Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104719**

ID профиля: **326206**

Вариант 21

1

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$

Пусть b - разность прогрессии.

$$S = a_1 + (a_1+b) + (a_1+2b) + \ldots + (a_1+6b) = 7a_1 + b(1+2+3+4+5+6) = 7a_1 + 21b = 7(a_1+3b)$$

$a_8 = a_1 + 7b$

$a_{17} = a_1 + 16b$ $\rightarrow$ $a_8 \cdot a_{17} = (a_1+7b)(a_1+16b) > (7a_1+21b) + 27$ (1)

$a_{11} = a_1 + 10b$

$a_{14} = a_1 + 13b$ $\rightarrow$ $a_{11} \cdot a_{13} = (a_1+10b)(a_1+13b) < (7a_1+21b) + 60$ (2)

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1b + 7a_1b + 7\cdot 16b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ a_1^2 + 10a_1b + 13a_1b + 10\cdot 13b^2 < 7a_1 + 21b + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1b + 112b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ a_1^2 + 23a_1b + 130b^2 < 7a_1 + 21b + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1b + 112b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ a_1^2 + 23a_1b + 112b^2 + 18b^2 < 7a_1 + 21b + 60 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1b + 112b^2 > 7a_1 + 21b + 27 \\ 7a_1 + 21b + 60 > (7a_1 + 21b + 27) + 18b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11- \\ 60 - 27 > 18b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11- \\ \frac{33}{18} > b^2 \ (*) \end{cases}$$

Рассм (*)

Поскольку $\forall i$ a_i - целое число, то b - тоже целое число.

По условию, $a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$ - возрастающая арифметическая прогрессия, значит, $b > 0$.

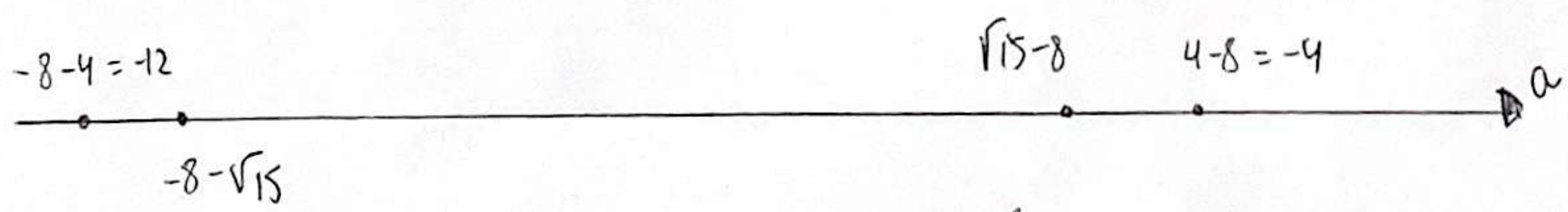
Т.к. $\begin{cases} b > 0 \\ (*) \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b < \sqrt{\frac{33}{18}} < 2 \\ b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{b = 1}$

Тогда $S = 7a_1 + 21$ и неравенства из условия примут вид:

$$\begin{cases} (a_1+7)(a_1+16) > 7a_1 + 21 + 27 \\ (a_1+10)(a_1+13) < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 16\cdot 7 > 7a_1 + 48 \\ a_1^2 + 23a_1 + 13\cdot 10 < 7a_1 + 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+8)^2 > 0 \\ (a+8)^2 < 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -8 \\ |a+8| < \sqrt{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -8 \\ a \in (-8-\sqrt{15}; \sqrt{15}-8) \end{cases} (3)$$

~~Рассмотрим~~ ~~Так~~ Рассмотрим интервал (3):



Тогда a - целые числа от -12 до -4 не включительно без -8

Ответ: $a \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

3 чистовик 2 из 4

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20) & (2)\end{cases}$$

В пл-ти Oxy: (1) - круг с центром $(a;b)$ и $r=\sqrt{20}=2\sqrt5$

Рассм. 2 случая, которые получ. из нер-ва $8a-4b\ge 20 \Leftrightarrow 2a-b\ge 5 \Leftrightarrow 2a\ge 5+b$

~~1) $a\ge \frac{b+5}{2} \to a^2+b^2\le 20 \to a^2\le 20-b^2$~~ Рассмотрим как систему: (2) равносильно системе

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ 8a-4b\le 20\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ a\ge \frac{b+5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}(a^2-8a+16)+(b^2+4b+4)\le 20\\ a\le \frac{b+5}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ a\ge \frac{b+5}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2\le 20\\ a\le \frac{b+5}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

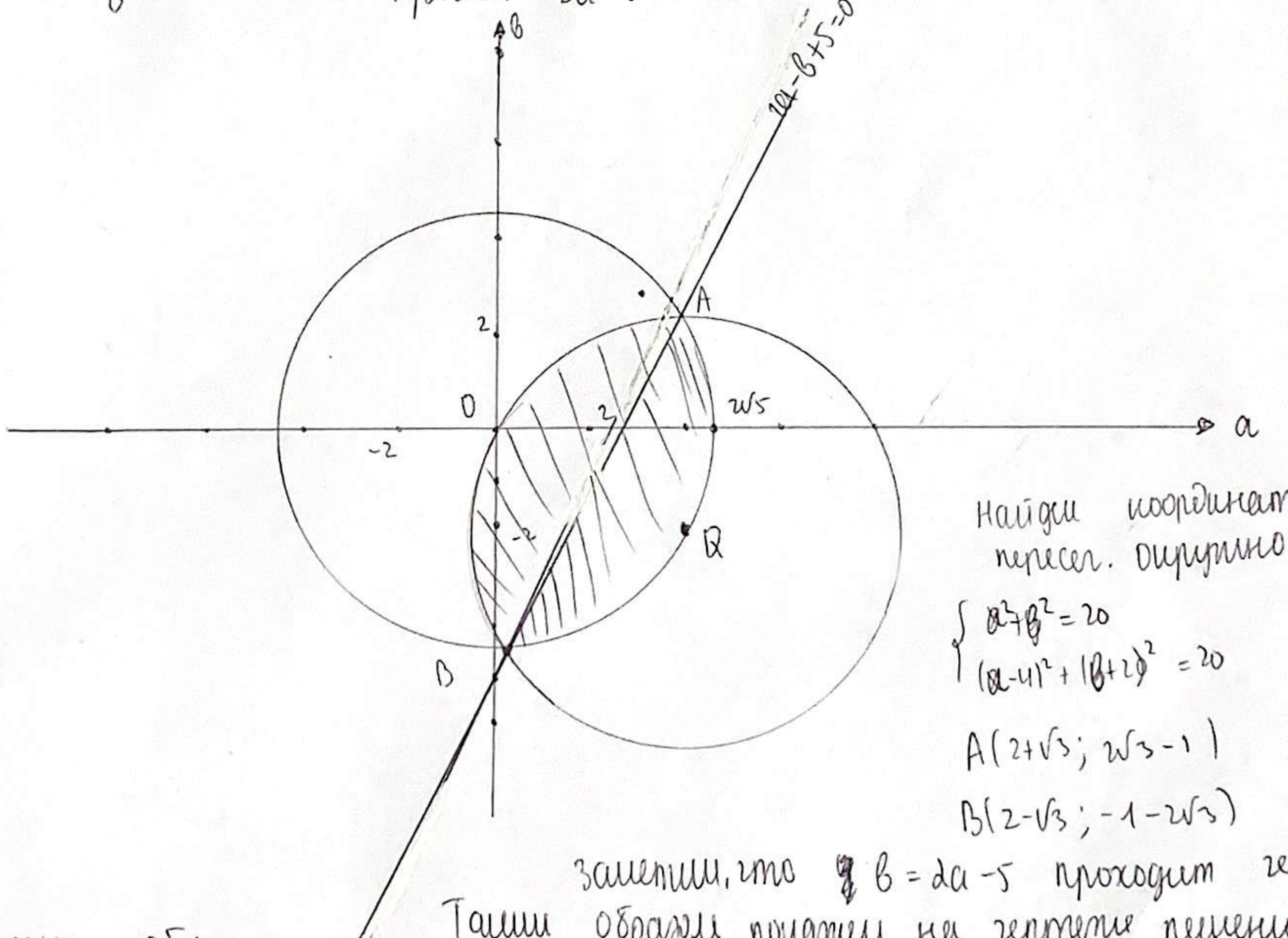
Рассмотрим эту систему в пл-ти Oab:

Тогда $a^2+b^2\le 20$ - круг с центром $(0;0)$ и радиусом $2\sqrt5$.

$2a\ge b+5$ — полупл-ть выше прямой $2a-b-5=0$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$ - круг с радиусом $2\sqrt5$ и центром $(4;-2)$ (Q)

$2a\le b+5$ - полупл-ть ниже прямой $2a-b-5=0$:



Найдем координаты A, B (точки пересеч. окружностей):

$$\begin{cases}a^2+b^2=20\\ (a-4)^2+(b+2)^2=20\end{cases}$$

$A(2+\sqrt3;\ 2\sqrt3-1)$

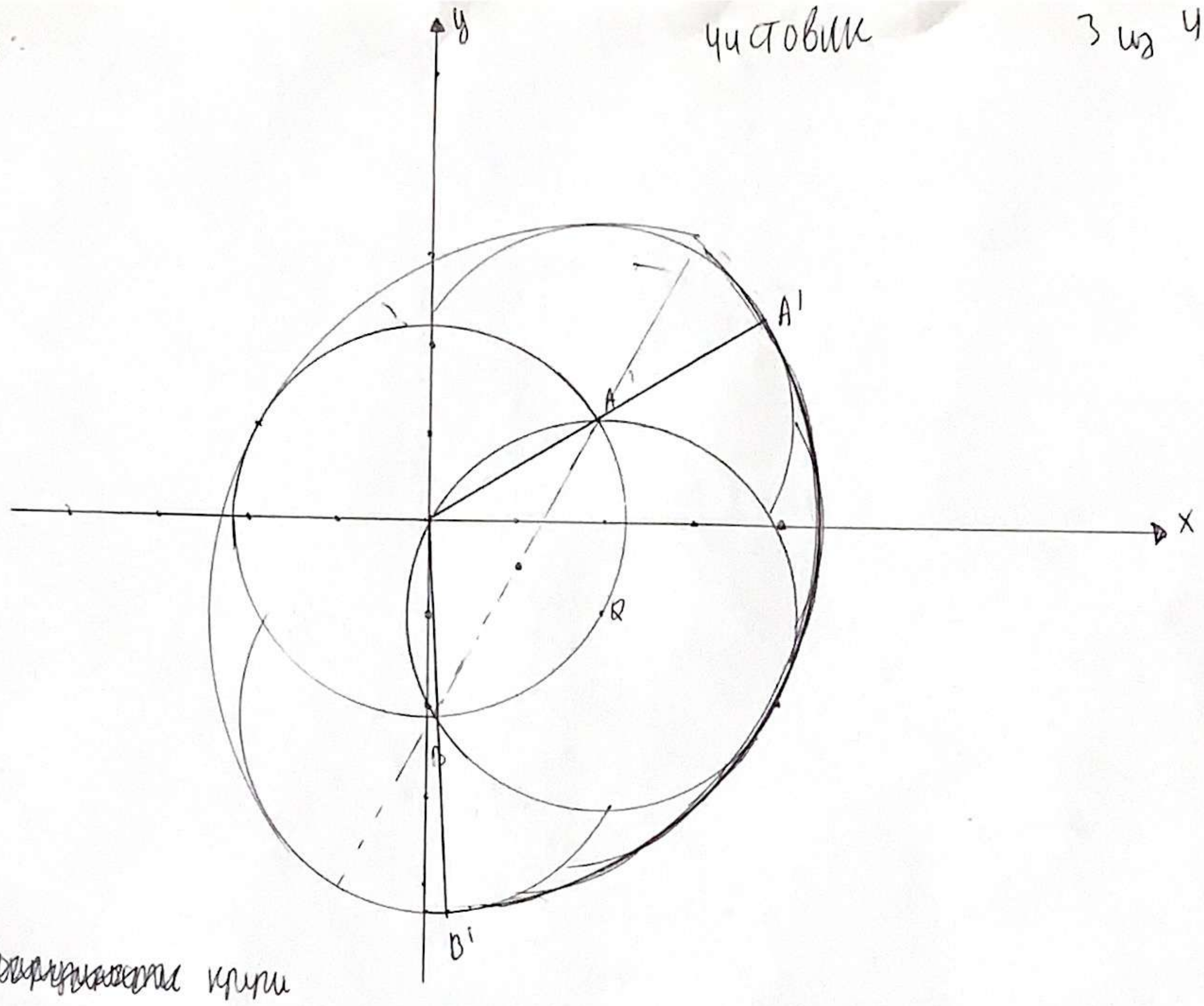
$B(2-\sqrt3;\ -1-2\sqrt3)$

Заметим, что $b=2a-5$ проходит через A и B.

Таким образом, покажем на чертеже решение системы

Решение системы - область пересечения кругов $\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20\end{cases}$

Тогда исходная система задает фигуру M - объединение кругов радиусом $2\sqrt5$, с центрами $(a;b)$, ~~где~~:



Заметим, что все ~~окружности~~ круги с центром на $\cup BQA$ лежат внутри круга P с центром $(0,0)$ и $r = 2\cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

Пусть $OA \cap P = A'$

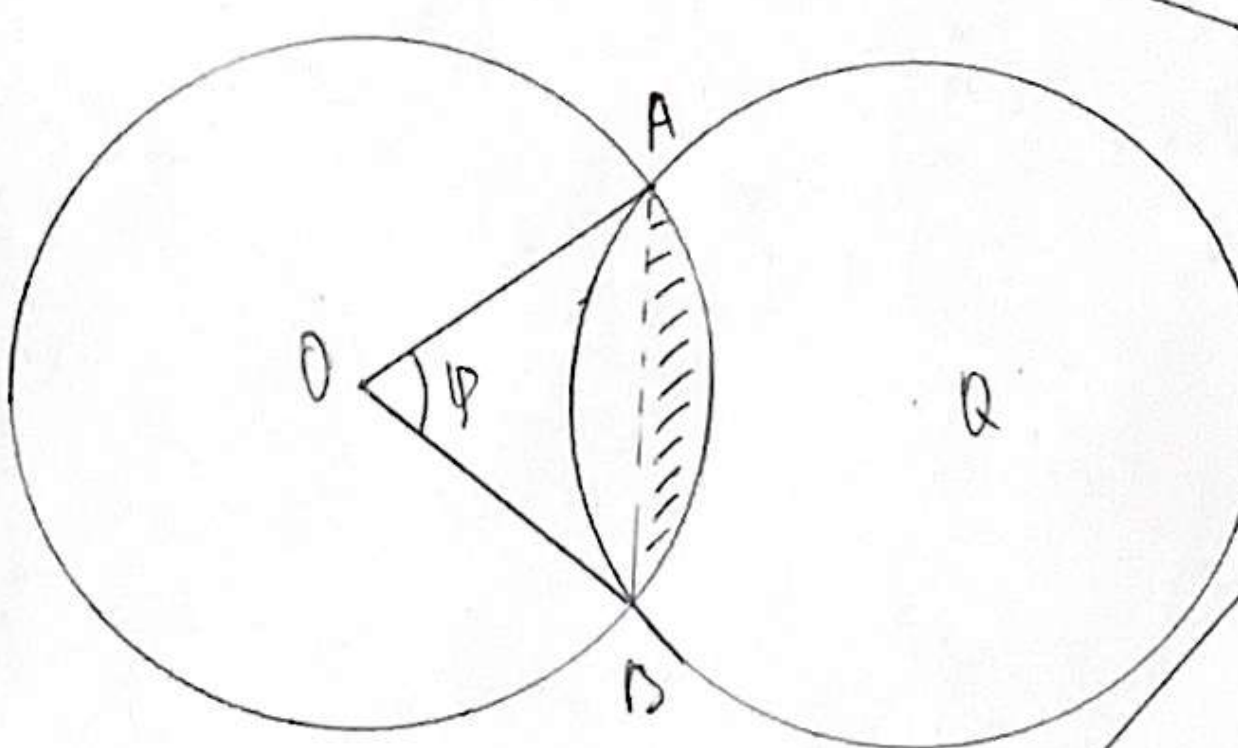
$OB \cap P = B'$

Аналогично все круги с центром на $\cup AOB$ лежат внутри круга N с центром $Q(4;-2)$ и радиусом $4\sqrt{5}$

Таким образом, площадь M равна площади пересечения кругов P и N, что равно 4S — учетверенной площади пересеч. кругов $x^2+y^2 \le 20$ и $(x-4)^2+(y-2)^2 \le 20$.

Найдем S:

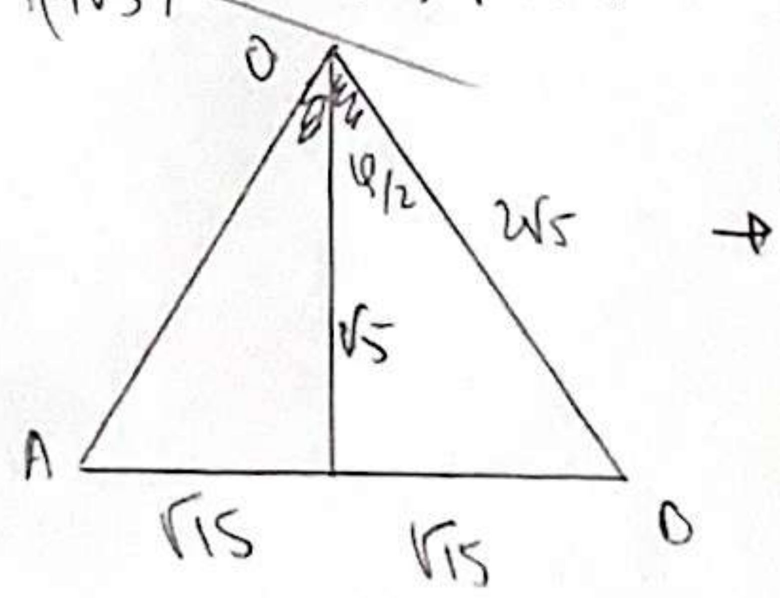
$A(2+\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}-1)$ $B(2-\sqrt{3};\ -1-2\sqrt{3})$



$AB = \sqrt{(2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3}-1+2\sqrt{3}+1)^2} =$

$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}\sqrt{1+4} = 2\sqrt{15}$

$OA = 2\sqrt{5}$



$\Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}\right)$

$\frac{\varphi}{2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ$

$\varphi = 120^\circ$

Тогда $S_{OAB} = \frac{\varphi}{360^\circ}\cdot S_{кр} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{5})^2$

$S_{OAB} = \frac{20\pi}{3}.$

$S_{\Delta OAB} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}\cdot 2}{2} = 5\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}S = \frac{20\pi}{3} - 5\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{40\pi}{3} - 10\sqrt{3}$

Тогда $S_M = 4S = \frac{160\pi}{3} - 40\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{160\pi}{3} - 40\sqrt{3}$

Найдем эту площадь:

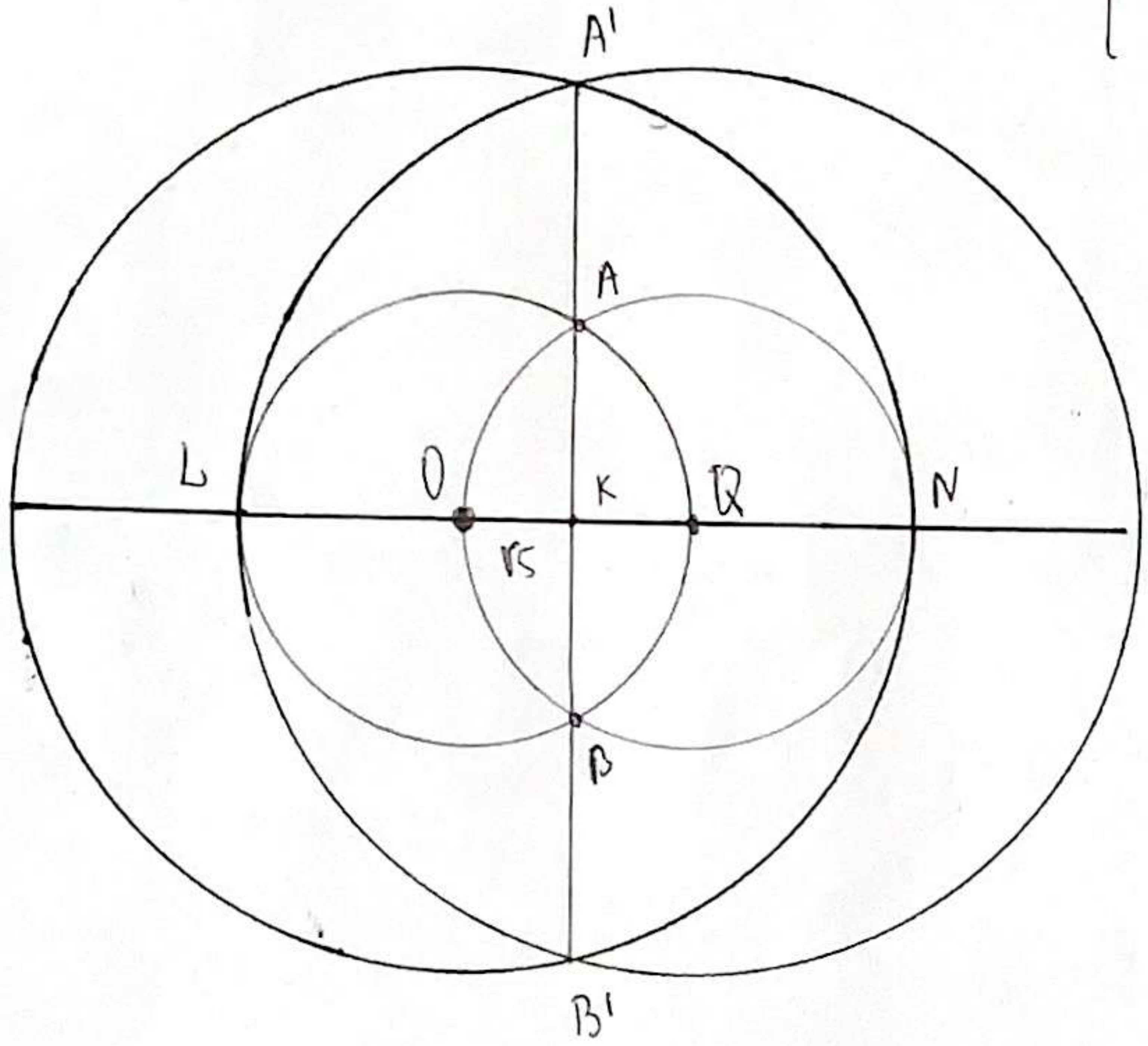
$$\begin{cases} \cancel{x^2+y^2=80} \\ \cancel{(x-4)^2+(y+2)^2=80} \end{cases}$$

$\cancel{A'(2+\sqrt{15};\ 2\sqrt{15}-1)}$

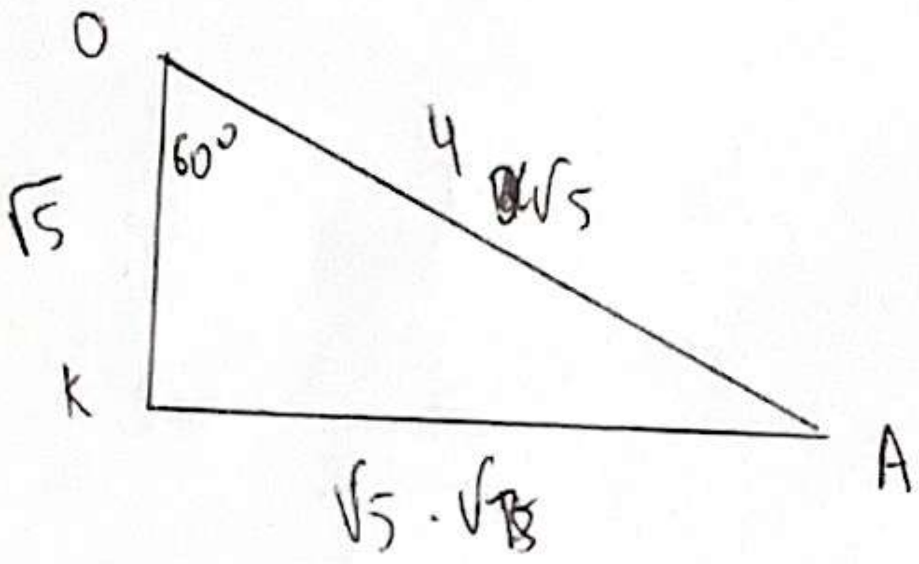
$\cancel{B'(2-\sqrt{15};\ -2\sqrt{15}-1)}$

$\cancel{A'B'^2 = (2+\sqrt{15}-2+\sqrt{15})^2 + (2\sqrt{15}-1+2\sqrt{15}+1)^2}$

$\cancel{A'B'^2 = 15+16\cdot 15 = 17\cdot 15 \Rightarrow A'B' = \sqrt{17\cdot 15}}$

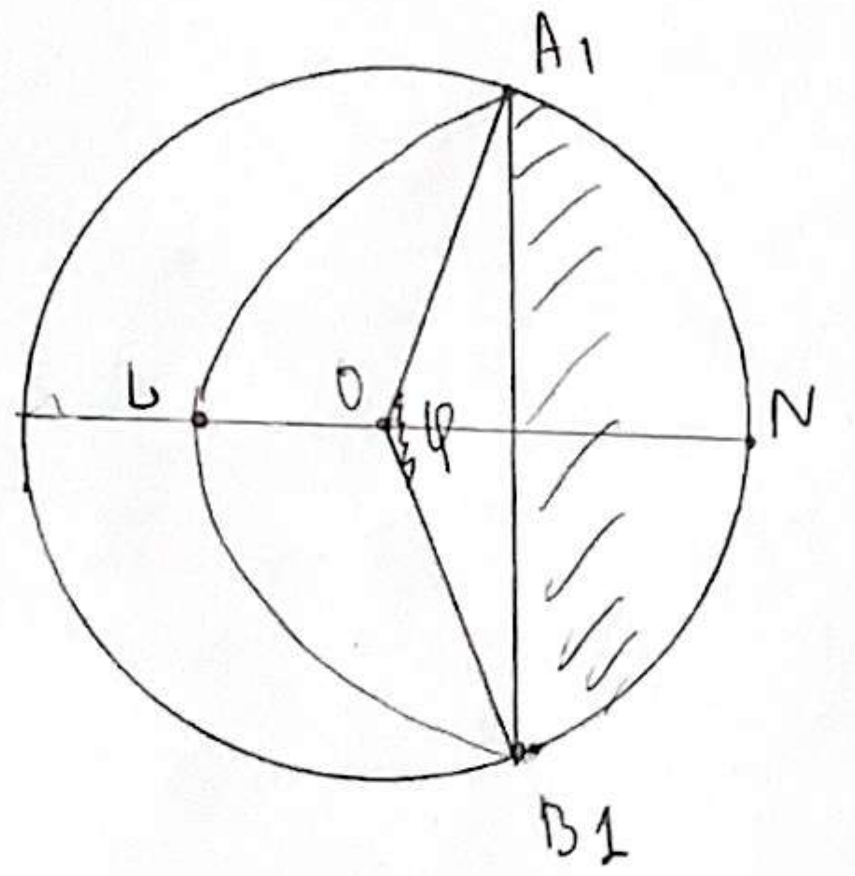


Из $\triangle OKA'$:

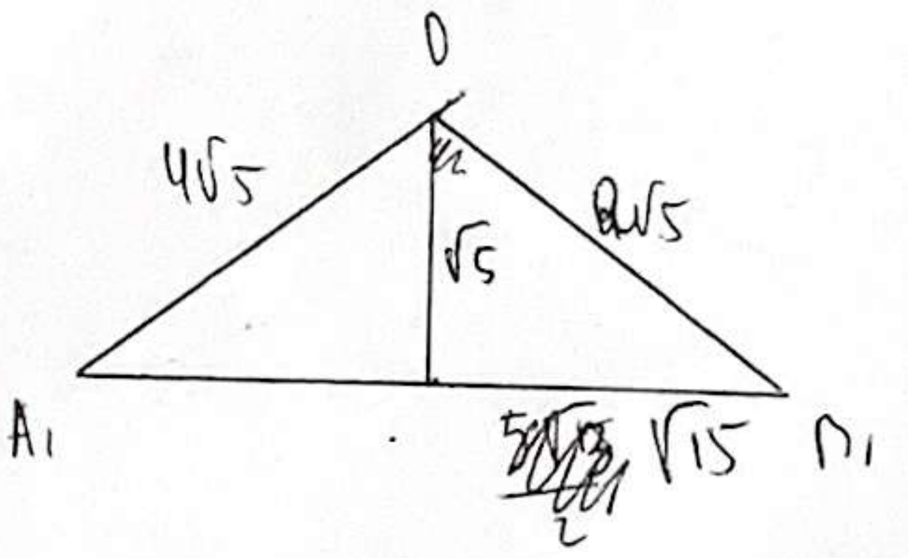


$KA' = \sqrt{OA_1^2 - OK^2} = \sqrt{15}\cdot\sqrt{5} = 5\sqrt{3}$.

$S(A_1NB_1) = S_{\text{сегм}}(OA_1B_1) - S_\triangle OA_1B_1$



$S_\triangle OA_1B_1$: $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}}{2} = \frac{5\sqrt{15}}{2}$



$\cancel{\frac{\varphi}{2} = \arccos(1/4) \Rightarrow 2\varphi = 2\arccos(1/4)}$

$\cancel{S_{\text{сегм}}\ OA_1B_1 = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot S_{\text{круга}} = \frac{2\arccos(1/4)}{2\pi}\cdot\pi\cdot(4\sqrt{5})^2 =}$

$\cancel{S_{\text{сегм}} = 80\arccos(1/4)}$

$\cancel{\text{Тогда } S(A_1NB_1) = 80\arccos(1/4) - \frac{5\sqrt{15}}{2}}$

$\cancel{S_M = 2S(A_1NB_1) = 160\arccos(1/4) - 5\sqrt{15}}$

$\cancel{S_{\text{сегм}} = \frac{120^\circ}{360^\circ}\cdot\pi\cdot(2\sqrt{5})^2 = \frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot 5 = \frac{20\pi}{3}}$

$\cancel{S_{A_1NB_1} = S_{\text{сегм}} - S_\triangle = \frac{20\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}}$

$S_{\text{сегм}} = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot\pi(4\sqrt{5})^2 = 80\arccos(1/4)$

$S_M = 2(S_{\text{сегм}} - S_\triangle) = 160\arccos(1/4) - 5\sqrt{15}$

$S_M = 2S_{ANB_1} = \frac{40\pi}{3} - 5\sqrt{3}$

$S = 160\arccos(1/4) - 5\sqrt{15}$

~~Ответ: $\frac{40\pi}{3} - 5\sqrt{3}$~~

$\boxed{\text{Ответ: } 160\arccos(1/4) - 5\sqrt{15}}$

~~[illegible]~~ $x > 5t+27$ черновик 1 из 3

$x+18b^2 < 5t+60 \to 5t+60 > 18b^2 + 5t+27$

$(a+7b)(a+16b) > 5t+27$ ⟺ $a^2+23b+7\cdot16b^2 > 5t+27$ ⟺ $5t+60 > 10\cdot13b^2 - 7\cdot16b^2+5t+27$

$(a+10b)(a+13b) < 5t+60$ $a^2+23b+10\cdot13b^2 < 5t+60$

$33 > (130-112)b^2 = 18b^2 \to \frac{33}{18} > b^2$

16×7: 42, 70, 112; $112 - 48 = 64$; $130 - 81 = 49$

$\begin{cases}(a+7)(a+16) > 7a+21+27\\(a+10)(a+13) < 7a+21+60\end{cases}$ ⟺ $\begin{cases}a^2+16a+16\cdot7-48>0\\a^2+16a+130-81<0\end{cases}$

$\begin{cases}a^2+16a+8(14-6)>0\\a^2+16a+49<0\end{cases}$ ⟺ $64-49 = 15$

$a+8<$

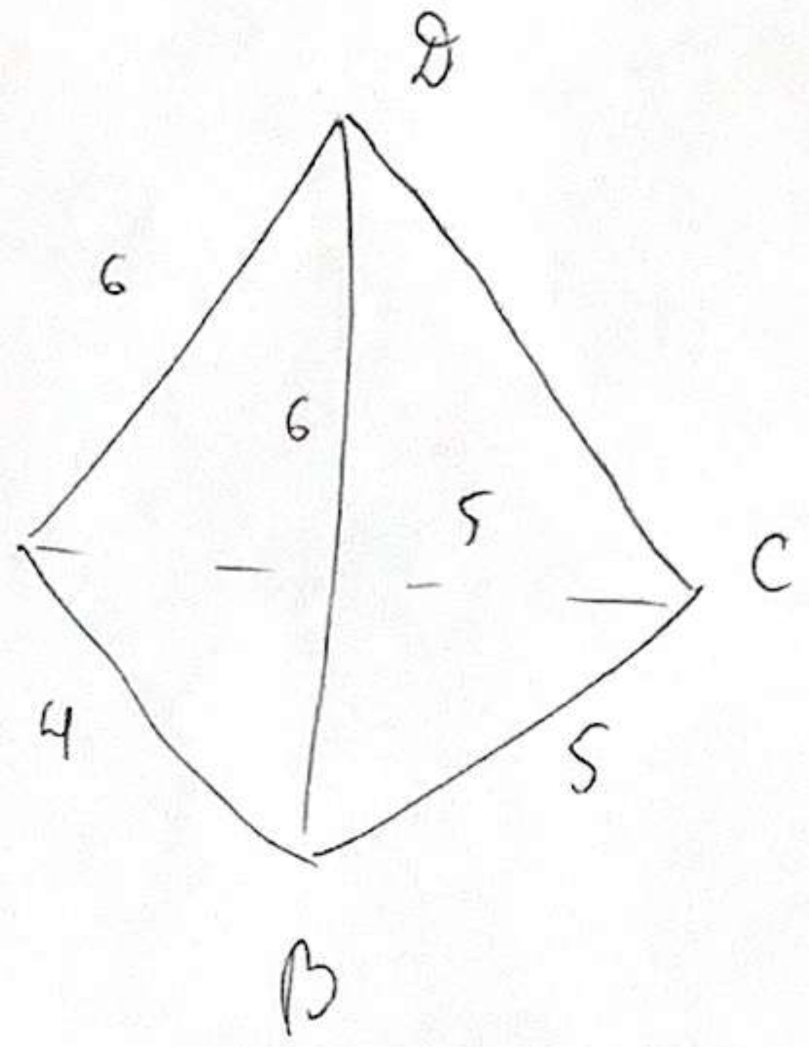
$-a-8<\sqrt{15}$

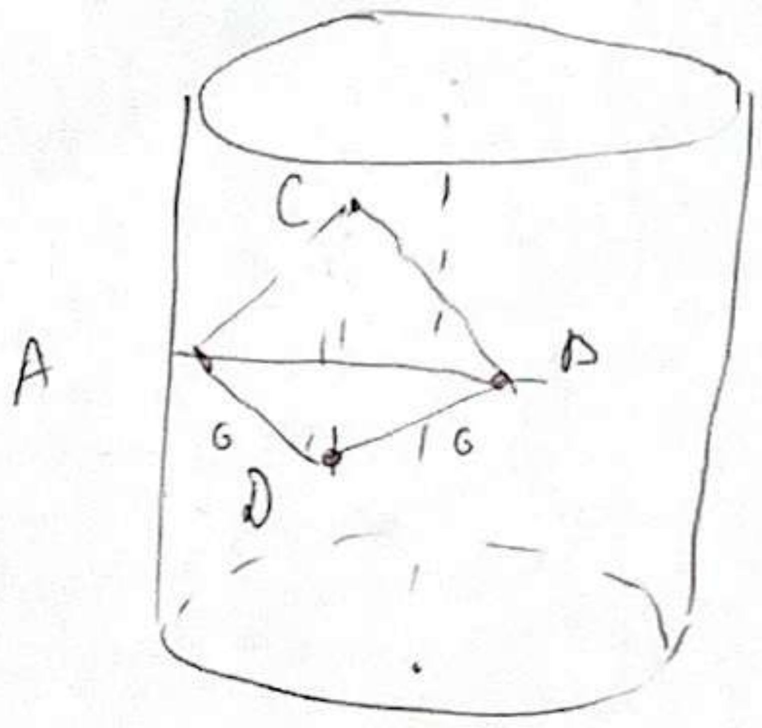
$a+8>-\sqrt{15}$

$-8-$

$a^2-8a+16$

b^2+4b+4





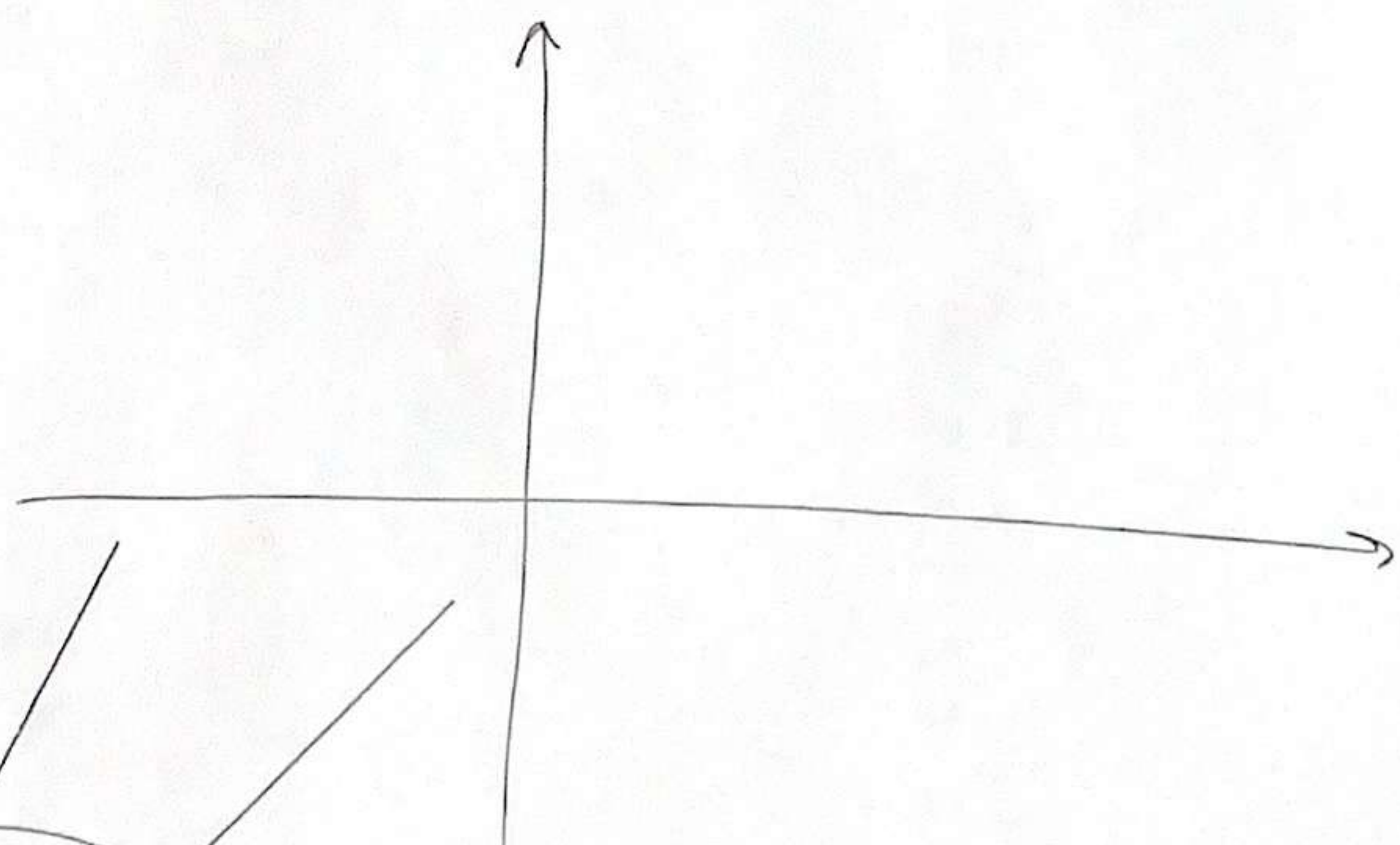
$a^2+b^2 \le 2$

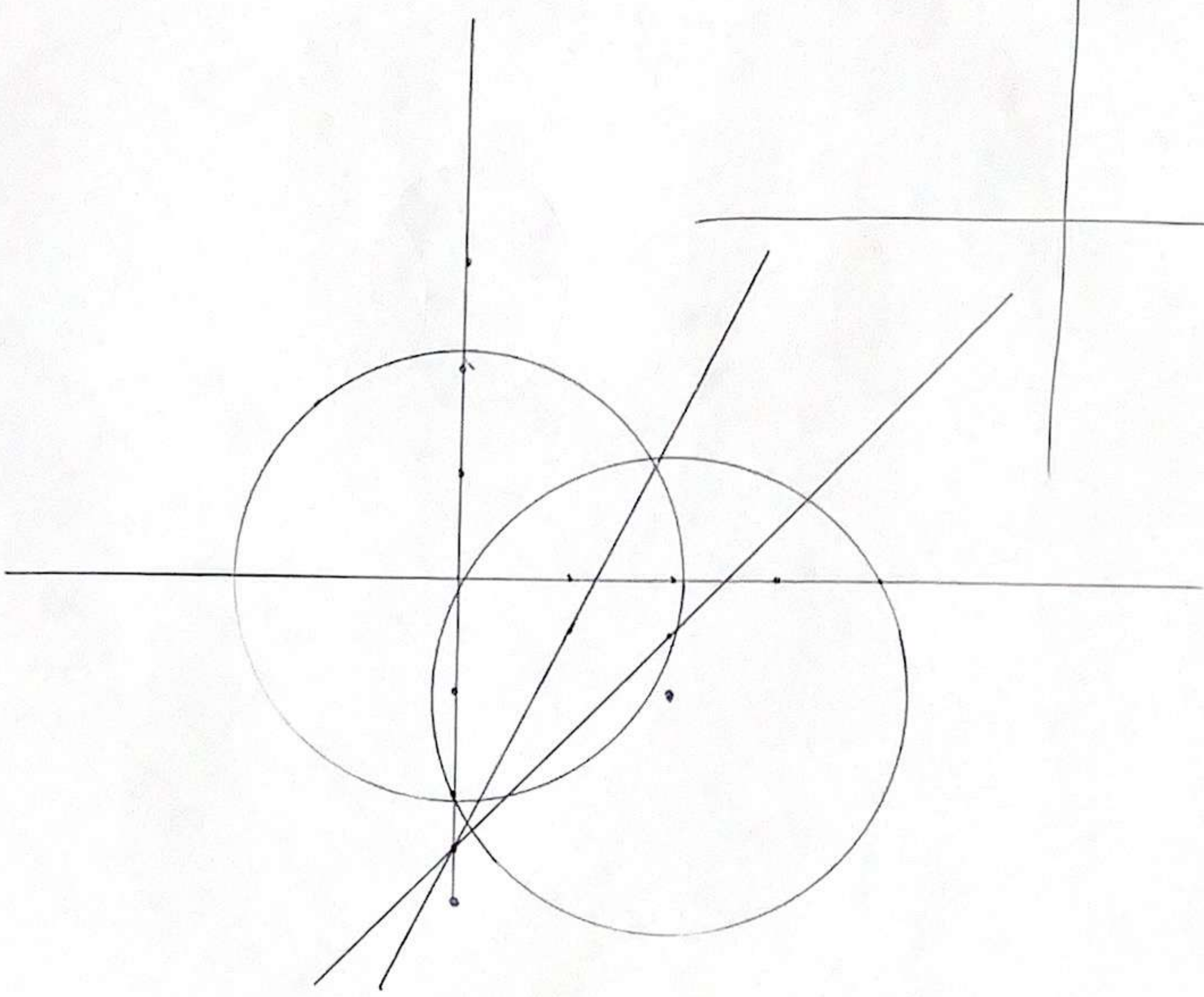
$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2\le20\\8x-4y\ge20\end{cases}\\\begin{cases}x^2+y^2\le 8x-4y\\8x-4y\le20\end{cases}\end{array}\right.$ ⟺ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2\le20\\y\le2x-5\end{cases}\\\begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2\le20\\y\ge2x-5\end{cases}\end{array}\right.$

$2x-y=5$

$y=2x-5$

$2a-b=5 \to b=2a-5$





черновик 2 из 3

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2\le 20\\ y\le 2x-5\end{cases}\\ \begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2\le 20\\ y\ge 2x-5\end{cases}\end{array}\right.$$

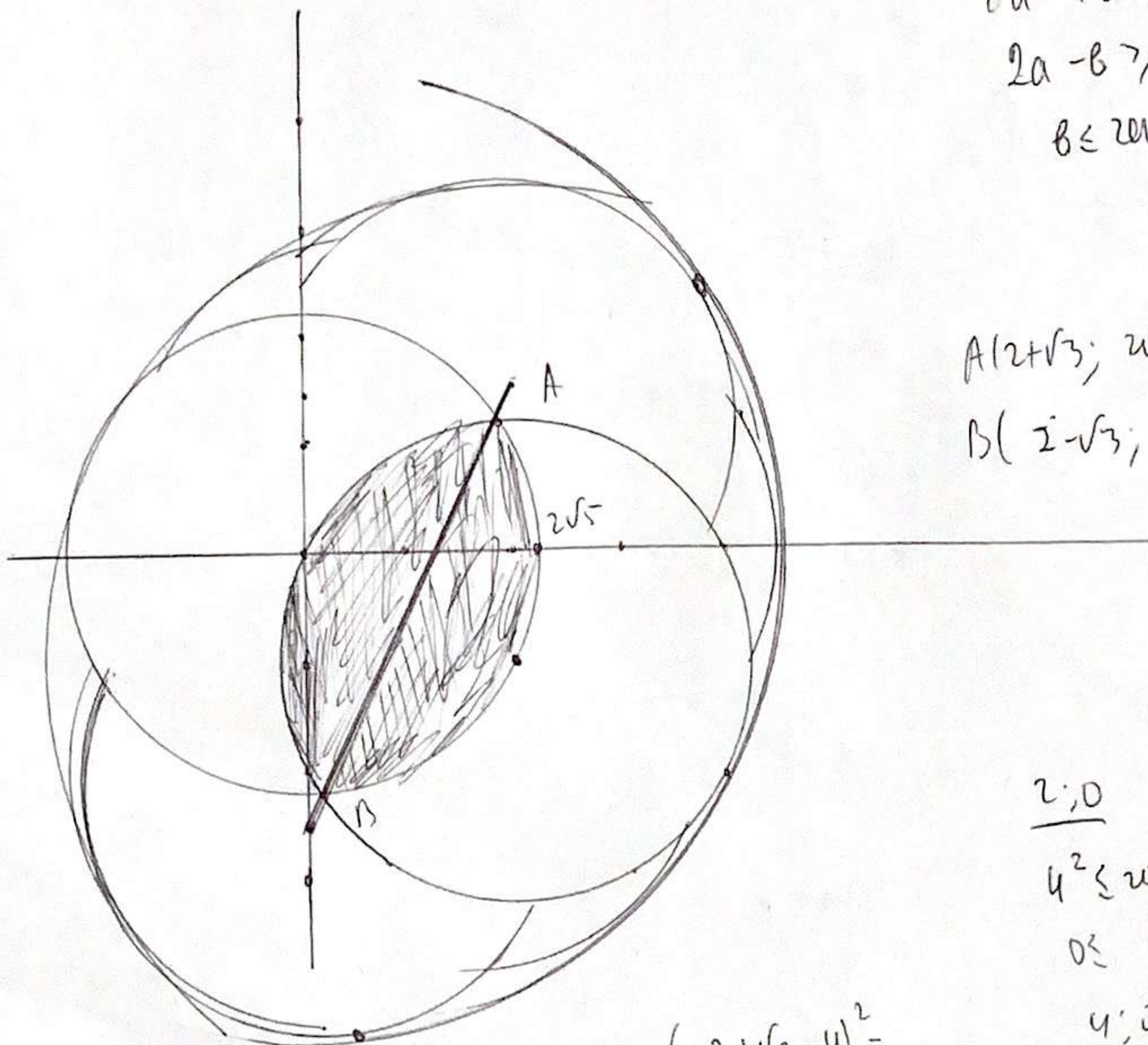
$8a-4b\ge 20$

$2a-b\ge 5$

$b\le 2a-5$

$x^2+y^2=20$

$(x-4)^2+$



$A(2+\sqrt3;\ 2\sqrt3-1)$

$B(2-\sqrt3;\ -1-2\sqrt3)$

$\underline{2;0}$

$4^2\le 20$

$0\le$

$4;0$

$\underline{y=2x-5}$:

$x^2+(2x-5)^2=20$

$x^2+4x^2-20x+25=20$

$5x^2-20x+5=0$

$x^2-4x+1=0$

$D=16-4=12$ $\dfrac{4\pm2\sqrt3}{2}=\underline{2\pm\sqrt3}$

$(2+\sqrt3-4)^2=$

$2(2+\sqrt3)-5$

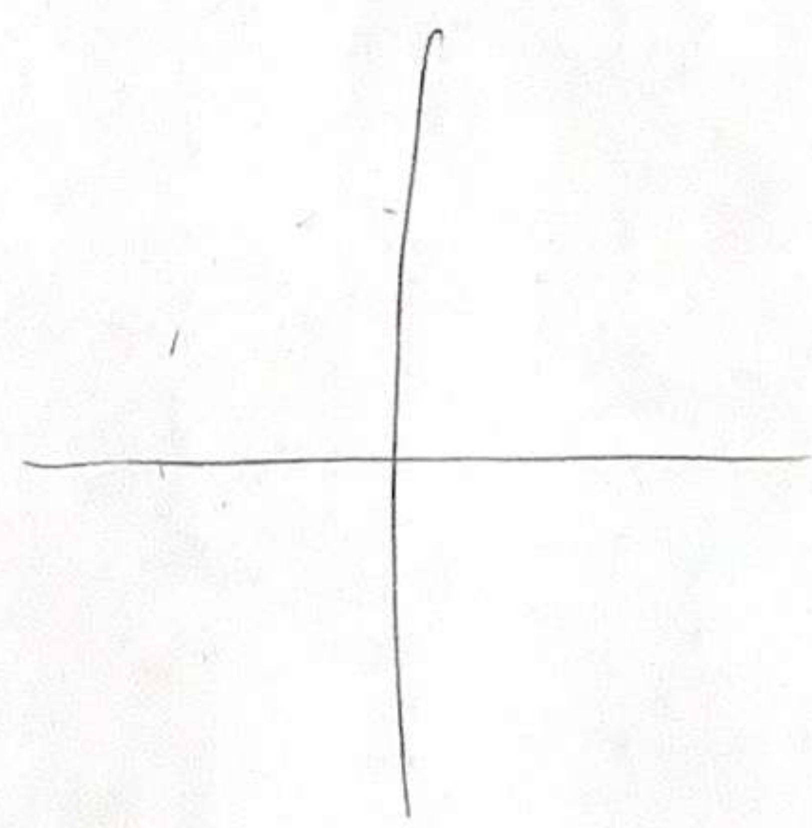
$4+2\sqrt3-1$

$2(2-\sqrt3)-5$

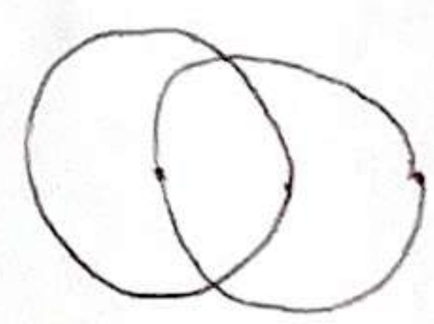
$4-2\sqrt3-5$

$(x-2\sqrt5)^2+(y-0)^2\le 20$

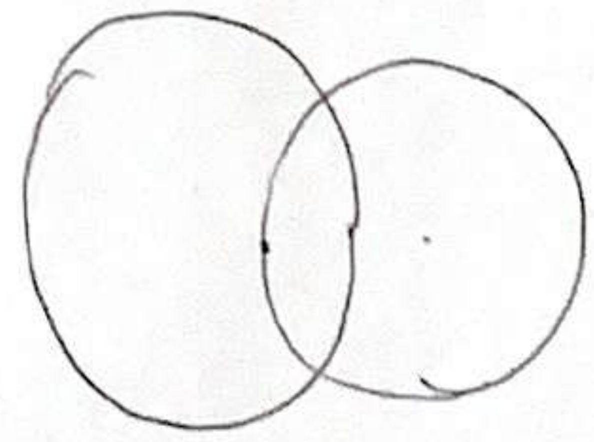
$(x-4)^2+(y-2)^2$



$$\left[\begin{array}{l}a\begin{cases}x^2+y^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases}\\ \begin{cases}(x^2+y^2)\le 8a-4b\\ 8a-4b\le 20\end{cases}\end{array}\right. \quad \begin{cases}x^2+y^2\le 20\\ b\le 2a-5\end{cases}$$

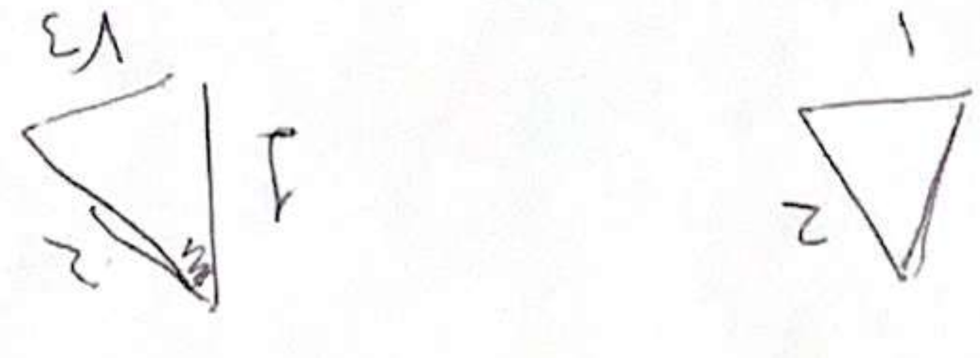


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2\le 20\\ y\le 2x-5\end{cases}\\ \begin{cases}(x-4)^2+(y+2)^2\le 20\\ y\ge 2x-5\end{cases}\end{array}\right.$$



$\cos=\dfrac{\cancel{1}}{\sin x-\sin}$

$\overline{\sin\ \sin}$



$n=5\cdot 4$

$\underline{n}$

$y = 2x - 5$

$x^2 + (2x-5)^2 = 80$

$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 80$

$5x^2 - 20x - \cancel{55} = 0$

$x^2 - 4x - 11 = 0$

$D = 16 + 44 = 60$

$\frac{4 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 2 \pm \sqrt{15}$

$16 - 1 = 15$

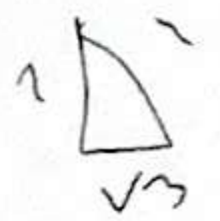
$16 - 1 = 15$

$2(2+\sqrt{15}) - 5$

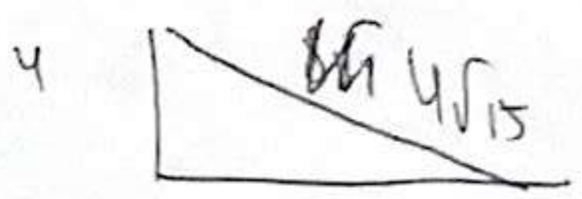
$4 + 2\sqrt{15} - 5$

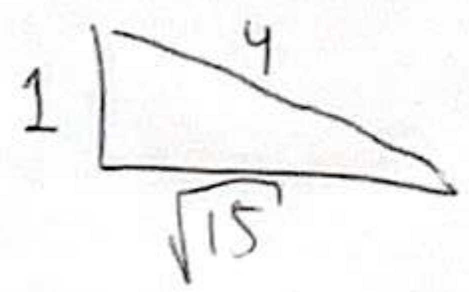
$4 - 2\sqrt{15} - 5$

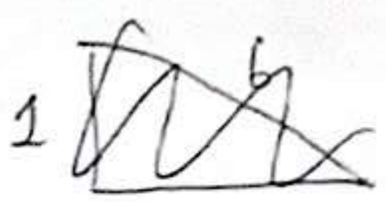
$-2\sqrt{15} - 1$



$R = 4\sqrt{5}$







$\sqrt{15} \cdot \frac{R}{2} = \sqrt{15}.$

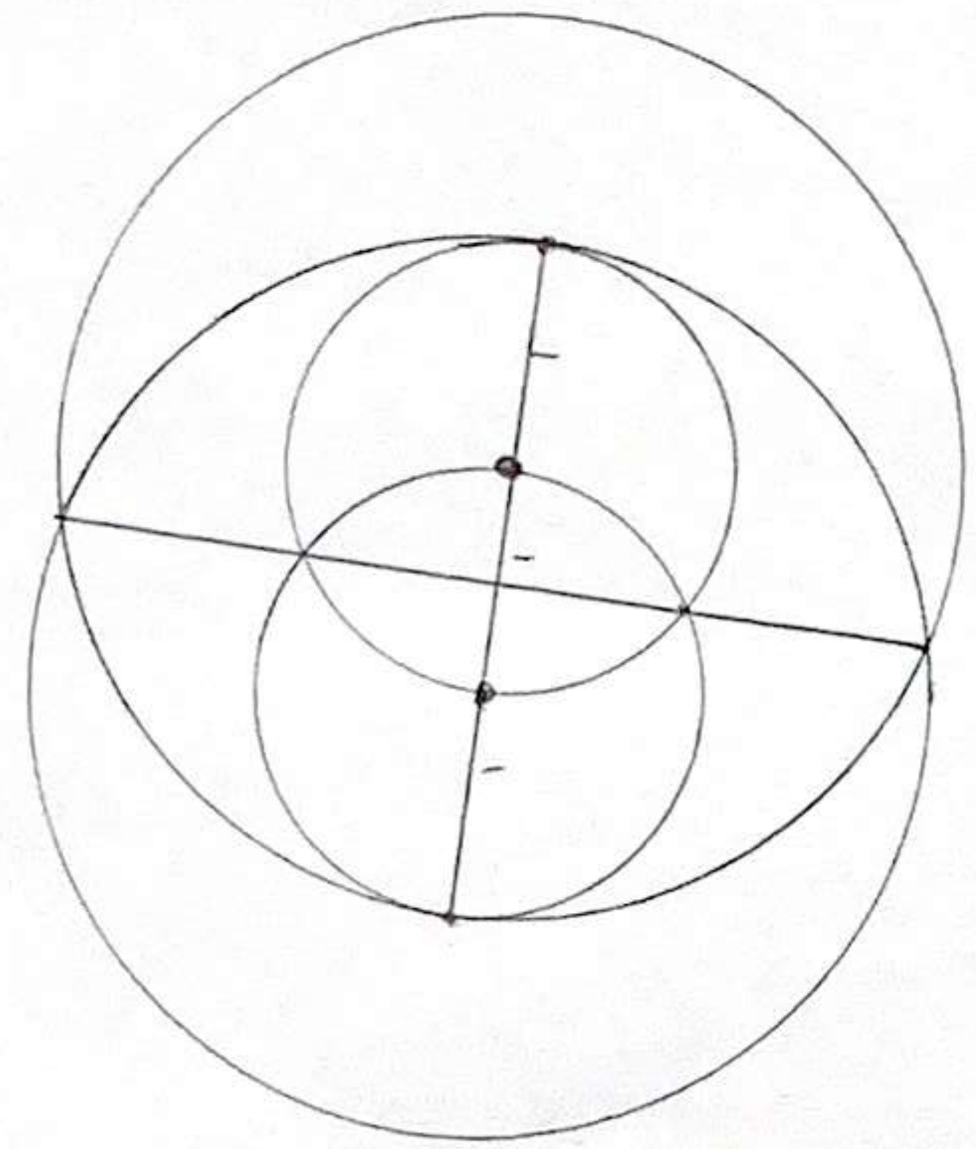
$\begin{array}{r} 80 \\ -25 \\ \hline \end{array}$

$x^2 + 4x^2 - 20x - 55 = 0$

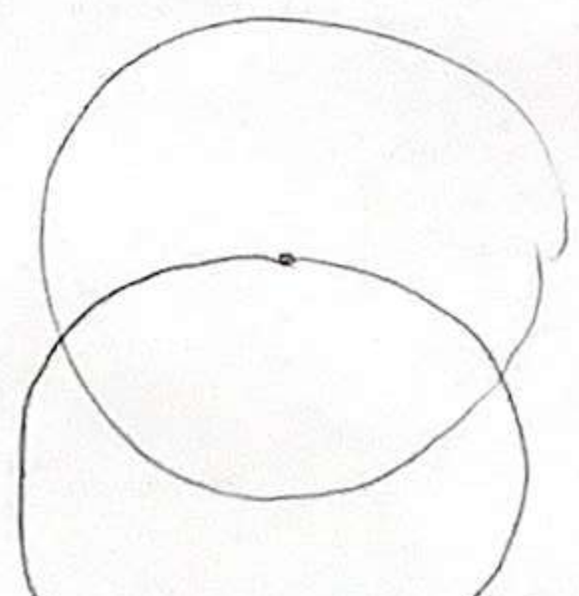
$x^2 - 4x - 11 = 0$

$D = 16 + 44 = 60$

$\frac{4 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 2 \pm \sqrt{15}$

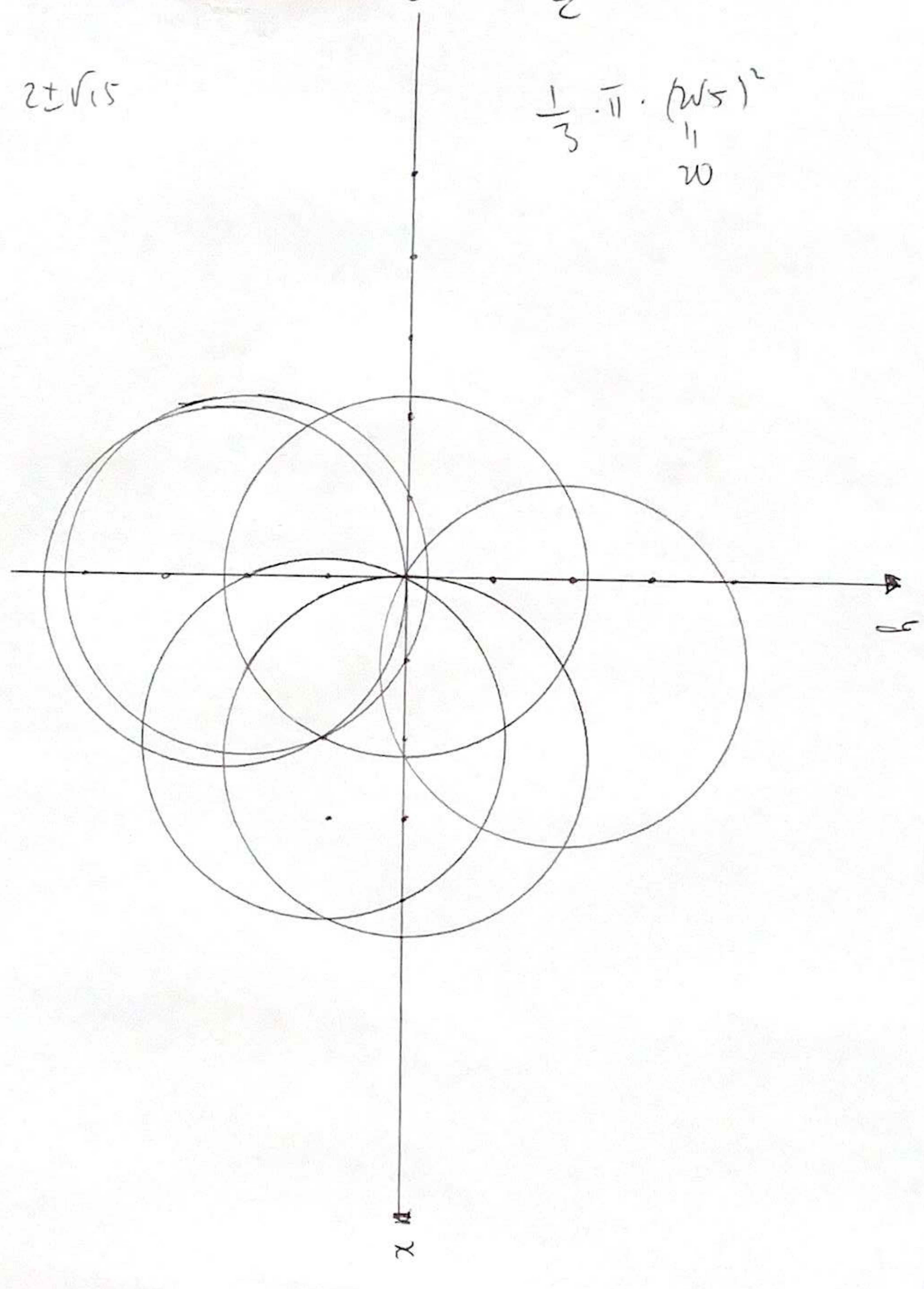


$16 - 1$



$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \underset{\underset{20}{\parallel}}{(2\sqrt{5})^2}$



Тогда рассмотрим исходную систему в Oxy: черновик 3 из 3

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104719**

ID профиля: **326206**

Вариант 21

[4] Пусть $a = 5^x \cdot 7^d$, $b = 5^y \cdot 7^e$, $c = 5^z \cdot 7^f$. чистовик 1 из 3

Тогда т.к. НОД $(a;b;c) = 35$, то $\min(x;y;z) = 1$, $\min(d;e;f) = 1$.

НОК $(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$ $\Rightarrow$ $\max(x;y;z) = 18$, $\max(d;e;f) = 16$.

Рассмотрим, сколько существует троек неотриц. целых $(x;y;z)$, что:

$\min(x;y;z) = 1$
$\max(x;y;z) = 18$ $\Rightarrow$ $(x;y;z)$:

1	18	—
1	—	18
18	1	—
18	—	1
—	1	18
—	18	1

$\} \; 19 \cdot 6$

Однако в таком случае тройки $(1;18;18)$; $(1;18;1)$ … $(18;18;1)$ были посчитаны 2 раза. Таких троек 6. Тогда всего $19 \cdot 6 - 6 = 18 \cdot 6$ троек $(x;y;z)$

Рассм., сколько сущ. троек $(d;e;f)$

$\min(d;e;f) = 1$
$\max(d;e;f) = 16$ $(d;e;f)$

1	16	—
1	—	16
16	—	1
16	1	—
—	1	16
—	16	1

$\} \; 17 \cdot 6$

Однако тройки: $(1;16;1)$; $(16;16;1)$; $(1;1;16)$ $(1;16;16)$ $(16;1;1)$ $(16;1;16)$ были посчитаны дважды.

Тогда всего $17 \cdot 6 - 6 = 16 \cdot 6$

Тогда количество троек $(a;b;c)$ = произв. кол-ва троек $(x;y;z)$ на кол-во троек $(d;e;f)$:

$$18 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 6 = 288 \cdot 36 = 10368$$

~~Ответ: 10368 вариантов~~

Ответ: 10368 вариантов

5 $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$ чистовик 2 из 3

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{2x-3}>0, \neq 1 \\ x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0, \neq 1 \\ (2x-3)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3>0 \\ x\neq 2 \\ x>-1 \\ 2x^2-3x+4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3/2 \\ x\neq 2 \end{cases}$

~~Рассм~~ Рассм. возможные случаи:

① $\cancel{\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1 = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)}$

$\cancel{\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{2x-3}(x+1)^2}$

$\frac{1}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}} = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

① $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1$

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

Сравним с 1: $\log_{2x-3}(x+1)>1 \Leftrightarrow x+1>2x-3 \to x<4$

$2x-3>2x^2-3x+5 \Leftrightarrow 2x^2-5x+8<0$ ~~это неверно~~ ~~при~~ $x\in\varnothing$

Значит, корень есть при $x>4$

Найдем, когда: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) < \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{2x-3}(x+1)^2 < \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

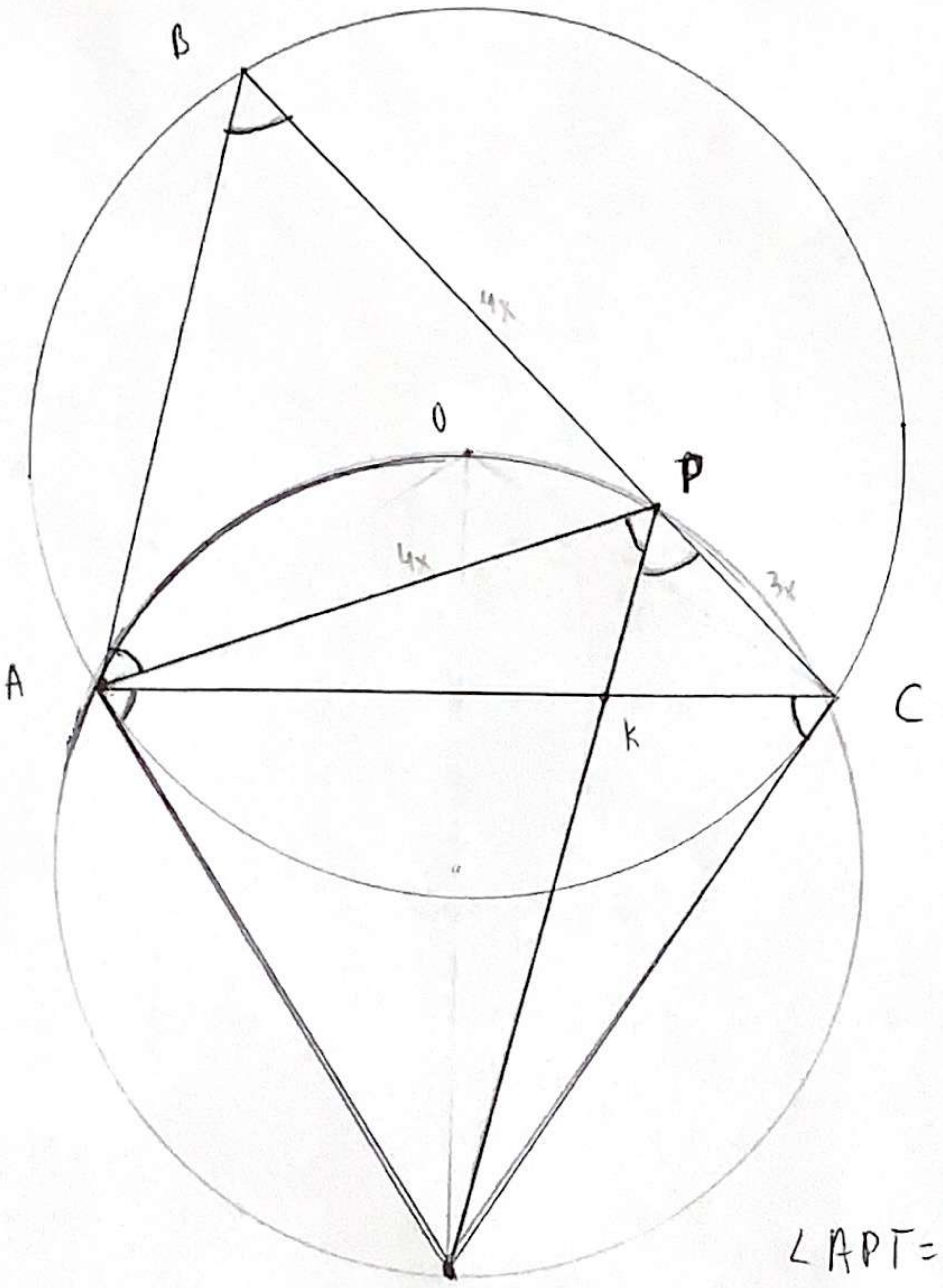
$\frac{1}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}} < \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$$\frac{1-\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\log_{x+1}\sqrt{2x-3}}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}}<0$$

⑥ $S(APK)=12$ → а) $S(ABC)=?$
$S(CPK)=9$ → б) $\angle ABC = \mathrm{arctg}(3/7)$ → $AC=?$

чистовик ЗИЗ 3

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ → $T \in$ окр-ти опис. около $\triangle OAC$
Причем OT - её диаметр



$$\frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \ (*) \to \frac{AC}{KC} = \frac{7}{3}$$

Так как TA и TC - касательные, то по теор. об угле м/у хордой и касат. $\angle CAT = \frac{1}{2}\smile AC = \angle ACT$; $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC$ } $\angle CAT = \angle ABC$

~~Из~~ $\angle AOC = 180^\circ - \angle OAC - \angle OCA$, где $\angle OAC = 90^\circ - \angle CAT$, $\angle OCA = 90^\circ - \angle ACT$

$\angle AOC = 180^\circ - 180^\circ + \angle CAT + \angle ACT = 2\angle ABC$

$\angle APC = \angle AOC$ (опир. на дугу AC в ω) $= 2\angle ABC$

$\angle APC = \angle ABP + \angle BAP$ → $\angle BAP = \angle ABC$ - значит, $\triangle ABP$ - равнобедр. ($BP = AP$)

$\angle APT = \angle ACT$, $\angle TPC = \angle TAC$ } $\angle APT = \angle CPT$ → PK - бисс-са в $\triangle APC$. Тогда $\angle CPK = \frac{1}{2}\angle APC = \angle ABC$.

Значит, $PK \parallel AB$

$\triangle ABC \sim \triangle PKC$ (по 2м углам)
⇓

$$\frac{S(ABC)}{S(PKC)} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 \overset{(*)}{=} \left(\frac{7}{3}\right)^2 \to S(ABC) = \frac{S(PKC)\cdot 49}{9} = \boxed{49}$$

б) PK - бисс-са $\triangle APC$ → $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$ → пусть $AP = 4x$ → $PC = 3x$ Пусть $\alpha = \angle ABC$

Т.к. $\triangle ABP$ - р/б → $BP = AP = 4x$.

$S(APC) = \frac{1}{2} AP\cdot PC \cdot \sin\angle APC = \frac{AP\cdot PC}{2}\cdot \sin(2\alpha) = AP\cdot PC\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha = 4x\cdot 3x\cdot \sin(\mathrm{arctg}\,3/7)\cdot\cos(\mathrm{arctg}(3/7))$

$S(APC) = 4x\cdot 3x\cdot \frac{3}{\sqrt{58}}\cdot\frac{7}{\sqrt{58}} = \frac{4\cdot 9\cdot 7}{58}x^2$

С другой стороны, $S(APC) = S(APK) + S(CPK) = 12 + 9 = 21$

} $\frac{4\cdot 9\cdot 7}{58}x^2 = 21$ → $12x^2 = 58$; $6x^2 = 29$ → $x = \sqrt{\frac{29}{6}}$

~~Следовательно,~~ По теор. косинусов для $\triangle APC$: $AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC = AC^2$

$16x^2 + 9x^2 - 2\cdot 4x\cdot 3x\cdot\cos(2\alpha) = AC^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 24x^2\cdot\cos(2\alpha) = AC^2 \Leftrightarrow x^2\left(25 - 24\cdot\sqrt{1-\left(\frac{21}{29}\right)^2}\right) = AC$

$AC^2 = \frac{29}{6}\left(25 - 24\cdot\frac{20}{29}\right) = \frac{29}{6}\left(\frac{25\cdot 29 - 24\cdot 20}{29}\right) = \frac{25\cdot 29 - 24\cdot 20}{6}$ → $AC = \sqrt{\frac{25\cdot 29 - 24\cdot 20}{6}}$

$AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

Ответ: а) 49   б) $\sqrt{\frac{245}{6}}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$ черновик 1 из 8

$\cancel{\sqrt{2x-3}}$ $2x+1$ $\log_{x+1}(2x^2+3)$, $\log_{x+1}\sqrt{2x-3} \cdot \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1$ 16

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$2x-3 > 2x^2-3x+5$

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$2x^2-5x+8<0$

$x+1 > 2x-3$

$x<4$

$D=25$

$2\log_a b$

$2\log_c a$

$\frac{24}{34}$

$\log_b c$

$\cancel{2x-3=5}$

9,

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$2\log_a b = 2\log_c a$

$72 - 18 = 54$

$2\cdot 36 - 18 + 5 = 72-18+5$

$\frac{\lg(x+1)}{\lg\sqrt{2x-3}} = \frac{\lg(2x-3)^2}{\lg(2x^2-3x+5)} \rightarrow \frac{\lg(x+1)}{\lg(2x-3)} = \frac{\lg(2x-3)}{\lg(2x^2-3x+5)}$

$\lg(x+1)\cdot\lg(2x^2-3x+5) = \lg^2(2x-3)$

$x+$ $14-3=1$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) < \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_{2x-3}(x+1) < \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

5 $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$ черновик 2 из 8

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0, \neq 1 \\ x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0, \neq 1 \\ (2x-3)^2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3>0 \\ 2x-3 \neq 1 \\ x>-1 \\ x \neq 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3/2 \\ x \neq 2 \end{cases}$ $x \in (3/2; 2) \cup (2; +\infty)$

Рассмотрим возможные случаи:

(1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) + 1 =$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \Leftrightarrow \log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

а) Сравним с 1: $\log_{2x-3}(x+1) \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq 2x-3 \Leftrightarrow \underline{x \leq 4}$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \geq 1 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 2x^2-3x+5 \Leftrightarrow$

$(x+1) > \sqrt{2x-3}$

1 ∀ на ОДЗ

$x^2+2x+1 > 2x-3$

$x^2+4>0$

$(2x-3)^2 > 2x^2-3x+5$

$4x^2-12x+9 > 2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4>0$

$(2x-1)(x-4)>0$

$\underline{x>4}$

$2x^2-3x+4=0$

$D = 9 -$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_a b$, $\log_c a^4$, $\log_b c$

$\log_{a^{1/2}} b$, $\log_c a^2$, $\log_b c$

$\log_a b = \log_c a$

$\log_a b \cdot \log_b c = 1$

$\frac{1}{\log_b a^{1/2}} = \log$

$2x^2-3x+5 > x+1$

$2x^2-2x+4>0$

$x^2-x+2>0 \rightarrow x$ – любое число

$\underline{x=3}$

$\log_{\sqrt{3}}(4)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_{2x-3}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{2x-3}(x+1)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{2x^2-3x+5}$

$\min(x;y;z)=1$ → 1 – 18 · чёрных 3 из 8

$\max(x;y;z)=18$

1 18 –

18 1 –

18 – 1

– 1 18

– 18 1

$19\cdot 6$

$18\cdot 6$

$16\cdot 6$

1 18 18

1 18 1

1 1 18

18 18 1

18 1 18

18 1 1

$18\cdot 16\cdot 36$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 16 \\ \hline 108 \\ 18\ \ \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 288 \\ \times\ 36 \\ \hline 1728 \\ 864\ \ \\ \hline 10368 \end{array}$$

$31/8$

$3/4$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1$$

$x_B = \frac{3}{4}$

$$2\log_{2x-3}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1$$

$2x^2-3x+5$:

$x_B = 3/4$: $\frac{2\cdot 9}{16} - \frac{3\cdot 3}{4} + 5 = -\frac{9}{8}+5 = \frac{-9+40}{8} = \frac{31}{8}$

$2x^2-3x+5 > x+1$

$2x^2-4x+4>0$

$x^2-2x+2>0$

$(x-1)^2$

$x+1>2x-3$

$\underline{x<4}$

$(2x-3)^2 > 2x^2-3x+5$

$4x^2-12x+9 > 2x^2-3x+5$

$x+1>2x-3$

$\underline{x<4}$

$2x^2-9x+4>0$

$D = 81 -$

$\log_{2x-3}(x+1)^2(2x-3) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\lg 8\left(\frac{1}{\lg a} - \frac{1}{\lg b}\right) = \frac{1}{2}$

$2\log_{2x-3}+$

$\log_a 8 - \log_b 8 = 1/2$

$2(\log_a 8 - \log_b 8) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{c}\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \\ \shortparallel \\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \shortparallel \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)\end{array}}$$

$2(\log_{2x-3}(x+1) - \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)) = 1$

$2\log_{2x-3}(x+1) = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1$

4) Пусть $a = 5^x \cdot 7^d$

$b = 5^y \cdot 7^e$

$c = 5^z \cdot 7^f$

Тогда $\begin{cases} x \geq 1,\ y \geq 1 \ \dots\ f \geq 1 \\ \max(x;y;z) = 18 \\ \max(d;e;f) = 16 \end{cases}$

Пусть $d = 16$; $y = 18$. Тогда: $\begin{cases} a = 5^x \cdot 7^{16} \\ b = 5^{18} \cdot 7^e \\ c = 5^z \cdot 7^f \end{cases}$ $x \geq 1,\ e \geq 1,\ z \geq 1;\ f \geq 1$; $x \leq 18;\ e \leq 16;\ z \leq 18;\ f \leq 16$

Таким образом, $x \in [1;18]$

$e \in [1;16]$

$z \in [1;18]$

$f \in [1;16]$

Тогда число a можно выбрать 18 способами, b − 16 способами, c − $16 \cdot 18$ способами.

~~[illegible]~~ Тогда $(a;b;c)$ можно выбрать $18 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 18$ способами.

$\boxed{4}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 35 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

~~Пусть $a = 5^{1+x} \cdot 7^{1+y}$, $b = 5^{1+m} \cdot 7^{1+n}$, тогда~~

Пусть $a = 5^{x} \cdot 7^{y}$, $b = 5^{m} \cdot 5^{n}$, $c = 5^{k} \cdot 7^{e}$

Тогда по условию $\begin{cases} a,b,c,d,e,f \geq 1 \\ \max(a,m,k) \leq 18 \\ \max(y,n,l) \leq 16 \end{cases}$

~~Пусть любая из $a \in [1;18]$, где~~

Пусть $l = 16$, $k = 1$

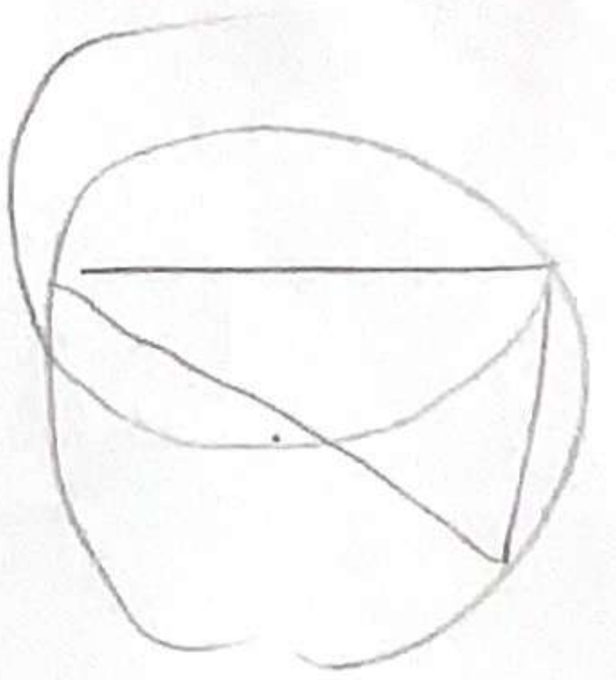
$400 + 441 = 841$

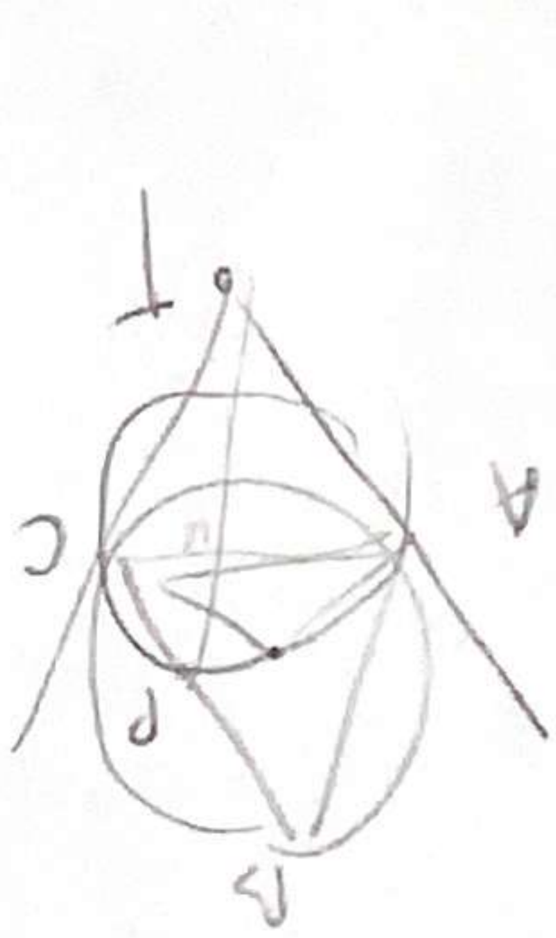
$\sin 2x = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{58}} \cdot \frac{7}{\sqrt{58}} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$

$12x^2 = 58 \Leftrightarrow 6x^2 = 29$

$9 + 49 = 58$

$90^\circ - \alpha + 90^\circ$





$2x^2-3x+5$

$D=9-40<$

$18\cdot 36\cdot 16$

$2\cdot 9\cdot$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)(x+1)$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times\, 16 \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline \end{array}$

$\frac{1}{\log_{x+1}(\sqrt{2x-3})}$ $\sqrt{2x-3}=a;\ x+1=b;\ 2x^2-3x+5=c$

$\log_a b=\log_b c \Leftrightarrow \log_b c\cdot\log_b a=1$

$\frac{1}{\log_b a}=\log_b c \Leftrightarrow$

1	18	–
1	–	18
18	–	1
18	1	–
–	1	18
–	18	1

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\frac{\lg(x+1)}{\lg(\sqrt{2x-3})}=\frac{\lg(2x-3)^2}{\lg(2x^2-3x+5)}=\frac{2\lg(x+1)}{\lg(2x-3)}=$

$\log_a b=\log_c a$ $(2x-3)(x+1)$

$\log_a b=\frac{1}{\log_a c}$ $2x^2+2x-3x-3$

$5^x\ 7^y$

$5'$

1;18;1

1;18;18

18;1;1

18;18;1

$\log_{2x-3}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$5^x\ 7^d$

$5^y\ 7^e$

$5^z\ 7^f$

$\frac{\lg(x+1)}{\lg(2x-3)}=\frac{\lg(2x-3)}{\lg(2x^2-3x+5)}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{x+1}\sqrt{\ }$

x, y, z: от [1; 18]

один равен 18.

x; y; z : один равен 18, остальные

(1;16;1); (1;16;16)

(16;16;1) (16;1;16)

(1;1;16);

1 ~~16~~ 1

1 ~~16~~ 16

16 ~~1~~ 1

16 16 1

16 1 16

1 1 16

1	16	–
1	–	16
16	–	1
16	1	–
–	1	16
–	16	1

$(5^a 7^b$ $(5^x \cdot 7^y)\cdot(5^m \cdot 7^n)\cdot 15^c.$ черновик 7 из 8

$(5^a \cdot 7^b)\cdot(5^c \cdot 7^d)\cdot(5^e \cdot 7^f)$

$a \geq 1$ $a, b, \ldots f \geq 1$

$\max(b;d;f)$

$$\left.\begin{array}{l} 5^a \cdot 7^x \\ 5^b \cdot 7^y \\ 5^c \cdot 7^z \end{array}\right\} \quad a\in[1;18];\ b\in[1;18];\ c\in[1;18] \to \underline{18^3\cdot 16^3}$$

$x\in[1;16]$ $y\in[1;16)$ $z\in[1;16]$

$0 \ldots 18 \to 19$ способов $\to 19^6$ Пусть $z=1; f=16$

5. $5^x \cdot 7^y$

$5\cdot 7$

$\min(x;y;z)=1$ | $\min(d;e;f)=1$

$\max(x;y;z)=18$ | $\max(d;e;f)=16$

x	y	z
= 1	$\in[0;18]$	= 18

1 18

1 18

18 1

1; 18

1 18 _ -19

1 _ 18 -19

18 _ 1 -19

18 1 _ -19

_ 1 18 -19

_ 18 1 -19

118

1 18 _ 7

1 _ 18

18 _ 1

18 1 _

_ 1 18

_ 18 1

19·6

18 :

чернови 8188

$(2x-3)^2 > 2x^2-3x+5$

$4x^2-12x+9 > 2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4>0$

$81-4\cdot4\cdot2=81-32=$

$$\begin{array}{r} 81 \\ -32 \\ \hline 49 \end{array}$$

$\frac{9\pm7}{4}=\left[\begin{array}{l}4\\1/2\end{array}\right.$ $(2x-1)(x-4)>0$

$1/2$ 4

$x+1>2x-3$

$x<4$

$\log\sqrt{2x-}$

$2x^2-3x+5 \le 2x-3$

$2x^2-5x+8\le0$

$D=25$