Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104631**

ID профиля: **872434**

Вариант 21

Чистовик 1. (n=7 по условию)

$a_1,\ d \in \mathbb{Z}$ $\qquad d>0 \qquad S=\dfrac{a_1+a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$

$a_n=a_1+d(n-1)$

$$\begin{cases} a_8\cdot a_{17}>S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14}<S+60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a_1+7d)\cdot(a_1+16d)>S+60 \\ (a_1+10d)\cdot(a_1+13d)<S+60\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2>7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23da_1+130d^2<7a_1+21d+60\end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1+112d^2-27>S \\ a_1^2+23da_1+130d^2-60<S\end{cases}$$

$$a_1^2+23da_1+112d^2-27>a_1^2+23da_1+130d^2-60$$

$$33>18d^2$$

$$\Downarrow$$

$$d^2<\frac{33}{18} \qquad \begin{cases} d\in\left(0;\ \frac{33}{18}\right) \\ d\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow d=1$$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112-27>7a+21 \\ a_1^2+23a_1+130-60>7a+21\end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0\end{cases}$$

$\boxed{4>\sqrt{15}>3}$

① $a\in(-\infty;\infty)\setminus\{-8\}$

-8 $\quad a$

$D=0$

$a=\dfrac{-16}{2}=-8$

② $D=60$

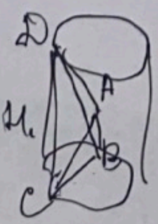
$a_{1,2}=\dfrac{-16\pm2\sqrt{15}}{2}=-8\pm\sqrt{15}$

$-12 \quad -8-\sqrt{15} \quad -8+\sqrt{15} \quad -4 \quad a$

$a\in\{-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5\}$

Ответ: $a\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$

Чистовик 2.



Задание 2.

ABC и ABD — равнобед.

$AH = \frac{AB}{2} = 2 \Rightarrow CH = \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$

$DH = \sqrt{6^2-2^2} = \sqrt{32}$

Радиус цилиндра будет наименьшим если AB лежит на том же основании, что и D

$\Rightarrow H_1 = D$ т.е. $CD \perp DH$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{32} = 2\sqrt{32}$

т.к. основание цилиндра описано вокруг $\triangle ADB$.

то

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4 \cdot S_{ABC}} = \frac{\cancel{4}\sqrt{32} \cdot \cancel{\sqrt{32}}}{\cancel{4} \cdot 2 \cdot \cancel{\sqrt{32}}} = \frac{\sqrt{32}}{2} = 2\sqrt{2}$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

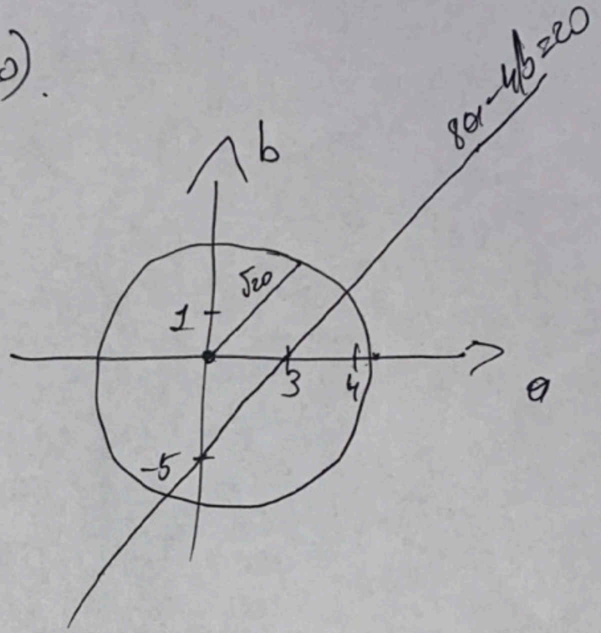
Чистовик. 3.

Задание 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b;\ 20).\end{cases}$$

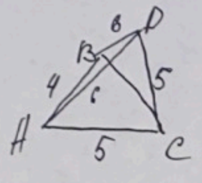
① Если $8a-4b \geq 20$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 20 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20.\end{cases}$$



Черновик 4.

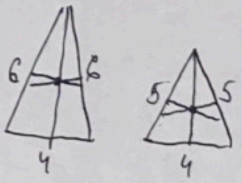
№2.

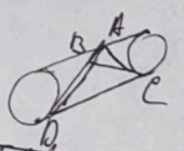


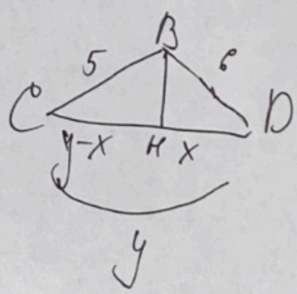
$CH_1 = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$DH_1 = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$DC = \sqrt{32-21} = \sqrt{11}$







$BH = \sqrt{36 - x^2} = 4$

$BH = \sqrt{25 - y^2 + 2xy - x^2} = 4$

$x^2 = 20$

$y^2 - 2xy + x^2 = 9$

$(y-x)^2 = 9$

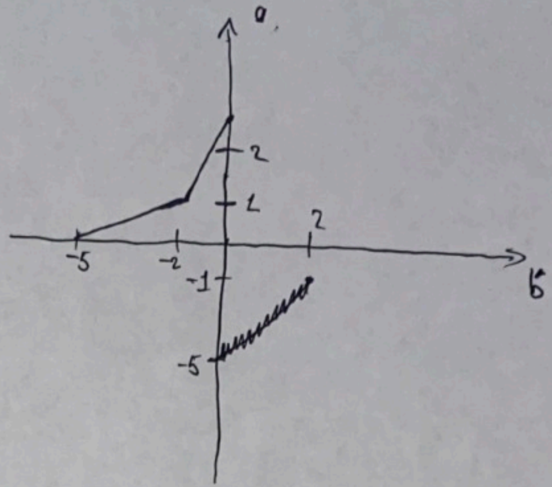
$x = \sqrt{20}$

$y = 3 + \sqrt{20}$

Черновик 3.

N 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,\ 20)\end{cases}$$



① Если $8a-4b\le 20$

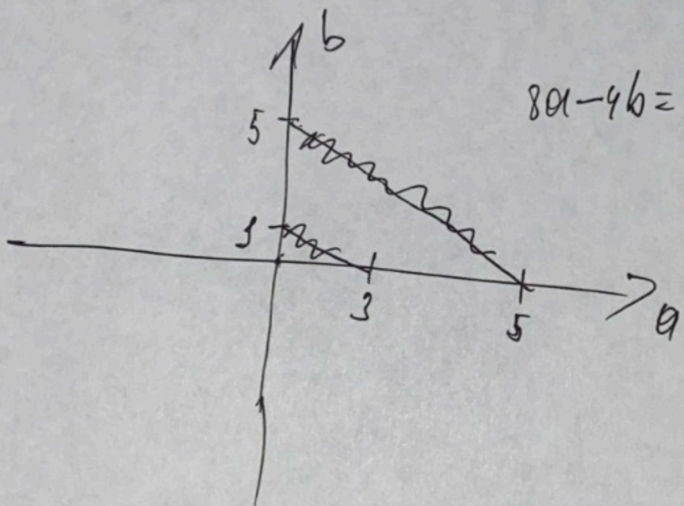
$$\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 20\end{cases}$$

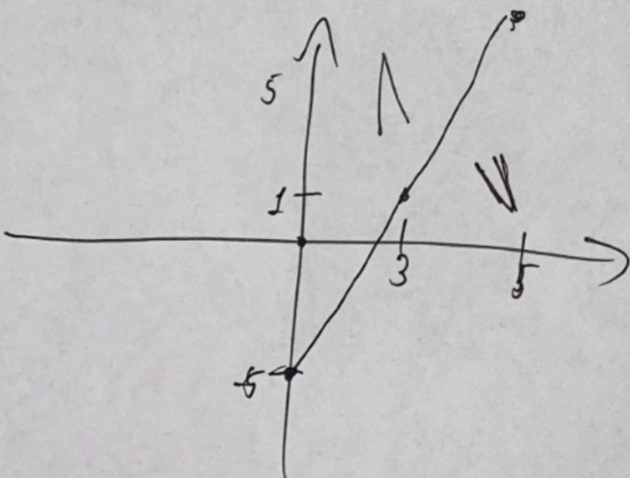
② $8a-4b>20$

$2a-b=5$

$2a=5+b$

$8a-4b=20$





Черновик ~~Чистовик~~ 2.

Задание 1.

$a_1, d \in Z$ $\quad d > 0$ $\quad a_n = a_1 + d(n-1)$

$$S = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + d \cdot 7) \cdot (a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27 \\ (a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

$7a_1 + 21d + 27 < 7a_1 + 21d$

$(a_1 + 7d) \cdot (a_1 + 16d)$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d)$

Черновик 1.

№1.

$$\begin{cases} (a_1 + d\cdot 7)\cdot(a_1 + d\cdot 16) > \cancel{a_1 + a_1 (\ldots) \cdot 7}\ \frac{a_1 + a_1 + d\cdot 6}{2}\cdot 7 + 27 \\ (a_1 + d\cdot 10)\cdot(a_1 + d\cdot 13) < (a_1 + 3d)\cdot 7 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 d\cdot 7 + a_1 d\cdot 16 + 16\cdot 7 d^2 > (a_1 + 3d)\cdot 7 + 27 \\ a_1^2 + a_1 d\cdot 10 + a_1 d\cdot 13 + 130 d^2 < (a_1 + 3d)\cdot 7 + 60 \end{cases} -$$

$$18d^2 < 33$$

$$d^2 < \frac{33}{18}$$

$$d \in \{1\}$$

$16 \cdot 7 = 112$

$$(-11+7)\cdot(-11+16) > (-11+3)\cdot 7 + 27$$

$-4 \cdot 5 = -20$; $-8 \cdot 7$; $-56 + 27$

$$-9\cdot 7 + 27$$

$$\begin{cases} \cancel{(a_1 + 7)(a_1 + 16) > (a_1 + 3)\cdot 7 + 27} \\ \end{cases}$$

$$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$$

$$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$$

$D = 256 - 256 = 0$

$a_1 = \frac{-16}{2} = -8$

$+ \quad -8 \quad +$

$D = 256 - 196 = 60$

$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$

$-8-\sqrt{15} \qquad -8+\sqrt{15}$

≈ 4

-8

$(-2)\cdot 1 < -9\cdot 7 + 60$

$-2 < -3$

$-1\cdot 2 < -8\cdot 7 + 60$

$-2 < 4$

$-11 \ -10 \ -9 \ -8 \ -7 \ -6 \ -5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104631**

ID профиля: **872434**

Вариант 21

Черновик 3.

№ 5.

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(\cancel{\ }\ 2x^2-3\ldots$$

$$\sqrt{2x-3}\cdot(2x^2-3x+5) = 1$$

$$\cancel{2x^2-3x+5}$$

$$4x^2-12x+9 = x+1$$

$$4x^2-13x+8=0$$

$$D = 169-128 = 41$$

$$x = \frac{13\pm\sqrt{41}}{8}$$

$$a\cdot(a-1)\cdot(a-1)=4$$

$$\cancel{a(a^2-a-a-a^2)}$$

$$\cancel{2a^2}$$

$$a(a^2-2a+1)=4$$

$$a^3-2a^2+a=4$$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5) =$$

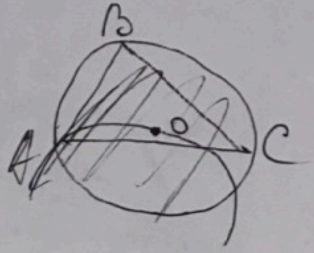
$$= \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{2}\ln(2x-3)}\cdot\frac{2\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)}\cdot\frac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)} =$$

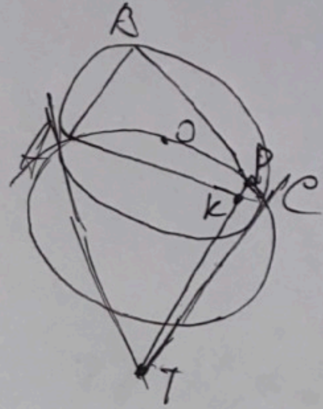
$$=4.$$

Черновик 2.

№5.

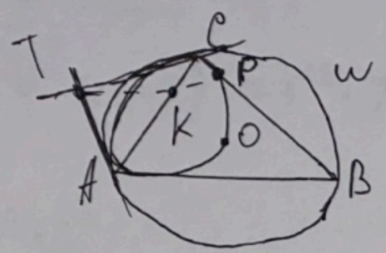
Дод.





~~Черновик 3~~. Черновик 4

Задание 6.



$$\frac{S(\triangle APK)}{S(\triangle CPK)} = \frac{12}{9} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} \Rightarrow AC = 21$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot \underbrace{BH}_{\text{высота}} = 10{,}5 \cdot BH.$$

Черновик 1.

№4.

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 35 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

1) $6 \cdot 18 \cdot 16$

2) $3 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 17$

3) $3 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 15$

$18 \cdot 16 \, (6 + 51 + 45) = 18 \cdot 16 \cdot 102$

29376.

1) ~~6 · Нок · Нок~~

2) ~~6 · Нок · 34~~

1) 6в.

2)
557
575
755

3)
757
577
775

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 16 \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline 288 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 288 \\ 102 \\ \hline 576 \\ 288 \\ \hline 29376 \end{array}$$

$a = 35a_1 \quad b = 35b_1 \quad c = 35c_1$

НОД $(a_1; b_1; c_1) = 1$

$5^{18} \cdot 7^{16} = ak_1 = bk_2 = ck_3 \Rightarrow$

$a = 5^{m_1} \cdot 7^{n_1}$

$b = 5^{m_2} \cdot 7^{n_2}$

$c = 5^{m_3} \cdot 7^{n_3}$

21104631 (U872434 M1295680)

Чистовик ⑥

Задание 6.

Продолжение.

очевидно, $\angle CPT = \angle CPK$

$\angle AOC = \angle OAC = \alpha$; т.к. $AO = CO = R(\omega)$

$\Rightarrow \angle AOC = \angle OAC = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - 2\alpha$

~~$\Rightarrow$~~ $\angle AOC$ – централ. $\angle$ и опирается на дугу $\breve{AC}$

$\angle ABC$ – вписанный $\angle$ и опирается на $\breve{AC}$

$\Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90 - \alpha = \angle CPK$

$\Rightarrow AB \parallel PK$, т.к. $\angle ABC = \angle CPK$ – соответствующие при секущей BC. ч.т.д.

б) $tg\angle ABC = \frac{3}{7}$.

Ответ: а) 2α.

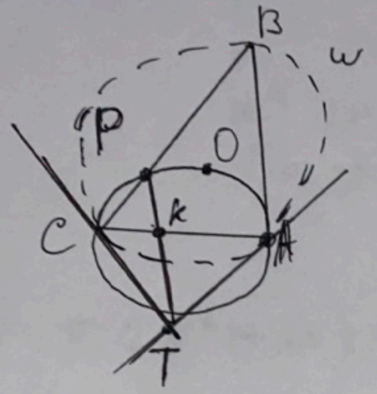
б)

21104631 (U872434 M1295680)

Чистовик (5)

Задание 6.

а) Найти: $S(\triangle ABC)$



$\cancel{\frac{S(\triangle APK)}{S(\triangle CPK)} = \frac{12}{9}}$

$S(\triangle APK) = 12$

$S(\triangle CPK) = 9$

Пусть h_p - высота $\triangle ACP$, проведенная из вершины P,

тогда $S(\triangle APK) = \frac{1}{2} h_p \cdot AK = 12 \Rightarrow AK = \frac{24}{h_p}$

$S(\triangle CPK) = \frac{1}{2} h_p \cdot CK = 9 \Rightarrow CK = \frac{18}{h_p}$

$\Rightarrow AC = \frac{42}{h_p}$

$KP \parallel AB \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CPK)} = \frac{AC}{KC} =$

$= \frac{42}{h_p} \cdot \frac{h_p}{18} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3} = \frac{S(ABC)}{9}$

$\Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{7}{3} \cdot S(\triangle CPK) = \frac{7}{3} \cdot 9 = 21$

Теперь докажем, что $KP \parallel AB$:

В окружности AOC $\angle CPT$ и $\angle CAT$ - вписанные и опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle CPT = \angle CAT = 90° - \alpha$

где α - $\angle OAC$

21104631 (U872434 M1295680)

Чистовик (4).

Задание 5.

Продолжение:

$b=2 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = (2x^2-3x+5)^2$

$2x^2-3x+5 = 2x-3$

$2x^2-5x+8=0$

$D = 25-64<0$ решений нет. $\Rightarrow b \neq 2$

$\Downarrow$

$b=1$

$(2x-3)^2 = 2x^2-3x+5$

$4x^2-12x+9 = 2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4=0$

$D = 81-32 = 49$

$x_1 = \frac{9+7}{4} = 4$

$x_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$, но x не уд. огранич. $2x-3<0$!?

Проверим при $x=4 \Rightarrow a = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

$b = \log_{25} 5^2 = 1$

$c = \log_5 25 = 2$

т.е. $a = c = b+1$

ч.т.д.

Ответ: 4.

Чистовик ③

Задание 5.

$a = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$b = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$c = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

Найти такие x, что:

$$\left[\begin{array}{l} a = b = c+1 \\ a = c = b+1 \\ b = c = a+1 \end{array}\right.$$

Ограничения:

$$\left\{\begin{array}{l} x+1 > 0 \\ 2x-3 > 0 \\ 2x^2-3+5 > 0 \end{array}\right\} \neq \{1\}$$

Не равны 1

Заметим, что

$$a \cdot b \cdot c = \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{2}\ln(2x-3)} \cdot \frac{2\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)} \cdot \frac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)} = 4$$

[redacted]

$\Rightarrow$ нужно решить

$$\left[\begin{array}{l} a \cdot a \cdot (a-1) = 4 \\ a \cdot (a-1) \cdot a = 4 \\ a \cdot (a-1) \cdot (a-1) = 4 \end{array}\right.$$

$a^3 - a^2 = 4 \Rightarrow a^3 - a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = 2$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \hline a^3 - 2a^2 & a^2+a+2 \\ \quad a^2 - 4 & \\ \quad a^2 - 2a & \\ \qquad 2a - 4 & \\ \qquad 2a - 4 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow a^2 + a + 2 = 0$

$D = 1 - 8 < 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 = b \Rightarrow c = 1 \\ a = c = 2 \Rightarrow b = 1 \\ a = 1 \Rightarrow b = 2 = c \end{array}\right.$$

Чистовик ②

Задание 4.

Продолжение:

Аналогично для степени 7 ~~,~~ кол-во вариантов:

$(16-2)\cdot 3! + 3+3 = 14\cdot 6 + 6 = 15\cdot 6$

т.к. каждому выбору степени „5" соответствует выбор степени „7", то всего:

$17 \cdot \cancel{6} 6 \cdot 15 \cdot 6 = \underline{\underline{9180}}$.

$102 \times 90 = 9180$

Ответ: 9180.

21104631 (U872434 M1295680)

Чистовик ①

Задание 4.

Если НОД $(a, b, c) = 35 \Rightarrow a = 35a_1,\ b = 35b_1;\ c = 35c_1$,

где НОД $(a_1; b_1; c_1) = 1$

Аналогично $5^{18} \cdot 7^{16} = ak_1 = bk_2 = ck_3 \Rightarrow a = 5^{m_1} \cdot 7^{n_1}$

$b = 5^{m_2} \cdot 7^{n_2}$

$c = 5^{m_3} \cdot 7^{n_3}$

причем

$$\begin{cases} 1 \le m_1;\ m_2;\ m_3 \le 18 \\ 1 \le n_1;\ n_2;\ n_3 \le 16 \end{cases}$$

причем $\min m_i = \min n_j = 1$

$\max m_i = 18$; $\max n_j = 16$

$\Rightarrow \{m_1; m_2; m_3\} = \{1; 18; m\}$ – всего 18 вариантов различны.

$\{n_1; n_2; n_3\} = \{1; 16; n\}$ – всего 16 различ. вариантов

Кол-во остальных способов выбрать степени 5:

если $m = 2, 3, \ldots, 17$ (всего 16 способов), то всего

с каждой цифрой можно составить $3!$ вар.

т.е. всего: $16 \cdot 3! \Rightarrow m = 1 \Rightarrow$ перестан. $\{1; 1; 18\}$ всего

$\frac{3!}{2!1!} = 3$; $m = 18 \Rightarrow \{1; 18; 18\}$ всего $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ способа

Всего: $16 \cdot 6 + 3 + 3 = 17 \cdot 6$.