quad$ 10

40

2

3

Чистовик

№4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$

$a = 5\cdot 7\cdot 5^{a}\cdot 7^{b}$
$b = 5\cdot 7\cdot 5^{c}\cdot 7^{d}$
$c = 5\cdot 7\cdot 5^{e}\cdot 7^{f}$

$НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c) = abc$

$abc = 5^{19}\cdot 7^{17}$

т.к. НОД $=35$, то a или c или e равно нулю и b или d или f равно нулю

Пусть $e=0$, тогда

$a+c+3=19$, $a+c=16$, $a\neq 0$, $c\neq 0$, т.о. при $e=0$ a и c можно выбрать 15 способами

Пусть $f=0$, тогда

$b+d+3=17$, $b+d=14$, $b\neq 0$, $d\neq 0$, т.о. при $f=0$ b и d можно выбрать 13 способами

т.е. при двух выбранных нулевых числах вариантов троек $13\cdot 15$

количество выбрать из a, c, e число, которое будет нулем – 3

количество выбрать из b, d, f число, которое будет нулем – 3

т.е. выбрать нулевые числа можно 9 способами.

т.е. если один ноль, то ~~способов~~ троек $9\cdot 13\cdot 15$

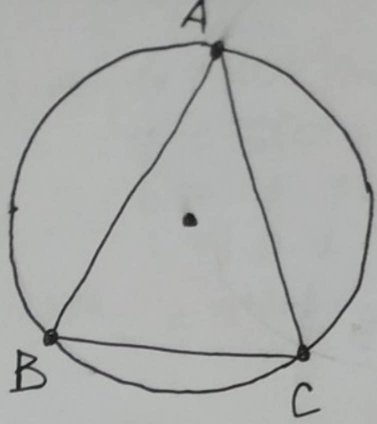
если два нуля, то троек $9=(3^2)$

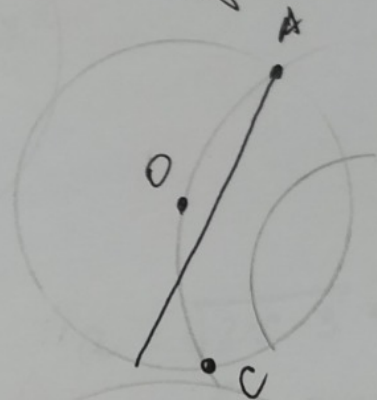
т.о.

Ответ: $9+9\cdot 13\cdot 15$

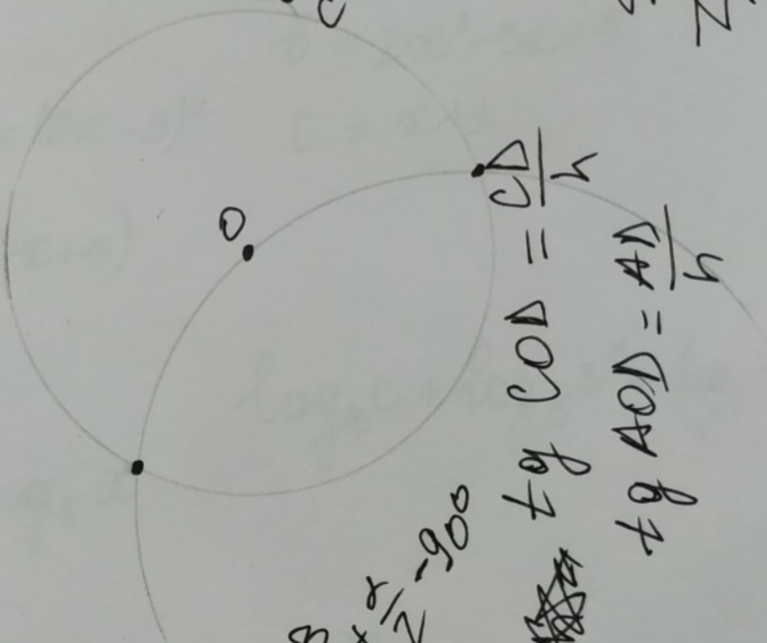
4

Черновик



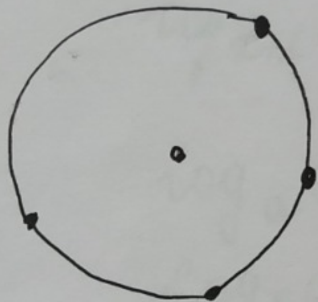


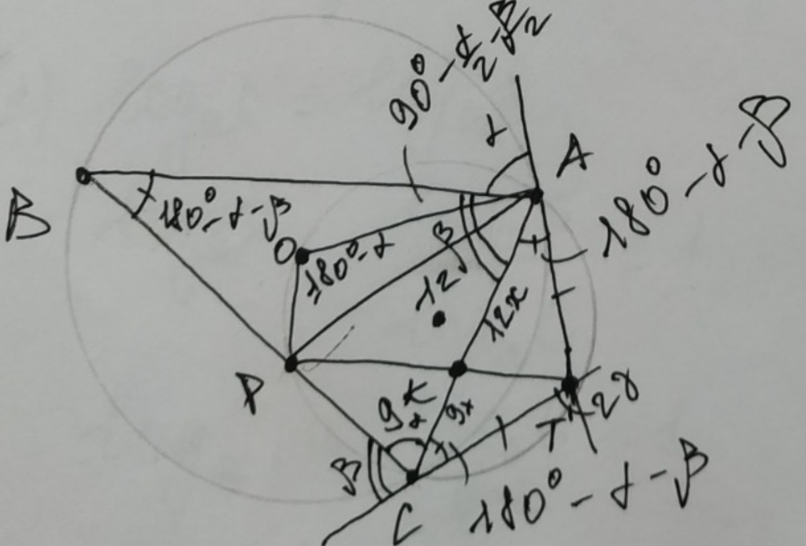
$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{H}{h}$$

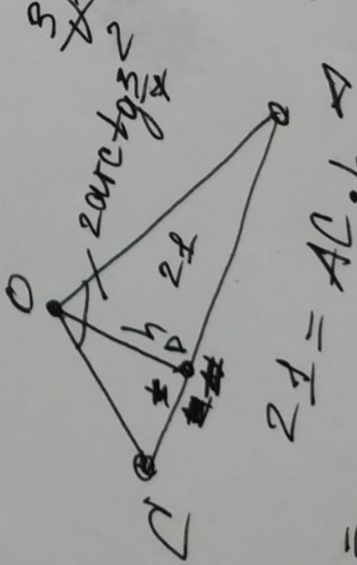


$$\operatorname{tg} COD = \frac{CD}{h}$$

$$\operatorname{tg} AOD = \frac{AD}{h}$$







$$2S = AC \cdot h$$

$$2S = S_{ODA} + S_{CDO} =$$

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 35 = 5 \cdot 7 \\ \cancel{a, b} \quad НОК(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 5 \cdot 7 \cdot 5^{a} \cdot 7^{b}$

$b = 5 \cdot 7 \cdot 5^{c} \cdot 7^{d}$

$c = 5 \cdot 7 \cdot 5^{l} \cdot 7^{k}$

$5^{18} \cdot 7^{16} = 5^{a+c+l} \cdot 7^{b+d+k}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\qquad a = \sqrt{2x-3} > 0$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\qquad b = 2x^2-3x+5$

$\qquad c = x+1$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_a c$ $\qquad \log_a c + \log_b a^4 + \log_c b$

$\log_b a^4 = 4\log_b a$

$\log_c b$

1) $\log_a c = \log_c b$

$\cancel{\log_a c}$ $\quad \dfrac{\log_c b}{\log_a c} = 1$

$\log_c a \ \log_c b = 1$

21104948 (U309813 M1297952)

Черновик

~~$\log_2$~~ $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{matrix}$$

$\sqrt{2x-3} = a$

$x+1 = b$

$2x^2-3x+5 = c$

$\log_a b$

$\log_c a^4$

$\log_b c$

$\log_b c - \log_a b = 0$

$$\log_b c - \frac{\log_c b}{\log_c a} = 0$$

$$\log_b c = \frac{1}{\log_b c \cdot \log_c a}$$

$$\log_b^2 c = \log_a c$$

21104948 (U309813 M1297952)

~~Чистовик~~ Черновик

№5)

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$ пусть $a = x+1$, $b = 2x^2-3x+5$, $c = \sqrt{2x-3}$

~~Пусть~~ Если $\log_b c = \log_a b$, тогда

$\log_b c = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_c a = \log_c^2 b$

$\frac{\ln a}{\ln c} = \frac{\ln^2 b}{\ln^2 c}$

$\ln a \ln c = \ln^2 b$