# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104890**

ID профиля: **860092**

Вариант 21

$\boxed{S_7 = a_1 + a_2 + a_3 = 7a_1 + 21d}$

черновик

$d_1 \geq 1$ т.к по условию числа целые и возрастают.

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

Найти $a_1$ все значения

$$\begin{array}{r} 16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d) \cdot (a_1 + 16d) = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \quad (а) \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 13d) = a^2 + 23a_1 d + 130 d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \quad (б) \end{cases}$$

вычтем из б-а : получим

$18d^2 < 45.$

$d^2 < \frac{45}{18}$

$45 / 18$

$1 \leq d^2 \leq 3$ т.к $d$ - целое и $\geq 1$

$d = 1$

подставим полученное $d$ получим $a_1^2 + 16a + 64 > 0$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$ $a \neq -8.$

$a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2}$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 4 \\ \hline 196 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \\ - 196 \\ \hline 60 \end{array}$$

$-8 \pm \sqrt{15}.$

$-8 - \sqrt{15} < a_1 < \sqrt{15} - 8$

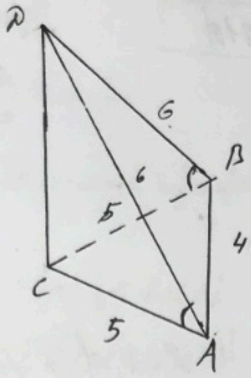
$-12 < -8 - \sqrt{15} < -11$ и $-6 < \sqrt{15} - 8 < -4$

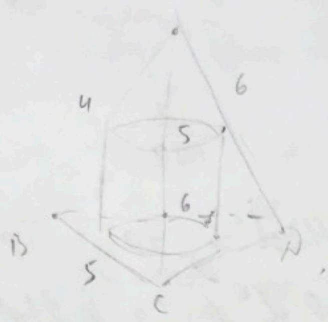
$-8-\sqrt{15}$ $\sqrt{15}-8$

Ответ: ~~-8~~ $-11, -10 - 9, -7 -6; -5.$

~~б~~ ~~т~~ проведем высота ДН и СН к основанию равнобедр △

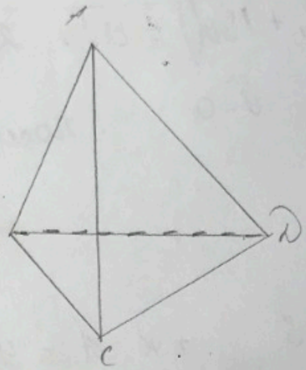
Черновик.

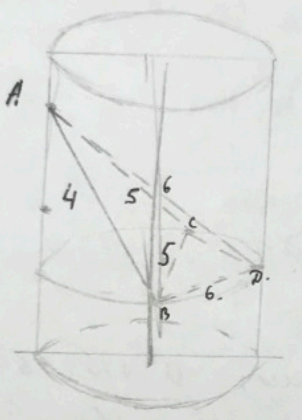


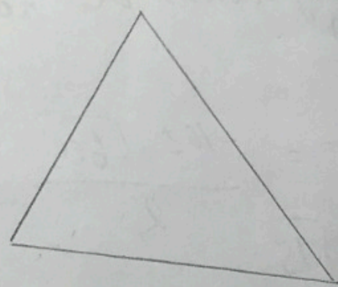



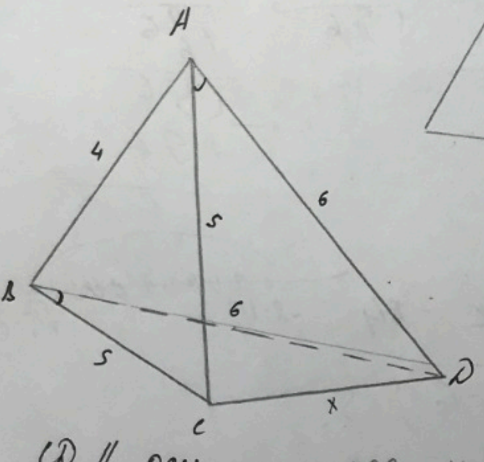

Дано:

Найти: все значения CD






$\Delta ACD = \Delta ABC$ по 3-м сторонам

$\angle CAD = \angle DBC$

Найти x.

т.к CD ∥ оси цилиндра и все стороны лежат на боковой поверхности, то CD лежит на бок поверх и ⊥ основанию

по условию все вершины опираются на боковую сторону и радиус минимального

тогда $R = \frac{1}{2} AB = 2$

21104890 (U860092 M1296381)

Чисто вых.

Задание 1

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = S_7$

$7a_1 + 21d = S_7$

по условию арифметическая прогрессия возрастает, а ее числа - целые.

Значит $d \geq 1$

$\begin{cases} \underline{a_8 \cdot a_{17}} > S_7 + 27 \\ \underline{a_{11} \cdot a_{14}} < S_7 + 6 \end{cases}$ $(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) = a^2 + 23a_1d + 112d^2$

$(a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 13d) = a^2 + 23a_1d + 130d^2$

$\begin{cases} a^2 + 23a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 & - a \\ a^2 + 23a_1d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 & - b. \end{cases}$

Вычтем из (b) - (a) и получим

$18d^2 < 43$

$d^2 < \frac{43}{18}$ т.к $d$ - целое

$1 \leq \frac{43}{18} \leq 3$ значит $d = 1$

Подставим полученное значение $d$ и получим:

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \Rightarrow a \neq -8.$

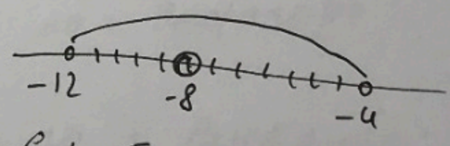
$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 196}}{2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}.$

$-8 - \sqrt{15} < a_1 < \sqrt{15} - 8.$

рассмотрим числа $-8 - \sqrt{15}$ и $\sqrt{15} - 8$.

$-12 < -8 - \sqrt{15} < -11$ и $-6 < \sqrt{15} - 8 < -4$

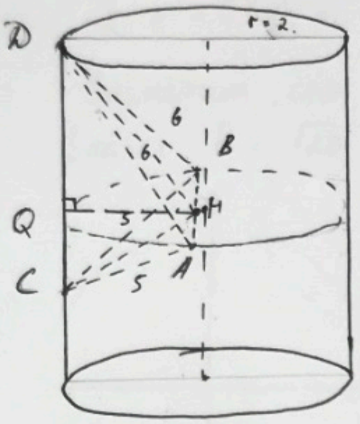
тогда $a \in$ → 

Значит $a = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5.$

Чистовик.

Задание 2.




Дано: тетраэдр $ABCD$ вписанный в цилиндр
$AB = 4$ ; $AC = CB = 5$ ; $AD = DB = 6$.
$CD \parallel$ оси цилиндра ; R-min
Найти: $CD$.

Решение:

т.к $CD \parallel$ оси цилиндра и все ~~вершины~~ вершины лежат на боковой поверхности цилиндра, то $CD$ лежит на боковой поверхности и $\perp$ основанию цилиндра.

т.к все вершины лежат на боковой поверхности и радиус, по условию, должен быть наименьшим, то $AB = 2R$ и $R = 2$. $\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)$

Рассмотрим $\Delta ADB$ и $\Delta CAB$ - они равнобедренные. Проведем высоту/медиану и биссектрису $CH$ и $DH$ к основанию этих треугольников - $AB$.

тогда по т. Пифагора получим, что:

$DH = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$CH = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$. т.к точка $H$ лежит на $AB$, а $AB$ - диаметр цилиндра, и точка $H$ делит $AB$ пополам, то $AB$ лежит на оси цилиндра.

Проведем из точки $H$ к стороне $CD$ перпендикуляр $QH$
т.к $CD \perp$ основанию цилиндра, то $QH \parallel$ основанию цилиндра.
значит $QH = R = 2$

Рассмотрим прямоугольный $\Delta DQH$. по т. Пифагора:

$DQ = \sqrt{(\sqrt{32})^2 - (2^2)} = \sqrt{28}$

Рассмотрим прямоугольный $\Delta QHC$. по т. Пифагора:

$CQ = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - (2^2)} = \sqrt{17}$

следовательно, т.к $CD = DQ + CQ$, значит

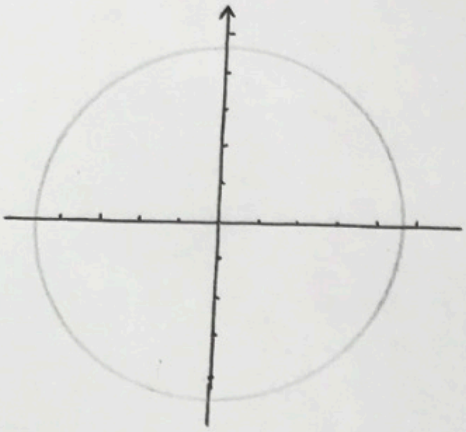
$CD = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$.

Задание 3 Чистовик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20 & (1) \\ a^2+b^2 \leqslant \min(8a-4b, 20) & (2) \end{cases}$$

Заметим, что 1 неравенство - это уравнение R окружности
Значит $R=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.



21104890 (U860092 M1296381)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104890**

ID профиля: **860092**

Вариант 21

Цирковин

$x+1 >$

5. $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$; $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$;

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$;

рассмотрим все случаи

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1 = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1 = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{(x+1)}(2x^2-3x+5) \\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1 = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \\ \log \end{cases}$$

Задание 4. чистовик.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 35 & (1) \\ НОК(a,b,c) = 5^{18}\cdot 7^{16} & (2) \end{cases}$$

числа $a, b, c$ - натуральные

Из (1) уравнения следует, что ~~числа~~ $35 = 5\cdot 7$, значит, можно понять, что есть множители $5^1$ и $7^1$

Из (2) уравнения следует, что есть множители $5^{18}$ и $7^{16}$

Соответственно числа $a$, $b$ и $c$ имеют вид $5^n\cdot 7^m$

$m$ принимает значения от 1 до 16,

а $n$ принимает значения от 1 до 18.

Рассмотрим всевозможные случаи:

Для 5

(1) Всего может быть:

$5^{18}; 5^1; 5^x$ - для чисел $a, b, c$

но, т.к. перестановки данных чисел - разные по условию, то тогда:

$3! = 6$

(2) $x$ в данном случае может принимать значения от 2 до 17 включительно

Значит всего 16 различных $x$ тогда

Итого будет: $6\cdot 16 = 96$.

(3) Если ~~x~~ будет $x = 1$ или же 18 то перестановок $3 + 3 = 6$

тогда всего 102

Для 7.

(1) Аналогично, как и для 5

$7^{16}; 7^1, 7^x$

$3! = 6$

Аналогично $x$ может принимать значения от 2 до 15

Значит 14 различных $x$.

Итого. $6\cdot 14 = 84$

Аналогично если $x = 1$ или 16, то перестановок 6

тогда всего 90

Итого

$$102\cdot 90 = 9180$$

Ответ: 9180.

Задание 5 Чистовик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ ; $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ ; $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

Заменим $2x-3$ – $b$ $x+1$

$x+1$ – $a$

$2x^2-3x+5$ – $c$

тогда $\log_{\sqrt{b}} a$ ; $\log_c b^2$ ; $\log_a c$

$2\log_b a$ ; $2\log_c b$ ; $\log_a c$

Рассмотрим: $(2\cdot\log_b a)\cdot 2\log_c b = \log_a c$

$\log_a c = \frac{4}{\log_b a\cdot\log_c b}$

Рассмотрим всевозможные случаи:

I $\log_b a = \log_c b = \frac{4}{\log_b a\cdot\log_c b}+1$

II $\log_b a = \frac{4}{\log_b a\cdot\log_c b} = \log_c b+1$

III $\log_b a+1 = \frac{4}{\log_b a\cdot\log_c b} = \log_3 b$

в первом случае

$\log_b a = 2$ , $\log_c b = 2$

Во втором: $\log_b a = 2$, $\frac{4}{\log_b a\cdot\log_c b} = 1$

В третьем случае:

$\log_b a = 1$ ; $\frac{4}{\log_b a\cdot\log_c b} = 2$

Подставим эти значения и получим, что:

1) корней нет

2) корней нет

3) $2x-3 = x+1$ тогда $x^2+2x+1 = 2x^2-3x+5$

$x = 4$

$x^2-5x+4=0$

$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm 3}{2}$

$x=4$, $x=1$

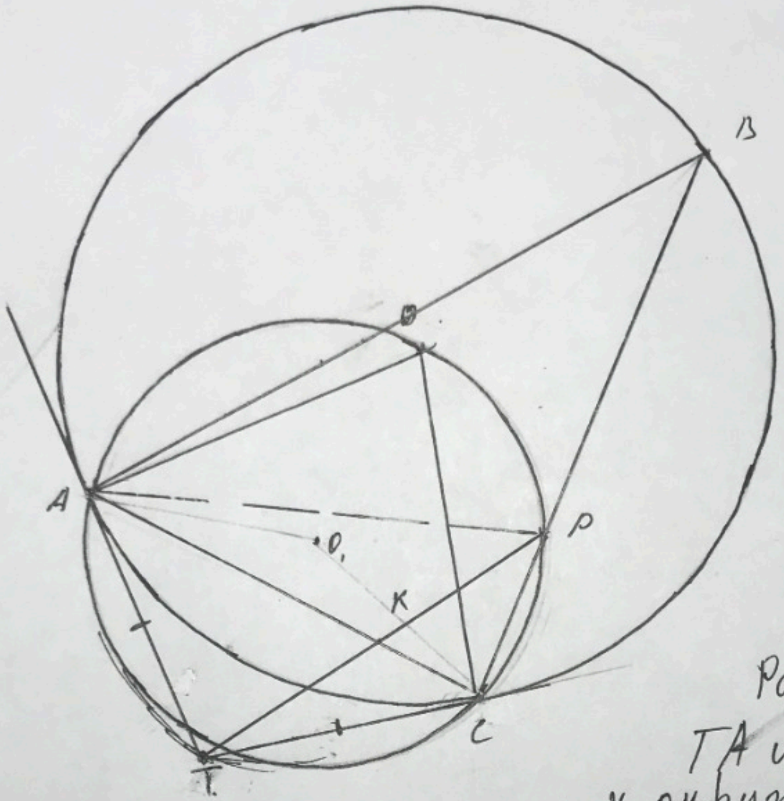
1 – не удовлетворяет ОДЗ

т.к. $\sqrt{2x-3}>0$.

Ответ: 4.

21104890 (U860092 M1296382)

Задание 6. Чистовик.




Дано:
$\triangle ABC$ вписанный в окружность $\omega$ с центром $O$;
Окружность с центром $O_1$,
$P, A, O \in$ окружности с центром $O_1$
$S_{APK} = 12$, $S_{CPK} = 9$.
Найти: $S_{\triangle ABC}$ - ?

Решение
Рассмотрим $\triangle ATC$
$TA$ и $TC$ - касательные к окружности, значит, они равны. $\triangle ATC$ - равнобедренный
пусть $\angle TAC = \angle ACT = \alpha$.
$\angle OAT = \angle OCT = 90$ (как касательные)
$\Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = 180°$, следовательно, все точки лежат на окружности $\omega$, $\angle AOC = 2\alpha$,
$\angle APT = \angle ACT = \alpha$, т.к. опираются на $\cup AT$
Аналогично и $\angle TPC = \alpha$
Тогда: $\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{12}{9}$, значит $AP = \frac{4}{3} PC$
$\triangle ABP \sim \triangle ACT$ по 2-м углам, тогда а
$\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} \Rightarrow AK = \frac{4}{3} KC$
пусть ~~BP~~ $PC = x$
$S_{ABP} = \frac{1}{2} BP \cdot AP \cdot \sin(180 - 2\alpha) = \frac{\frac{4}{3}x \cdot \frac{4}{3}x \cdot \sin 2\alpha}{2}$ ≠

$S_{APC} = S_{ABP} + S_{CPK} = 9 + 12 = 21$
$S_{APC} = \frac{\frac{4}{3}x \cdot x \cdot \sin 2\alpha}{2}$

$S_{\triangle ABP} = \frac{4}{3} S_{\triangle APC} = \frac{4}{3} \cdot 21 = 28$ тогда $S_{ABC} = 28 + 21 = 49$



Ответ: 49.