Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104747**

ID профиля: **191993**

Вариант 21

чистовик.

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \quad (1)\\ \left[\begin{aligned}&\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ 8a-4b\le 20\end{cases}\\ &\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases}\end{aligned}\right] \quad (2)\end{cases}$$

(1) – это круг радиуса $2\sqrt5$ с коор. центра $(a;b)$

x и y зависят только от a и b. чтобы выяснить, что это за ф-ра нужно найти все возможные зн a и b в (2).

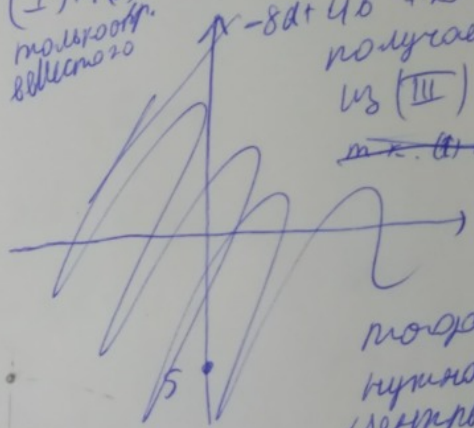
$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}a^2-8a+16-16+b^2+4b+4-4\le 0\\ 8a-4b<20\end{cases}\\ &\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases}\end{aligned}\right.$$

(I)∩(II) толькоокр. [illegible]

$(a-4)^2+(b+2)^2=a^2+b^2$

$-8a+4b+20=0$, т.е. получается та пр. из (II) и (III)

~~т.к. (I) при III~~



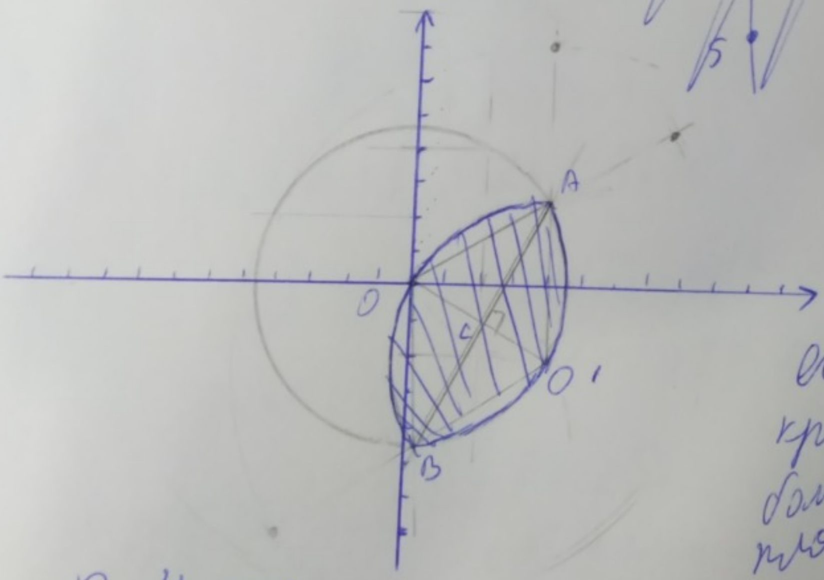
$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20 \ (I)\\ b>2a-5 \ (II)\end{cases}\\ &\begin{cases}a^2+b^2\le 20 \ (II)\\ b\le 2a-5 \ (III)\end{cases}\end{aligned}\right.$$

окр. круги.

прямые

тогда очевидно, что нужная область центров этих окр.

След: черными областями закр. x и y.



если x и y, то радиусы кругов просто в два раза больше найдем нужную площадь

$R=\cancel{2}4\sqrt5$

$OO'=\sqrt{20} \Rightarrow OC=\sqrt5$

$OA=R=4\sqrt5$ (для больших кругов потому что смотрим.)

$CA=\sqrt{R^2-OC^2}=\sqrt{80-5}=\sqrt{75}=5\sqrt3 \Rightarrow BA=10\sqrt3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB=\arccos\left(\dfrac{-(300-80-80)}{2\cdot 80}\right)=-\dfrac{7}{8}\left(\arccos\left(-\dfrac78\right)\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow S=80\cdot\arccos\left(-\frac78\right)-10\sqrt{15}$

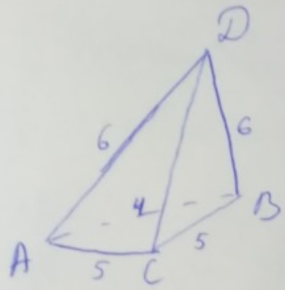
$S_\Delta=\dfrac{4\cdot\sqrt5\cdot5\sqrt3}{2}=\dfrac{20\sqrt{15}}{2}=10\sqrt{15}$

$\boxed{3}$

Ответ: $S=80\arccos\left(-\frac78\right)-10\sqrt{15}$

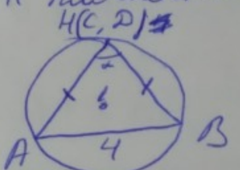
чистовик

№2.



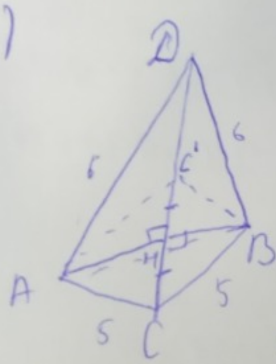
1) ADB – равнобедренный Δ-к $\Rightarrow$ высота его DH_1, то она и медиана и H_1 – середина AB
ACB – равнобедр. Δ-к $\Rightarrow$ если высота его CH_2, то она и медиана и H_2 – середина AB $\Rightarrow$
$\Rightarrow H_1$ и H_2 совпадают $\Rightarrow$ по DH_1 плоскости (DH_1C) перпендикулярна AB по признаку $(AB \perp H_1D,\ AB \perp H_1C = H_2C) \Rightarrow$
$\Rightarrow DC \perp AB$ по опр. плоск. перп. прямой.

2) Спроецируем тетраэдр и цилиндр ортогонально оси цилиндра. $CD \parallel l$, где l – ось $\Rightarrow AB \perp l \Rightarrow AB \parallel$ плоскости проекции и переносится без изменений:



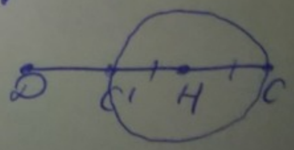
т. синусов
$2R = \frac{AB}{\sin\alpha}$ R минимально, когда $\sin\alpha$ макс.
$\max\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow (C,D)A = (C,D)B = 2\sqrt{2} < 5 < 6 \Rightarrow$ точно макс. α может быть 90°
при проекции р/б Δ на плоск. с его осн. могут только увелич. т.к. $6 > 5 > 2\sqrt{2}$, то углы при осн. без проек. > 45° и получаются
углы при осн.

3)



При ук. проекции $AD \to AH$; $AC \to AH$; $BD \to BH$; $BC \to BH$
$AH \perp DC$; $BH \perp CD$, т.к. $(AHB) \perp DC$ (т.к. $AB \perp CD$; $AH \perp DC$ по постр., значит и $BH \perp CD$) при мин. радиусе $AH = BH = 2\sqrt{2}$
т. Пиф.
$HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$
анал.
$HD = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

других ~~минимумов нет, т.к. sinα~~ значений HC и HD быть не может в силу единственности $\sin\alpha$ и независимости этих величин. В то же время HC может быть на продолжении DH (.)C, а может лежать на DH как (.) C'.
Других вариантов нет, т.к. окружность с прямой прох. через центр. мин двожды пересек



$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17} \\ CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17} \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$

Ответ: $CD = 2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$

21104747 (U191993 M1296223)

18 v

чистовик.

Вариант 21, 21

№1.

d – разность прогр.

1) Прогрессия возрастающая $\Rightarrow d > 0$

$a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

2) $a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$a_{11} \cdot a_{14} = (a_8 + 3d)(a_{17} - 3d) = a_8 a_{17} + 3d \cdot a_{17} - 3d \cdot a_8 - 9d^2 =$

$= a_8 a_{17} + 3d(a_{17} - a_8) - 9d^2 = a_8 a_{17} + 3d \cdot 9d - 9d^2 = a_8 a_{17} + 18d^2 >$

$> S + 27 + 18d^2$

т.е. $S + 27 + 18d^2 < a_{11} a_{14} < S + 60$

$S + 27 + 18d^2 < S + 60 \Rightarrow 18d^2 < 33 \Rightarrow d^2 < \frac{33}{18} = \frac{11}{6} < 2$

т.к. $d > 0$ и $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$

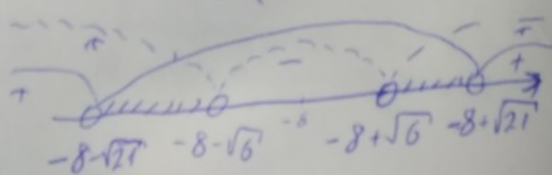
3) $S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21$

$\boxed{\begin{aligned} a_8 &= a_1 + 7 \\ a_{17} &= a_1 + 16 \\ a_{11} &= a_1 + 10 \\ a_{14} &= a_1 + 13 \end{aligned}}$

система $\begin{cases} (a_1 + 7)(a_1 + 16) > 7a_1 + 27 + 27 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 13) < 7a_1 + 27 + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 54 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 87 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 58 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 43 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1 + 8)^2 - 6 > 0 \\ (a_1 + 8)^2 - 21 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 8 + \sqrt{6})(a_1 + 8 - \sqrt{6}) > 0 \\ (a_1 + 8 + \sqrt{21})(a_1 + 8 - \sqrt{21}) < 0 \end{cases}$



$a_1 = -8 \pm a$, где

$\sqrt{6} < a < \sqrt{21}$; $a \in \mathbb{Z}$

$2 < a < 5$

$a \in \{3, 4\} \Rightarrow$

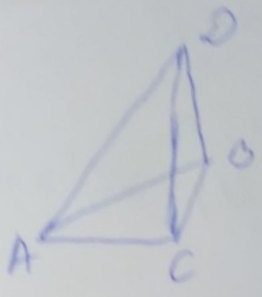
$\Rightarrow a_1 \in \{-12; -11; -5; -4\}$

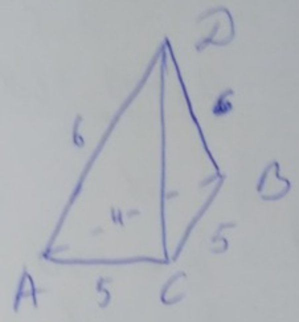
Ответ: $a_1 \in \{-12; -11; -5; -4\}$

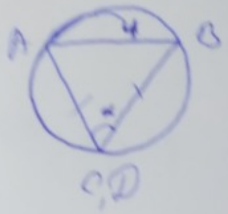
1

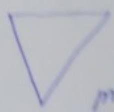
21104747 (U191993 M1296223)

черновик.









$\frac{AB}{\sin\alpha}=2R$

$\max \sin\alpha = 1 \Rightarrow 45$

~~AB = 2R~~

Ab

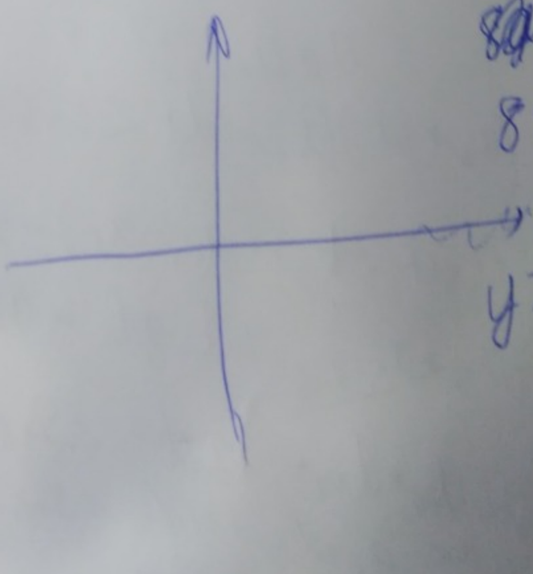
$8a-4$

$\frac{140}{160}$

$8x-4y = 0$

~~8x-4~~

$8x-4y<20$



$y>$

Черновик

$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=S=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=S=$

$a_1\in\mathbb{Z} \Rightarrow d\in\mathbb{Z}$
>0

$=(a_1+3d)\cdot 7=S$

$a_8=a_1+7d=\frac{S}{7}+4d$

$a_{17}=a_1+16d=\frac{S}{7}+13d$

$a_{11}=a_1+10d=\frac{S}{7}+7d$

$a_{14}=a_1+13d=\frac{S}{7}+10d$

~~a_{13}~~

$\left(\frac{S}{7}+4d\right)\left(\frac{S}{7}+13d\right)=\frac{S^2}{49}+\frac{S}{7}\cdot 17d+52d^2>S+27$

~~$4d$~~ $+$ ~~$a_8\ a_1$~~

$a_8+3d=a_{11}$

$a_{17}-3d=a_{14}$

~~a_8~~

$17-8=9d$

$a_8a_{17}>S+27$

$S=(a_1+3)\cdot 7=$

$=7a_1+27=S$

$(a_8+3d)(a_{17}-3d)<S+60$

$a_8a_{17}+3d(a_{17}-a_8)-9d^2<S+60$

$(a_8\cdot a_{17})+3d\cdot 9d-9d^2<S+60$

~~$S+27$~~ $a_8\cdot a_{17}+18d^2<S+60$

$S+27+18d^2<a_8\cdot a_{17}+18d^2<S+60$

$a_8\cdot a_{17}>S+27$

$$\begin{array}{r}60\\-27\\\hline 33\end{array}$$

~~$d\geq 1 \Rightarrow d^2\geq 1 \Rightarrow 18d^2\geq 18$~~

$\Downarrow$

~~$a_8\cdot a_{17}>$~~

$S+27+18d^2<S+60$

~~$S+27<a_8\cdot a_{17}$~~

$18d^2<33$

$d^2<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d=1$

21104747 (U191993 M1296223)

черновик

$S = 2a_1 + 27$

$a_8 = a_1 + 7$

$a_{17} = a_1 + 16$

16 − 58

16 − 43

$\times 16 \cdot 7 = 112$

112 − 54 = 58

64 − 58 = 6

130 − 87 = 43

$(a_1+8)^2 - 6$

$a_1^2 + 2 \cdot 8 \cdot a_1 + 64 + 58 - 64$

$(a_1+8-\sqrt{6})(a_1+8+\sqrt{6})$

64 − 43 = 21

21104747 (U191993 M1296223)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

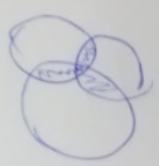
Шифр: **21104747**

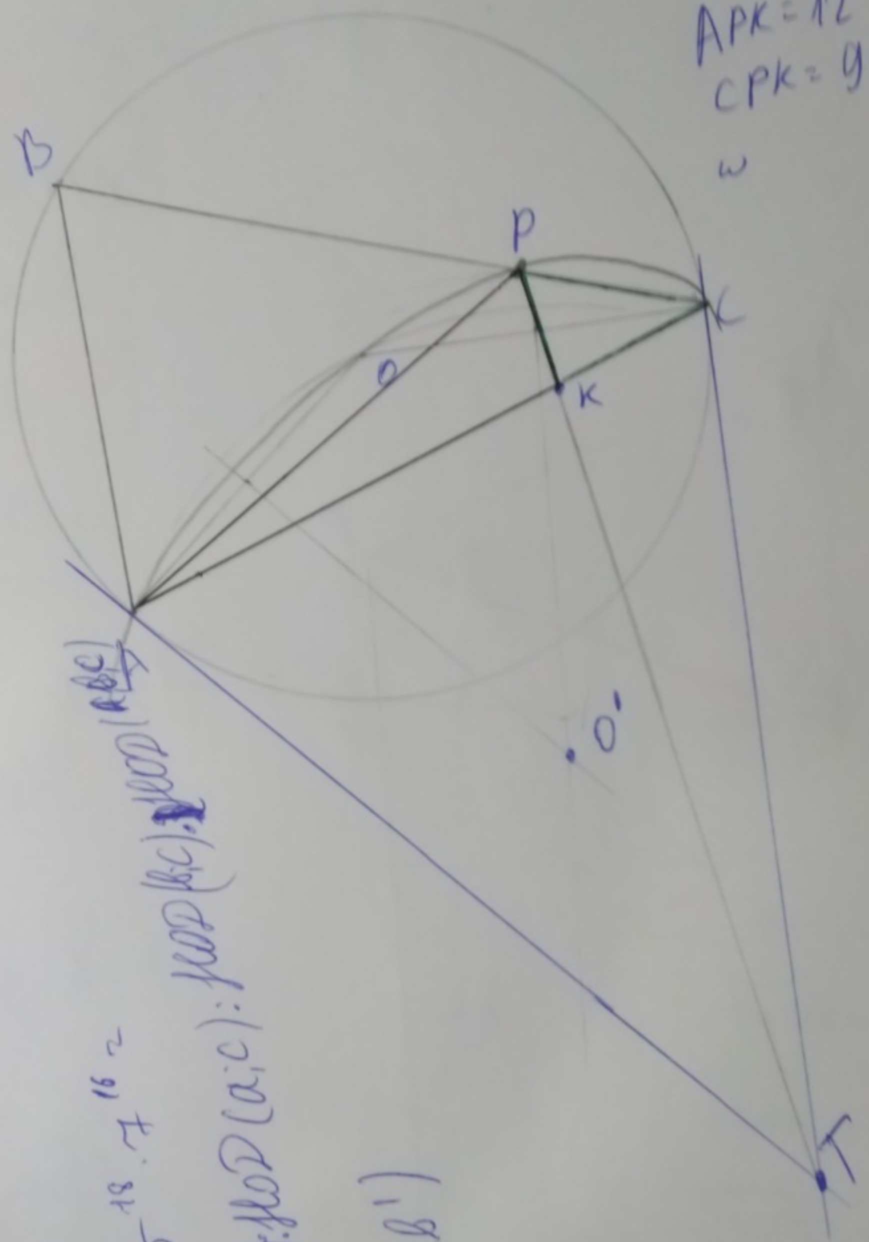
ID профиля: **191993**

Вариант 21

черновик

$S = \frac{abc}{4R}$





НОД$(a;b;c) = 35$

$a = 35a'$

$b = 35b'$

$c = 35c'$

НОД$(a';b';c') = 1$

НОК$(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} =$

$= a \cdot b \cdot c :$ НОД$(a;b)$: НОД$(a;c)$: НОД$(b;c)$ · НОД$(a;b;c)$

$=$ ~~$35a'b'c' \cdot 35$~~

$35a'b'c' :$ (НОД$(a';b')$

черновик.

$\operatorname{tg}\alpha$

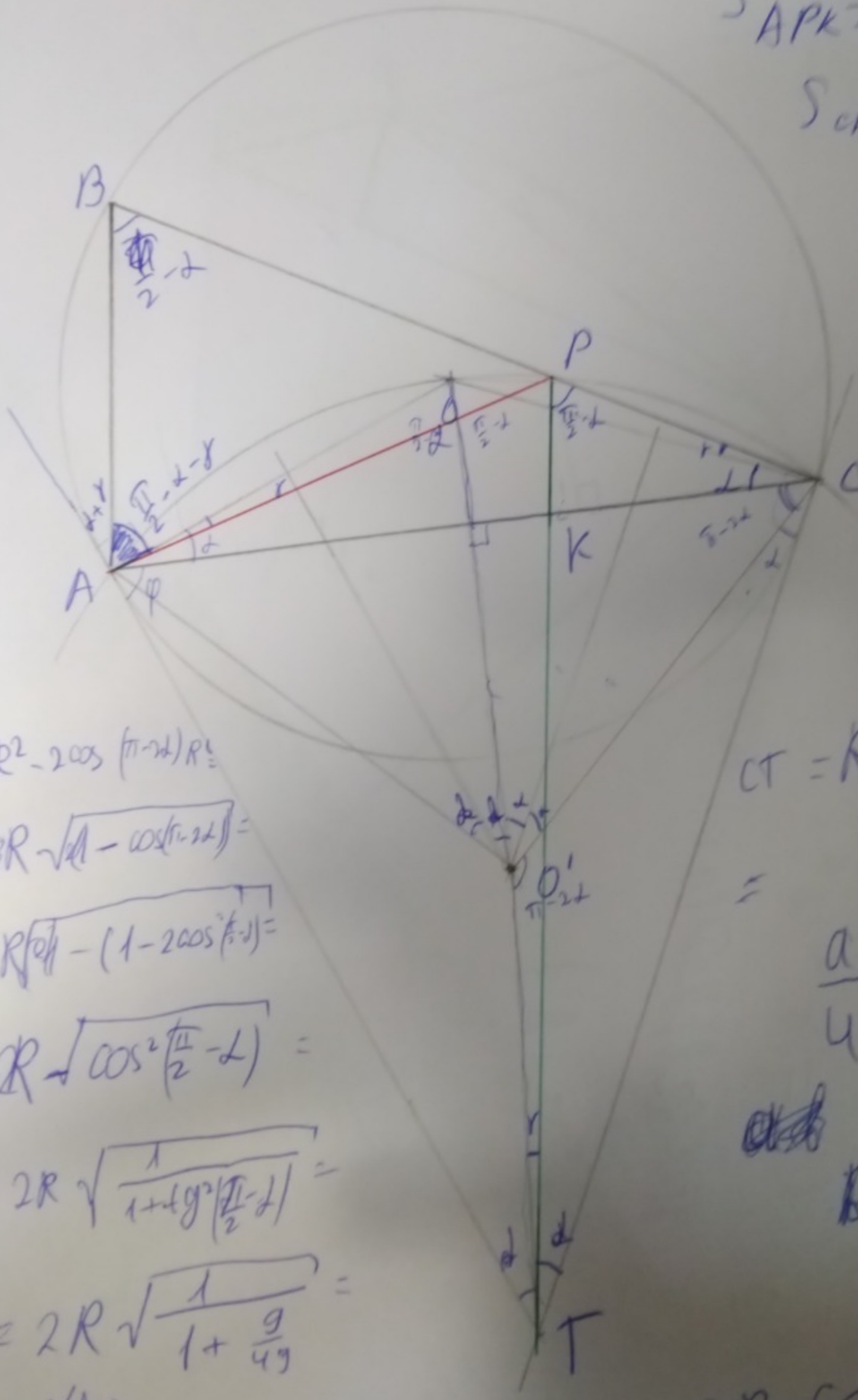
$16 \times 6 = 96$

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$2R\sin\varphi = AC$



$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{7}$

$R^2 + R^2 - 2\cos(\pi - 2\alpha)R^2 =$

$AC = 2R\sqrt{1 - \cos(\pi - 2\alpha)} =$

$= 2R\sqrt{1 - (1 - 2\cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha))} =$

$= 2R\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} =$

$= 2R\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}} =$

$= 2R\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{49}}} =$

$= \frac{14R}{\sqrt{58}}$

$CT = R\operatorname{tg}\varphi\cos\varphi =$

$=$

$\frac{abc}{4R} = S$

R a

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

$2R = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin$

$\frac{abc}{4R}$

Черновик.

Черновик
№6

б) $\cancel{\angle ABC = tg\frac{3}{7}} \Rightarrow tg\,\angle ABC = arctg\left(\frac{3}{7}\right).$

из парал $\Rightarrow \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow ctg\,\alpha = \frac{3}{7} = tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

из остроуг. т-а $\Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$

т. кос.

$$AC = \sqrt{R^2 + R^2 - 2\cos(\pi - 2\alpha)} = 2R\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} =$$

$$= \cancel{\frac{14R}{\ }}\ 2R\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}} = \frac{14R}{\sqrt{58}}$$

21104747 (U191993 M1296224)

черновик

чистовик

№4.

$$\begin{cases} НОД(a, bc) = 35 \\ НОК(a, bc) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 5^{p_a} \cdot 7^{q_a}$
$b = 5^{p_b} \cdot 7^{q_b}$
$c = 5^{p_c} \cdot 7^{q_c}$

$\min(p_a; p_b; p_c) = 1$ $\quad \min(q_a; q_b; q_c) = 1$
$\max(p_a; p_b; p_c) = 18$ $\quad \max(q_a; q_b; q_c) = 16$

если разные, то вариантов выбора третьей p $17 - 2 + 1 = 16$. Пребзоров из трех: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow$ вариантов $6 \cdot 16 = 96$

добавим еще варианты с третьей 1 или 18. перебзоров 3, т.к. место выбирается между двумя $\Rightarrow 3 \cdot 2 = 6$ с повт $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ выборов p: $16 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 102$

для q аналогично: $14 \cdot 6 + 6 = 90$

Итого:
$102 \cdot 90 = 9180$

Ответ: 9180

2

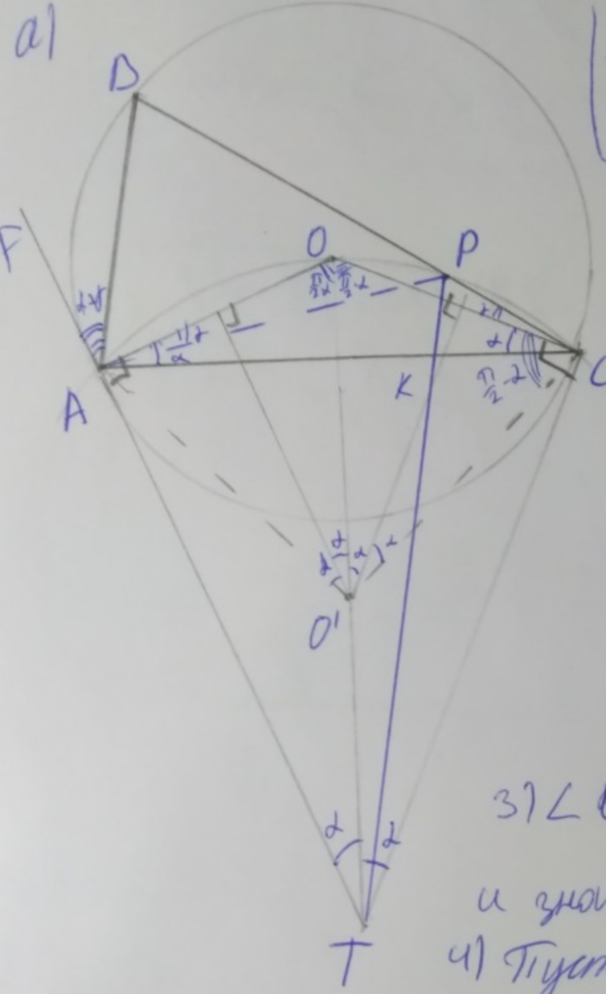
Черновик.

Чистовик.

Вариант 21, 22

№6.

а)



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$\Downarrow$

$S_{APC} = 21$

1) Пусть $\angle OAC = \alpha$, тогда, т.к. $OA = OC = r_\omega \Rightarrow \angle OCA = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOO' = \frac{\pi}{2} - \alpha = \angle COO' \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OAO' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, т.к. $O'A = O'O$, как радиусы окр., опис. около $AOC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AO'O = OO'C = 2\alpha \Rightarrow \angle AO'C = 4\alpha$

2) $\angle ACT = \pi - \angle OCT - \angle OCA = \frac{\pi}{2} - \alpha$

аналог. $\angle CAT = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \angle ATC = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC$ — впис. в окр. оп. около AOC, т.к. $\angle ATC = 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = \frac{1}{2} AO'C$.

3) $\angle O'CT = \angle OCT - \angle OCO' = \alpha \Rightarrow \angle O'TC = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle CO'T = \pi - 2\alpha \Rightarrow \angle OO'C$ внеш. для него и значит O, O' и T на одной пр.

4) Пусть $\angle OAP = \gamma$. $AOPC$ — впис. четырехуг. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OAP = \angle OCP = \gamma \Rightarrow \angle BAF = \angle BCA = \alpha + \gamma$, т.к.
$\angle FAB$ — угл. между хордой и кас., а $\angle BCA$ — впис. и опт. на хорду $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAO = \angle FAO - \angle BAF = \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma \Rightarrow \angle BAP = \angle BAO + \angle OAP = \frac{\pi}{2} - \alpha$

т.к. T лежит на окр. опис. около $\triangle AOC$, то $AOPT$ — впис $\Rightarrow \angle AOT = \angle APT = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow$
$\angle BAP = \angle APT \Rightarrow AB \parallel PT \parallel PK \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle PKC$ (углы соотв. при парал. пр. равны π-й пр.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ найдем коэф. под., т.к. $S_{ABC} = S_{KPC} \cdot k^2$, где $k = \frac{AC}{KC}$

$\frac{21}{9} = \frac{S_{APC}}{S_{KPC}} = \frac{PC \cdot CA}{PC \cdot CK} = \frac{CA}{CK} = k = \frac{7}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC} k^2 = 9 \cdot \frac{49}{9} = 49$

Ответ а) $S_{ABC} = 49$.

1