Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104833**

ID профиля: **856760**

Вариант 21

Чистовик

Задача №1

$S = \sum_1^7$

$\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ a_{11} a_{14} > S+60 \end{cases}$ $a_8 = a_1 + 7d$; $a_{17} = a_1 + 16d$; $a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{14} = a_1 + 13d$

$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > S+27, \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60, \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S+27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S+60 \end{cases} \Rightarrow$

$18d^2 < 33$

Т.к. прогрессия возраст., $d = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0, \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -8 \\ (a_1+8)^2 - 13 < 0 \Rightarrow a_1+8 \text{ по модулю } < \sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow$

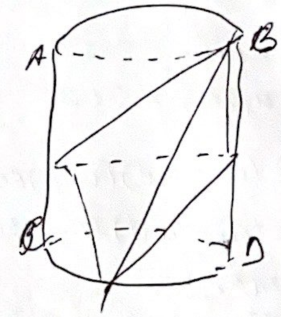
$a_1 \in \{-5; -6; -7; -8; -9; -10; -11\}$

Используя выводы из системы, получим то, что $a_1 \notin -8$

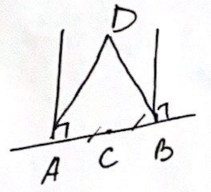
Ответ: $a_1 \in \{-5; -6; -7; -9; -10; -11\}$

Задача №2

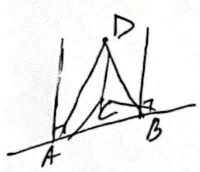
Т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, AB лежат на одинак. расст. от C и D соотв-но, то $\triangle ADC = \triangle BDC$ и $AB \parallel$ основанию цилиндра. Тогда наим. радиус будет тогда, когда AB – диаметр цилиндра т.к. AB не может превышать знач диаметра (не может лежать в пл-ти основания).

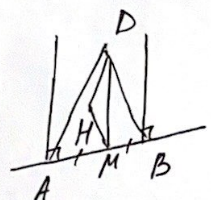


Рассмотрим возможный вариант:



Посчитаем отдельно расстояния от C и D до пл. AB и сложив/отняв их, получим искомое CD





H – основание высоты из D на AB.

M – середина AB, тогда MH – r.

$MD^2 = BD^2 - MB^2$

$DH^2 = MD^2 - HM^2 \Rightarrow DH = \sqrt{BD^2 - MB^2 - HM^2} = \sqrt{BD^2 - 2r^2} = \sqrt{28}$

Аналогично CH:

$CH = \sqrt{BC^2 - 2r^2} = 17$

Длина CD может приним. знач. ~~$\sqrt{28+17}$ или $\sqrt{28-17}$~~ $\sqrt{28} + \sqrt{17}$ или $\sqrt{28} - \sqrt{17}$

* * * Черновик * * *

① S – сумма первых 7-ми членов арифм. прогрессии $\boxed{a_1 - ?}$

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27, \\ a_{11} a_{14} < S+60, \end{cases}$$

возраст. арифм. прогрессия – прогрессия с положит. разностью

$S = \sum_1^7 a_i$ $\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ a_{11} a_{14} > S+60 \end{cases}$ $a_8 = a_1 + 7d$ $a_{17} = a_1 + 16d$ $a_{11} = a_1 + 10d$ $a_{14} = a_1 + 13d$

$$\begin{cases} (a_1+7d)\cdot(a_1+16d) > S+27, \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60, \end{cases} \begin{cases} a_1^2 + 23 a_1 d + 112d^2 > S+27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S+60 \end{cases} \Rightarrow$$

$18d^2 < 33 \Rightarrow d$

Т.к. прогрессия возр., $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -8 \\ (a_1+8)^2 - 15 < 0 \Rightarrow \end{cases}$$

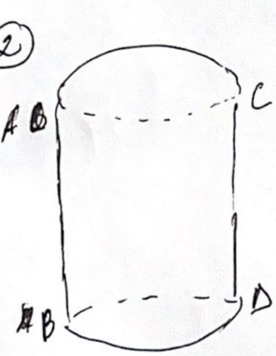
$a_1 + 8$ по модулю должно быть $< \sqrt{15} \Rightarrow$

$a_1 \in \{-5; -6; -7; -8; -9; -10; -11\}$

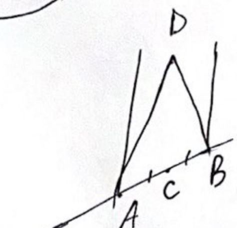
Тогда, исп. вывод из системы, получ., что

$a_1 \in \{-5; -6; -7; -9; -10; -11\}$

②



Т.к. CD ∥ оси цилиндра, AB лежат на одинак. расст. от C, D соотв, то $\triangle ADC = \triangle BDC$ и AB ∥ осн цилиндра. Тогда наим. ... будет когда AB – d цилиндра. Т.к. AB не может быть больше d, ведь он не выйдет он в пл-ти осн-я. Рассмотрим случай и докажем, что он возможен

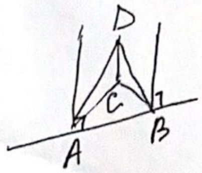


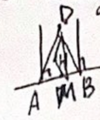
1)

$\sqrt{28} + \sqrt{17}$ или $\sqrt{28} - \sqrt{17}$

Посчитаем отд. расст. от C, D до пл. AB и сложив/отняв их получим искомое CD

знаем CH: $BC^2 - 2r^2 = \sqrt{17}$





рис

$MN^2 = BD^2 - MB^2$

$DH^2 = MD^2 - HM^2 \Rightarrow$

$DH =$

H – осн. высоты из D на пл-ть AB

M – сер. AB, тогда MH = r

$DH = \sqrt{BD^2 - MB^2 - HM^2} = \sqrt{BD^2 - 2r^2} = \sqrt{28}$

$MN^2 = MB^2$

$DH^2 = MD^2 - HM^2 \Rightarrow$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104833**

ID профиля: **856760**

Вариант 21

Задача № 4 $\boxed{\text{Чистовик}}$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35, \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \ (*) \end{cases}$$

(*) $a=5^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$, $b=5^{\gamma}\cdot 7^{k}$, $c=5^{\eta}\cdot 7^{\varepsilon}$, где $\alpha, \beta, \gamma, k, \eta, \varepsilon$ – целые неотрицательные числа. Также, из первого условия следует, что все они не меньше 1. Условию равносильно:

$$\begin{cases} \min\{\alpha, \gamma, \eta\}=1 \\ \min\{\beta, k, \varepsilon\}=1 \\ \max\{\alpha, \gamma, \eta\}=18 \\ \max\{\beta, k, \varepsilon\}=16 \end{cases}$$

Значит, среди чисел α, γ, η наименьшее равно 1, а наибольшее – 18, а для третьего 18 вариантов чисел от 1 до 18. Аналогично, наименьшее из чисел β, k, ε равно 1, а наиб. – 16, для третьего числа – 16 вариантов от 1 до 16. Тройка $(a;b;c)$ однозначна, задается набором α, γ, η и β, k, ε. Для набора α, γ, η, когда ср. число от 2 до 17, существует $16\cdot(3!)=96$ вариантов, когда $\{\alpha,\gamma,\eta\}=\{1;1;18\}$ или $\{\alpha,\gamma,\eta\}=\{1;18;18\}$. для каждого из этих случаев существует по ~~два~~ три варианта. Таким образом, всего вариантов для набора $\{\alpha,\gamma,\eta\} = 96+3+3 = 102$

Аналогично, для набора β, k, ε всего $14\cdot(3!)+3+3=90$ вар.

Чтобы найти общее кол-во троек $(a;b;c)$, нужно перемножить эти числа.

$102\cdot 90 = 9180$

Ответ: 9180

Задача № 5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2;\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_{2x-3}(x+1),\ 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3),\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5).$

Пусть $2x-3=a,\ x+1=b,\ 2x^2-3x+5=c$

I случай.

$2\log_a b = 2\log_c a = m$

$c^{\frac{m}{2}}=a;\ a^{\frac{m}{2}}=b;\ (c^{\frac{m}{2}})^{\frac{m}{2}}=b;\ c^{\frac{m^2}{4}}=b$

Тогда, $\log_b c = m-1$

$b^{m-1}=c \Rightarrow [b=c^{\frac{m}{4}}] \Rightarrow c^{\frac{m^2}{4}\cdot m-1}=c^1$

$\frac{m^2}{4}(m-1)=1$

$m^3-m^2-4=0$

Подберем корень: $m=2$ – подходит $(m-2)(m^2+m+2)=0$

$$\begin{array}{r|l} -m^3-m^2-4 & m-2 \\ \underline{m^3-2m^2} & \overline{m^2+m+2} \\ -m^2-4 & \\ \underline{m^2-2m} & \\ -2m-4 & \\ \underline{2m-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$(D<0)$

II случай.

$2\log_c a = \log_b c = m.$

$b^m=c;\ c^{\frac{m}{2}}=a;\ (b^m)^{\frac{m}{2}}=a;$

$2\log_a b = m-1$

$b^{\frac{m^2}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}=b \Rightarrow m^3-m-4=0$

$m=2$ – подходит

$(m-2)(m^2+m+2)=0$

III случай аналогично второму, но $2\log_a b=\log_b c$,

Соотв-но получим не $b^{\frac{m^2}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}=b$, а $c^{\frac{m^2}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}=c$

Точно так же получим $m^3-m^2-4=0$, то есть $(m-2)(m^2+m+2)=0$

$m=2$ везде

$2\log_{2x-3}(x+1)=m=2$	$2\log_{2x-3}(x+1)=m-1$
$2x-3=x+1$	$\log_{2x-3}(x+1)=\frac{1}{2}$
$x=4$	$2x-3=(x+1)^2$
	$2x-3=x^2+2x+1$
	$x^2+4=0$
	$\varnothing$

2

(задача № 5)

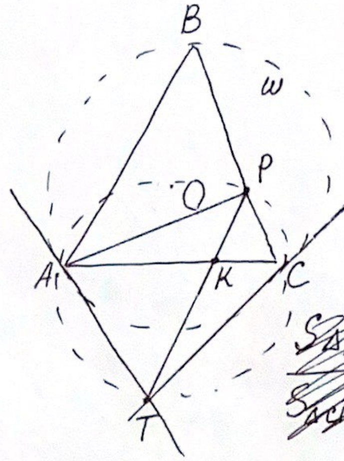
Ответ: $x = 4$

Подставив в изначальное уравнение очевидно, что области определения логарифма сохраняется

Задача №6

$S_{\Delta ABC}$ – ?

AC – ?, если $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$



$\cancel{\frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta CPK}} = 12}$

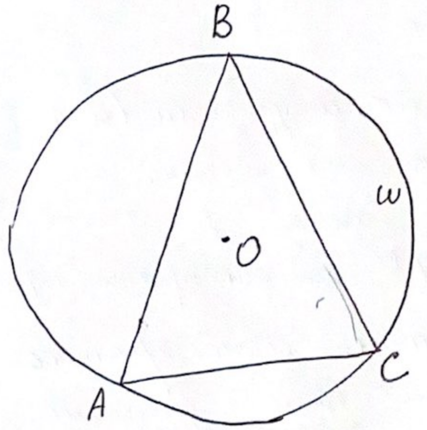
$S_{\Delta APK} = 12$

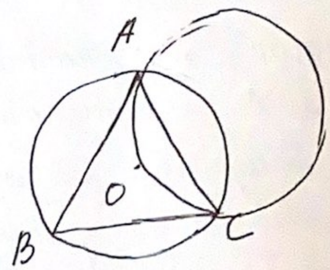
$S_{\Delta CPK} = 9$

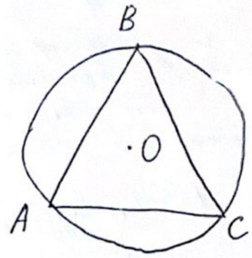
№6. Черновик

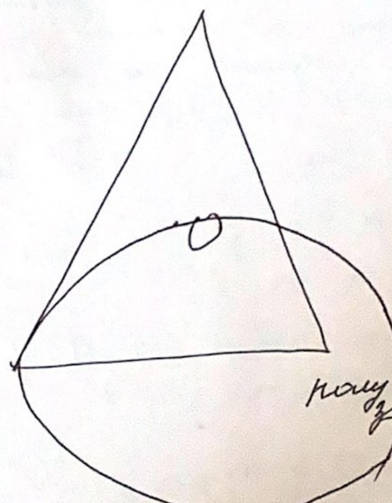
Дано:
$\triangle ABC$
ω с центр. O

Найти:
$S_{\triangle ABC}$
AC, если
$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

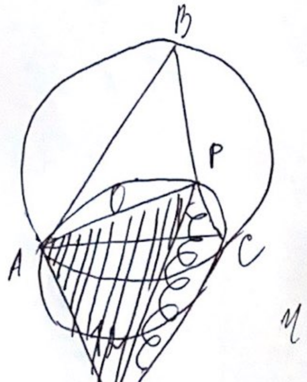


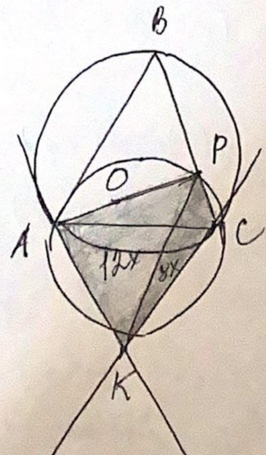






получили задание





Найти:
а) $S_{\triangle ABC}$
б) AC, если
$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$