Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104895**

ID профиля: **239664**

Вариант 21

Черновик.

№1.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$ $(\nearrow, \mathbb{Z})$ $a_8 a_{17} > S + 27$ $a_1 - ?$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

$$S = \frac{a + (a+6d)}{2} \cdot 7 = \frac{2a+6d}{2} \cdot 7 = 7(a+3d)$$

$$\begin{cases} (a+7d)(a+16d) > 7(a+3d) + 27 \\ (a+10d)(a+13d) < 7(a+3d) + 60 \end{cases}$$

$$16 \times 7 = 112$$

$$\begin{cases} a^2 + 23ad + 112d^2 - 7a - 21d - 27 > 0 \quad | \cdot (-1) \\ a^2 + 23ad + 130d^2 - 7a - 21d - 60 < 0 \end{cases}$$

$18d^2 - 33 < 0$

$18d^2 - 33 < 0$

$18d^2 < 33$

$\cancel{18 \times 2 =}$

$d^2 < \frac{33}{18} = 1\frac{15}{18}$

$d^2 \leq 1$ $d = 0, 1, -1$!

$$\begin{cases} a^2 + \underline{23a} + 112 - \underline{7a} - 21 - 27 > 0 \\ a^2 + \underline{23a} + 130 - \underline{7a} - 21 - 60 < 0 \end{cases}$$

$$112 - 48 = 64$$

$$\begin{cases} a^2 + 16a + 64 > 0 \\ a^2 + 16a + 49 < 0 \end{cases}$$

$a^2 + 2 \cdot 8 \cdot a + 64 = (a+8)^2$

$$\begin{cases} (a+8)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -8 \\ (a+8)^2 < 15 \Rightarrow |a+8| \leq 3 \end{cases}$$

$49 - 64 = -(64 - 49) = -15$

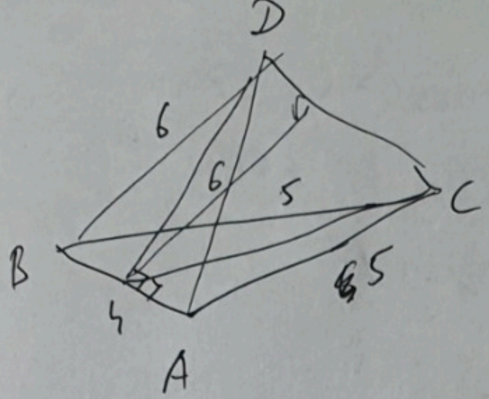
$-3 \leq a + 8 \leq 3 \quad | -8$

$$64 - 49 = 15$$

$-11 \leq a \leq -5$

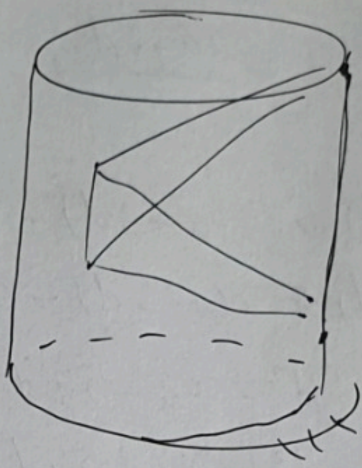
$\underline{-11, -10, -9, \square, -7, -6, -5}$

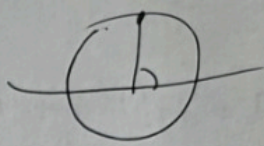
Черновик.

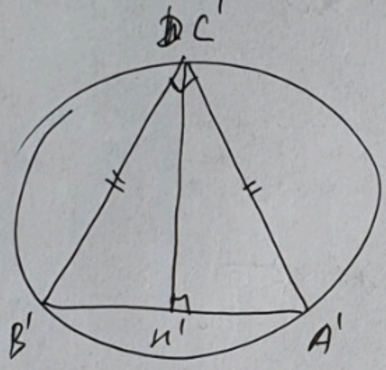


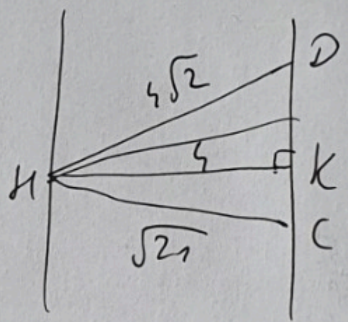
$$R = \frac{A'B'}{2\sin\angle B'C'A'}$$

$\uparrow max$









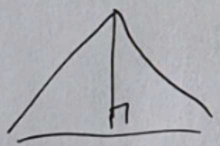
$HD = \sqrt{6^2 - 2^2} =$

$= \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} =$

$= 4\sqrt{2}$

$HC = \sqrt{5^2 - 2^2} =$

$= \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$



$\cancel{\begin{cases} 32 = HK^2 + DK^2 \\ 21 = HK^2 + KC^2 \end{cases}}$

$\cancel{DK + KC = x} \to$

$\cancel{11 = DK^2 - KC^2 = (DK - KC)(DK} + KC)$

$\cancel{11 = (DK - KC)x}$

$\cancel{11 = DK^2 + (x - DK)^2} = 2DK^2 + x^2 - 2x \cdot DK$

$p = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{21} + x}{2}$ $\qquad x^2 = 32 + 21 - 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\cos\varphi =$

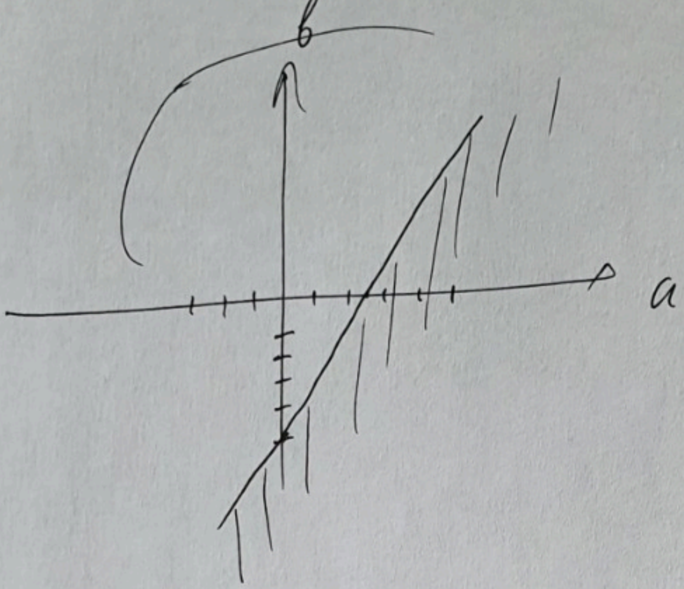
$= 53 - 4\sqrt{42}\cos\varphi$

$S = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}(53 - 4\sqrt{42}\cos\varphi)\cdot HK$

$\hookrightarrow HK$

Черновик.

$a^2+b^2 \le \min\{8a-4b,\ 20\}$



$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b, & 8a-4b<20 \\ a^2+b^2 \le 20, & \text{иначе} \end{cases}$$

$8a<20+4b$

$4b>8a-20$

$b>2a-5$

$a^2-8a+b^2+4b \le 0$

$(a^2-8a+16)-16+(b^2+4b+4)-4 \le 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le$

Чистовик.

№ 1.

Пусть первый член прогрессии — x, разность пр. — d. Тогда можем переписать условие в следующем виде:

$$S = \frac{2x+6d}{2}\cdot 7 = 7(x+3d), \qquad x\in\mathbb{Z},\ d\in\mathbb{Z},\ d>0,$$

$$\cancel{+a}\ (x+7d)(x+16d) > 7(x+3d)+27 \qquad (1)$$

$$(x+10d)(x+13d) < 7(x+3d)+60 \qquad (2)$$

Нужно найти все возможные значения x.

Перепишем условие (1) и (2) в виде:

$$\begin{cases} x^2+23xd+112d^2-7x-21d-27>0 \\ x^2+23xd+130d^2-7x-21d-60<0 \end{cases}$$

Отсюда следует (если домножить первое нер-во на -1 и сложить со вторым), что $18d^2-33<0$, или $d^2<\frac{33}{18}$. Т.к. $1<\frac{33}{18}<2$, $-1\le d\le 1$. По усл. $d>0 \Rightarrow \underline{d=1}$.

С учётом этого перепишем условия (1) и (2):

$$\begin{cases} \cancel{a^2+z}\ x^2+23x+112-7x-21-27>0 \\ x^2+23x+130-7x-21-60<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+16x+64>0 \\ x^2+16x+49<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2>0 \\ (x+8)^2<15 \end{cases}$$

$$0<|x+8|<\sqrt{15}$$

$$1\le|x+8|\le 3$$

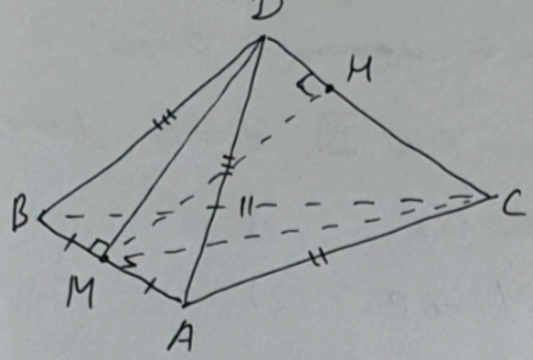
$x\in\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$ — все возможные знач. x.

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

21104895 (U239664 M1303074)

Чистовик.

№2.



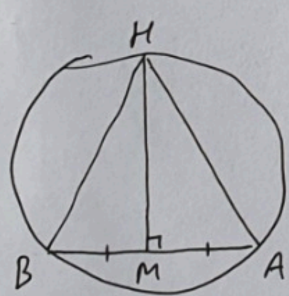
Отметим середину BA — точку M. Т.к. $\triangle BAD$ — равноб., медиана DM является высотой, $DM \perp AB$.
По т. Пифаг. $AM^2+DM^2=AD^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow DM = \sqrt{6^2-2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Т.к. $\triangle BAC$ — равноб., медиана ~~Я~~ CM явл. высотой, $CM \perp AB$. По т. Пифаг. $AM^2+CM^2=AC^2 \Rightarrow CM = \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$.

$DM \perp AB$, $CM \perp AB$, $DM \cap CM = M \Rightarrow (DCM) \perp AB \Rightarrow DC \perp AB$.
Таким образом, DC и AB — скрещив. прямые, угол между к-рыми равен $90°$. Если в $\triangle CMD$ провести выс. MH, она будет равна расстоянию между AB и CD: $MH \perp CD$, $(DCM) \perp AB \Rightarrow MH \perp AB$.
Заметим, что H не обязательно лежит на отрезке DC.

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью ABH.
$(ABH) \perp DC$ (т.к. $AB \perp DC$, $MH \perp DC$, $MH \cap AB = M$), $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ сечение перпенд. оси цилиндра и равно ~~о~~ основаниям.

По усл. точки A и B лежат на бок. пов. цилиндра $\Rightarrow$ они лежат на границе сечения. $H \in CD$, к-рый лежит на бок. пов. цилиндра $\Rightarrow H$ тоже лежит на границе сечения. Значит, $\triangle ABH$ вписан в окр-ть, ограничивающую сечение.



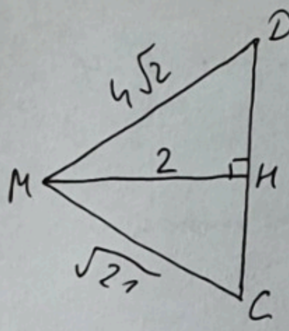
По т. синусов $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle AHB}$, где R — радиус сечения, равный радиусу цилиндра. R наименьший, когда $\sin\angle AHB$ наибольший, т.е. $\sin\angle AHB = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AHB = 90°$. Т.к. ~~HB — сер.~~ HM — сер. перп. к AB, $HB = HA \Rightarrow \triangle ABH$ — прямоуг. равнобедр. $\Rightarrow HM = \frac{1}{2}AB = 2$.

Итак, радиус цилиндра наименьший, когда $HM = 2$. Из $\triangle CMD$ найдём ~~MH~~ CD.

21104895 (U239664 M1303074)

Чистовик.

№ 2 (продолжение).



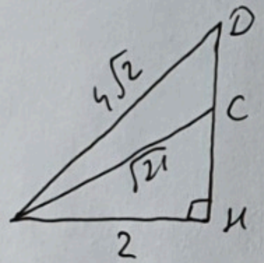
I. Если H лежит между C и D, $CD = HC + HD$.

По т. Пифаг. $HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$,

$HD = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$.

II. Если H лежит вне отрезка CD, то, т.к. $MC < MD$, C лежит между H и D. Тогда $CD = HD - HC$.



По т. Пифаг. $HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$,

$HD = \sqrt{32-4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

$CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$.

Ответ: $2\sqrt{7} - \sqrt{17}$, $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$.

21104895 (U239664 M1303074)

Чистовик.

№ 3.

~~Ур~~ Нер-во $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ задаёт в пл-ти Oxy ~~ок~~ круг с центром $(a; b)$ и радиусом $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Нер-во $a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$ можно записать так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ 8a-4b < 20 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b \ge 20 \end{cases} \end{array}\right.$$

или так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ 8a-4b < 20 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b \ge 20 \end{cases} \end{array}\right.$$

Эта система задаёт в пл-ти Oab фигуру из двух частей: части круга с центром $(4; -2)$ и радиусом $2\sqrt{5}$, находящейся ниже прямой $8a-4b=20$, и части круга с центром $(0; 0)$ и радиусом $2\sqrt{5}$, находящейся выше или на прямой $8a-4b=20$.

Эта фигура выглядит примерно так:

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104895**

ID профиля: **239664**

Вариант 21

<u>Черновик.</u>

2. $2\log_b a = \log_a c, \quad 2\log_c b = \log_a c - 1$

$b^k = a^2, \quad a^k = c \qquad c^m = b^2 c, \quad a^m = c$

$m = k$

$$\begin{cases} a^k = c \\ b^k = a^2 \\ c^{k-1} = b^2 \end{cases}$$

$a^{k^2 - k} = b^2$

$b^{\frac{k^2}{2}(k-1)} = b^2$

$\frac{k^2}{2}(k-1) = 2$

$k^2(k-1) = 4$

$k^3 - k^2 - 4 = 0$

$(k^2 + k + 2)(k - 2) = 0$

$D = 1^2 - 4\cdot 1 \cdot 2 < 0$

$k = 2$

$$\begin{array}{r|l} k^3 - k^2 - 4 & k - 2 \\ \hline -(k^3 - 2k^2) & k^2 + k + 2 \\ k^2 & \\ -(k^2 - 2k) & \\ 2k - 4 & \\ -(2k - 4) & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} a^2 = c \\ b = a \end{cases}$$

$\cancel{c = b^2}$

$x + 1 = 2x - 3 \to \underline{x = 4}, \quad a = b = 5$

$c = 25$ ✓

$(x+1)^2 = 2x - 3$

$x^2 + \cancel{2x} + 1 = \cancel{2x} - 3$

$x^2 + 1 = -3$

$x^2 = -4$

$\otimes$

3. $2\log_c b = \log_a c, \quad 2\log_b a = \log_a c - 1$

$c^k = b^2, \quad a^k = c \qquad b^m = ba^2, \quad a^m = c$

$k = m$

$$\begin{cases} a^k = c \\ b^{k-1} = a^2 \\ \cancel{a = c} \quad c^k = b^2 \end{cases}$$

$a^{k^2} = b^2$

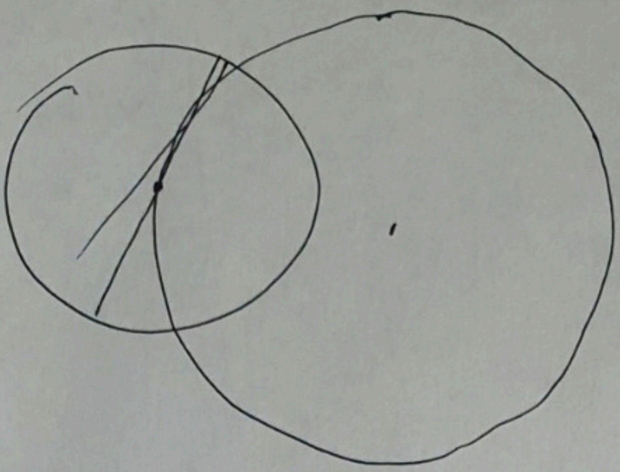
$b^{\frac{k-1}{2}\cdot k^2} = b^2$

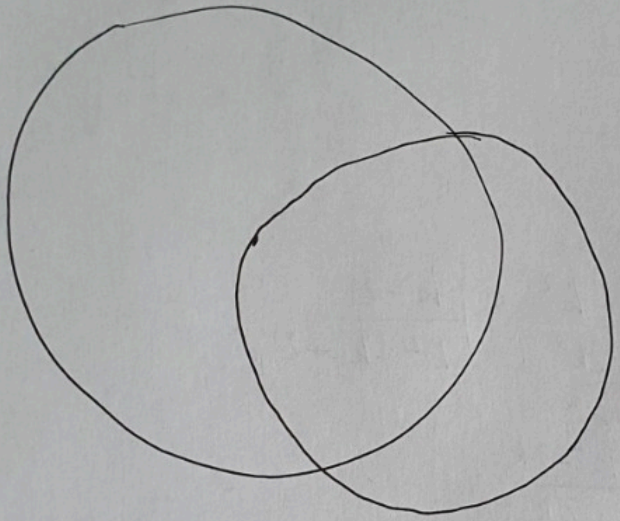
$k^2(k-1) = 4 \to k = 2$

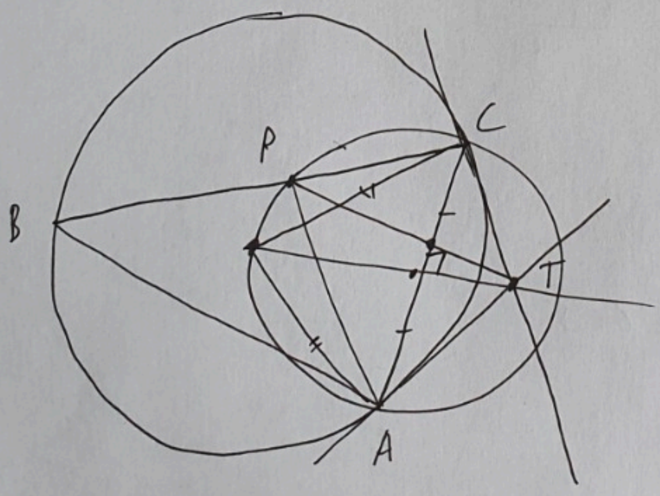
$a^2 = c = b$

$\cancel{b = a^2}$

Черновик.







21104895 (U239664 M1303075)

Черновик.

№5.

Усл.: $x+1>0 \to a$ $(>0, \neq 1)$

$2x-3 > 0 \to b$

$2x^2-3x+5>0 \to c$

$\log_{\sqrt{b}} a, \ \log_c b^2, \ \log_a c$

$\downarrow$ $\downarrow$

$2\log_b a$ $2\log_c b$

1. $2\log_b a = 2\log_c b, \ \ \log_a c = 2\log_c b - 1$

$\cancel{k} = \log_b a = \log_c b = \log_a c + 1$

$b^k = a, \ \ c^k = b \ \ \ a^k = ac$

$m = \log_a(ac) = \cancel{2}\log_c(b^2)$

$a^m = ac, \ \ c^m = b^2$ $1 = \log_a a$

$m = 2k$

$$\begin{cases} a^{2k} = ac \\ c^{k} = b \\ b^k = a \end{cases}$$

$(c^{k^2})^{2k} = c^{k^2+1}$

$2k^3 = k^2+1$

$2k^3 - k^2 - 1 = 0$

$(2k^2+k+1)(k-1) = 0$

$D = 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 < 0$

$k = 1$

$$\begin{array}{r|l} 2k^3 - k^2 - 1 & k-1 \\ \underline{2k^3 - 2k^2} & \overline{2k^2+k+1} \\ k^2 & \\ \underline{k^2 - k} & \\ k - 1 & \\ \underline{k-1} & \\ 0 & \end{array}$$

$a = c = b \to (2, 2, 1)$

$x+1 = 2x-3$

$x = 4 \to a = b = 5$

$2\cdot 4^2 - 3\cdot 4 + 5 = 25$ $\otimes$

$x = \log_{\sqrt{b}} a$

$(\sqrt{b})^x = a$

$b^{\frac{x}{2}} = a$

$\frac{x}{2} = \log_b a$

$x = 2\log_b a$

$((a^{k-1})^{\frac{k}{2}})^k = a^2 \ \cancel{b}\ \cancel{(a^{\frac{2}{k}})^2}$

$b = c^{\frac{k}{2}} = (a^{k-1})^{\frac{k}{2}}$

Черновик.

$a = A\cdot 35,\ b = B\cdot 35,\ c = C\cdot 35,$ (A, B, C) — в.пр.

$a = 5^{\alpha}\cdot 7^{A},\ b = 5^{\beta}\cdot 7^{B},\ c = 5^{\gamma}\cdot 7^{C}$

$НОД(a, b, c) = 5^{\min(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot 7^{\min(A,B,C)} \Rightarrow \min(\alpha,\beta,\gamma) = m\ldots = 1$

$НОК(a, b, c) = 5^{\max}\cdot 7^{\max} \Rightarrow 18 = \max(\alpha,\beta,\gamma),\ 16 = \max(A,B,C)$

$5^1\cdot 7^1,\ 5^1\cdot 7^1,\ 5^{18}\cdot 7^{16}$

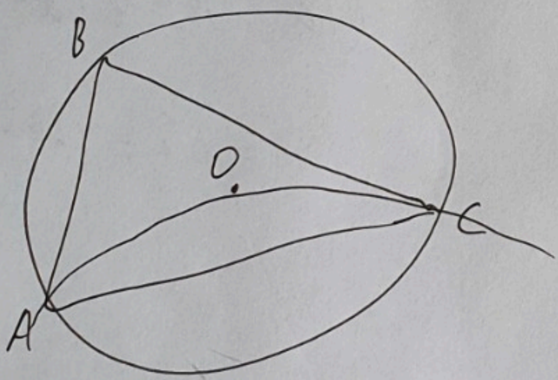
$a \to (\alpha; A)$

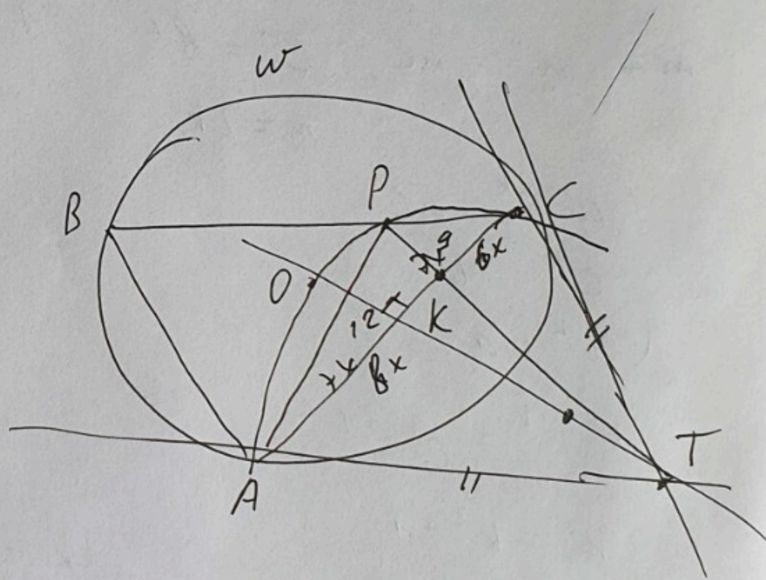
$a, b, c \to (\alpha, A, \beta, B, \gamma, C)$

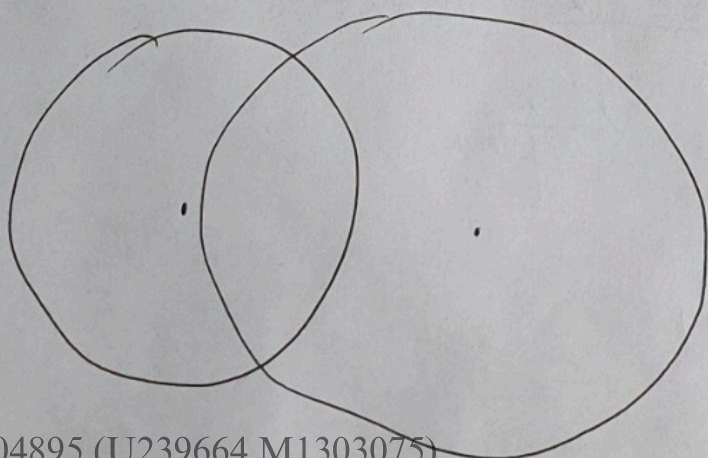
$1,\ x,\ 18$

$17 \times 6 = 102$ $\quad 15 \times 6 = 90$

$102 \times 90 = 9180$







Чистовик.

№4.

В разложении НОК$(a; b; c)$ на простые множители присутствуют только множители 5 и 7, значит, в ~~р~~ разложениях a, b, c на пр. множ. могут присутствовать только множ. 5 и 7. (Иначе НОК не делилось бы на a, b или c). Тогда можем представить числа a, b, c единственным способом как

$a = 5^{\alpha}\cdot 7^{A}$, $b = 5^{\beta}\cdot \overset{7}{\cancel{8}}{}^{B}$, $c = 5^{\gamma}\cdot 7^{C}$, где $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ — целые числа

$$\text{НОД}(a, b, c) = 5^{\min(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot 7^{\min(A,B,C)} = 5\cdot 7 \Rightarrow \min(\alpha,\beta,\gamma)=1,\ \min(A,B,C)=1.$$

$$\text{НОК}(a, b, c) = 5^{\max(\alpha,\beta,\gamma)}\cdot 7^{\max(A,B,C)} = 5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow \max(\alpha,\beta,\gamma)=18,\ \max(A,B,C)=16.$$

Подходят тройки (α, β, γ) вида $(1, x, 18)$, $(1, 18, x)$, $(x, 1, 18)$, $(x, 18, 1)$, $(18, 1, x)$, $(18, x, 1)$, где $x \in \{2, 3, 4, \dots, 17\}$ — их всего $6\cdot 16$, а также $(1, 1, 18)$, $(1, 18, 1)$, $(18, 1, 1)$, $(18, 18, 1)$, $(18, 1, 18)$, $(1, 18, 18)$ — их 6. Итого $6\cdot 17$ троек (α, β, γ).

Подходят тройки (A, B, C) вида $(1, x, 16)$, $(1, 16, x)$, … $(18, x, 1)$, где $x \in \{2, 3, 4, \dots, 15\}$ — их $6\cdot 14$, а также $(1, 1, 16)$, $(1, 16, 1)$, $(16, 1, 1)$, $(16, 16, 1)$, $(16, 1, 16)$, $(1, 16, 16)$ — их 6. Итого $6\cdot 15$ троек (A, B, C).

Числа a, b, c однозначно определяются числами $\overset{\alpha}{\cancel{\gamma}}, \beta, \gamma, A, B, C$, ~~поэтому так~~ причём разные числа $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ соответствуют разным числам a, b, c. Поэтому искомых троек (a, b, c) столько же, сколько шестёрок $(\alpha, \beta, \gamma, A, B, C)$, а их $(6\cdot 17)\cdot(6\cdot 15) = 102\cdot 90 = 9180$.

Ответ: 9180.

21104895 (U239664 M1303075)

Чистовик.

№5.

Обозначим $x+1=a$, $2x-3=b$, $2x^2-3x+5=c$.

Даны числа $\log_{\sqrt{b}} a$, $\log_c b^2$, $\log_a c$. Они существуют, когда каждое из чисел a, b, c положительно и неравно 1. Первое число можем переписать как $\log_b a^2$, т.к. $\log_{\sqrt{b}} a = 2\log_b a = \log_b a^2$.

Рассмотрим все 3 случая.

I. $\log_b a^2 = \log_c b^2$, $\log_a c = \log_c b^2 - 1$.

Пусть $k = \log_b a^2 = \log_c b^2 = \log_a c + 1$.

Тогда $b^k = a^2$, $c^k = b^2$, $a^{k-1} = c$ (т.к. $\log_a c + 1 = \log_a (c \cdot a)$).

Выражая b через c, c через a, получаем $\left(\left(a^{k-1}\right)^{\frac{k}{2}}\right)^k = a^2$, откуда

$k^2(k-1)=4$, $k^3-k^2-4=0$, $(k^2+k+2)(k-2)=0$. У ур-ия

$k^2+k+2=0$ нет реш., т.к. $D = 1^2-4\cdot1\cdot2<0$ $\Rightarrow$ $k=2$.

Получим $b^2=a^2$, $c^2=b^2$, $a=c$ $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Таким образом, первый случай возможен при $a=b=c$.

$x+1=2x-3 \Rightarrow x=4 \Rightarrow a=b=5$.

$c = 2\cdot4^2-3\cdot4+5 = 25 \neq 5$ $\Rightarrow$ ~~во~~ первый случай невозможен.

II. $\log_b a^2 = \log_a c$, $\log_c b^2 = \log_a c - 1$.

Пусть $k = \log_b a^2 = \log_a c = \log_c b^2 + 1$.

Тогда $b^k = a^2$, $a^k = c$, $c^{k-1} = b^2$.

Выражая c через a, a через b, получаем $\left(\left(b^{\frac{k}{2}}\right)^k\right)^{k-1} = b^2$, откуда

$k^2(k-1)=4 \Rightarrow k=2$. $b^2=a^2$, $a^2=c$, $c=b^2$ $\Leftrightarrow$ $a=b$, $c=a^2$.

$x+1=2x-3 \Rightarrow x=4 \Rightarrow a=b=5$

$c = 2\cdot4^2-3\cdot4+5 = 25 = 5^2$ $\Rightarrow$ второй ~~случ~~ случай возм. при $\underline{x=4}$.

III. $\log_c b^2 = \log_a c$, $\log_b a^2 = \log_a c - 1$.

Пусть $k = \log_c b^2 = \log_a c = \log_b a^2 + 1$.

Тогда $c^k = b^2$, $a^k = c$, $b^{k-1} = a^2$.

Выражая c через a, a через b, получаем $\left(\left(b^{\frac{k-1}{2}}\right)^k\right)^k = b^2$, откуда

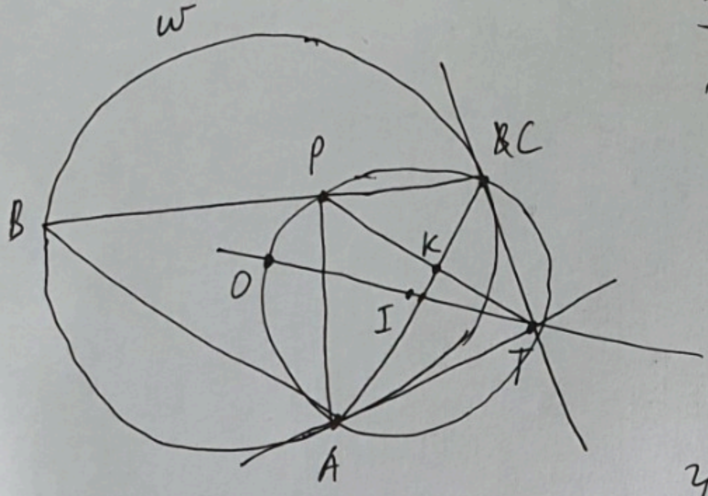
$k^2(k-1)=4 \Rightarrow k=2$, $c^2=b^2$, $a^2=c$, $b=a^2$ $\Leftrightarrow$ $a^2=c=b$.

$(x+1)^2 = 2x-3$ $\Leftrightarrow$ $x^2=-4$ – нет корней $\Rightarrow$ случай невозможен.

Ответ: при $x=4$.

Чистовик.

№6.



Пусть I — центр ок-ти, проходящей через A, O и C. $OA = OC$ — радиусы ω, $IA = IC$ — радиусы второй ок-ти, $TA = TC$ — отрезки касат. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ точки O, I, T лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к AC.

У $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ общая высота,

поэтому $\dfrac{AK}{CK} = \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$.

21104895 (U239664 M1303075)