Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104543**

ID профиля: **848353**

Вариант 21

Черновик

$\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = (a_4 + 3d)\cdot 7$

$a_1; d$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d) > \frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < \frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7+60\end{cases}$$

$\times\begin{array}{r}16\\7\\\hline 112\end{array}$

$d>0.$

$a_1^2+23da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27$

$a_1^2+23da_1+130d^2 < 7a_1+21d+60.$

$-\begin{array}{r}60\\27\\\hline 33\end{array}$

$a_1^2+23da_1+112d^2 > 7a_1+21d+27$

$+$ $-a_1^2-23da_1-130d^2 > -7a_1-21d-60$

$-\begin{array}{r}112\\48\\\hline 64\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}130\\81\\\hline 49\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}64\\49\\\hline 15\end{array}$

$-18d^2 > 33$

$-6d^2 > 11$

$6d^2 < 11$

$d^2 < \frac{11}{6} < 2.$

$d<\sqrt{2}$

$\boxed{d=1}$

$\cancel{(a_1+7)}$

$a_1^2+23a+112 > 7a_1+21+27$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$ $\quad a_1 \neq -8$

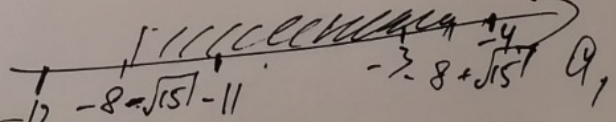
$a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21+60.$

$a_1^2+16a_1+49<0$

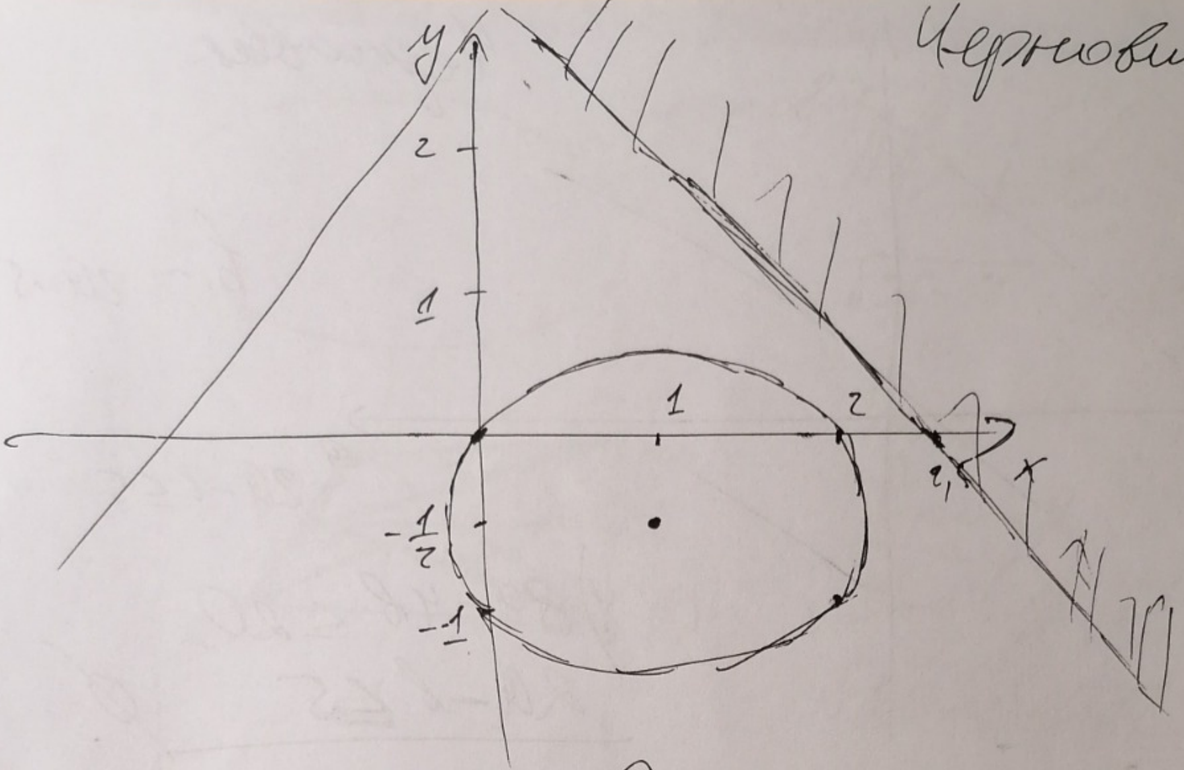
$\frac{D}{4} = 64-49=15$

$a_{1,2} = \frac{-8\pm\sqrt{15}}{1} = -8\pm\sqrt{15}$

$-11; -10 \ldots; -3 \big) -8$



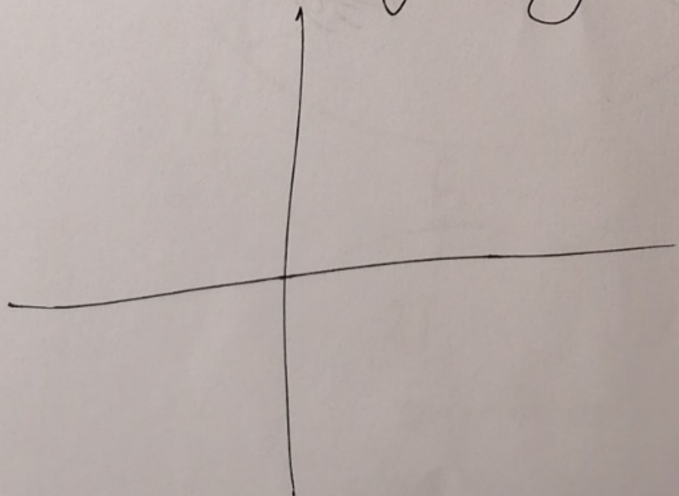
Черновик.



$$2)\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b \ge 20 \end{cases} \qquad \sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}= 2\sqrt{5}$$

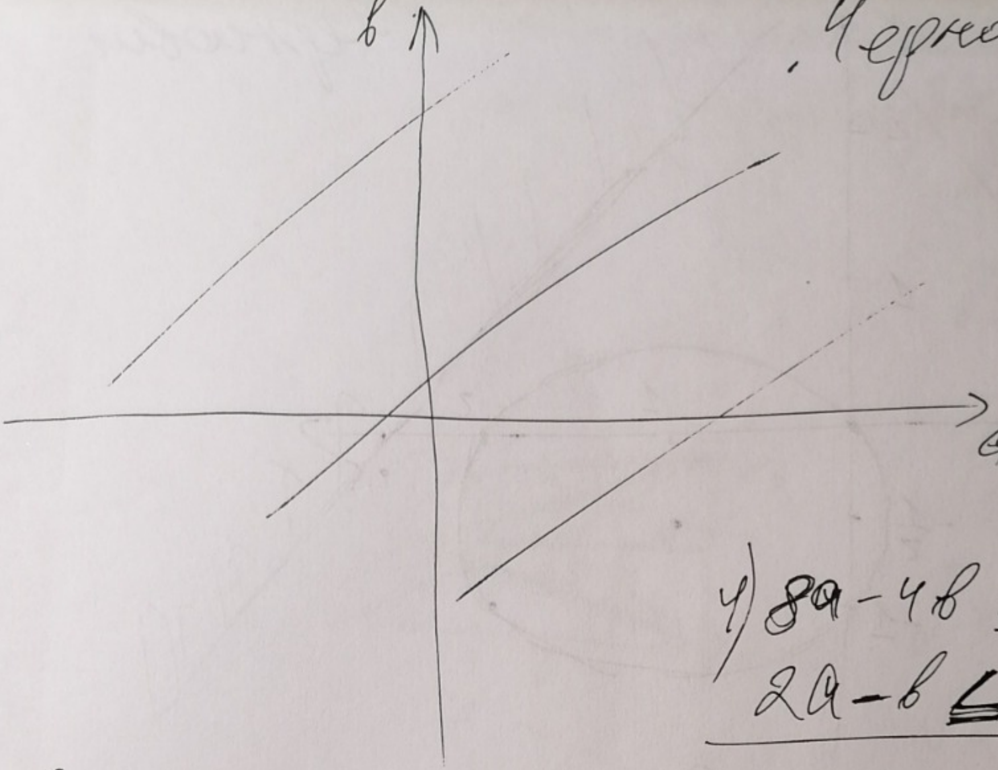
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 2a-b \ge 5 \end{cases} \qquad b \le 2a-5$$

$$x^2-2ax+\cancel{a^2}+y^2-2by+\cancel{b^2} \le \cancel{20}$$



21104543 (U848353 M1300363)

Черновик



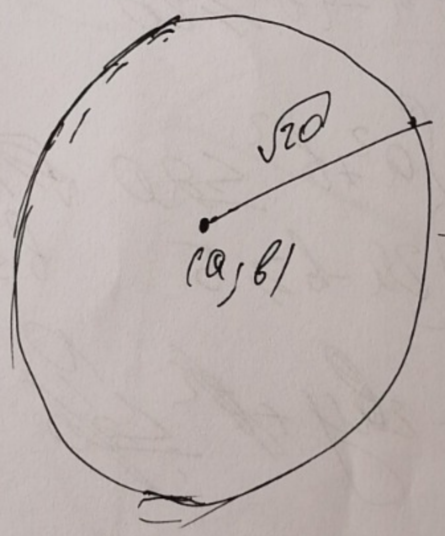
$b \geq 2a-5$

$2a-b \leq 5$

4) $8a-4b \leq 20$

$2a-b \leq 5$ $\varnothing$.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20$.



$a^2+b^2 \leq 2a-b$

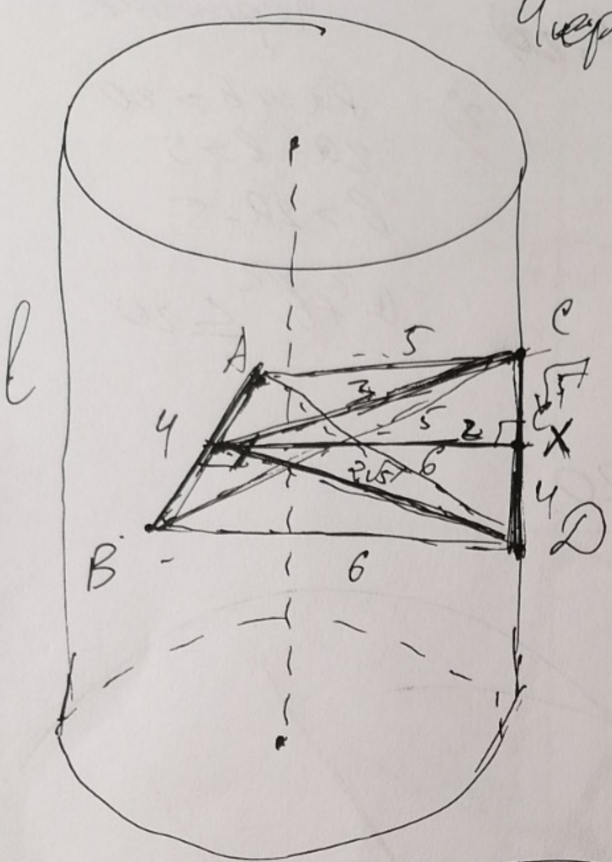
$a^2-2a+1+b^2+b+\frac{1}{4} \leq 1\frac{1}{4}$

$(a-1)^2+(b+\frac{1}{2})^2 \leq \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$a=0$ $b=3$.

~~(a; b)~~

Черновик



$AB \perp l$

$\sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$

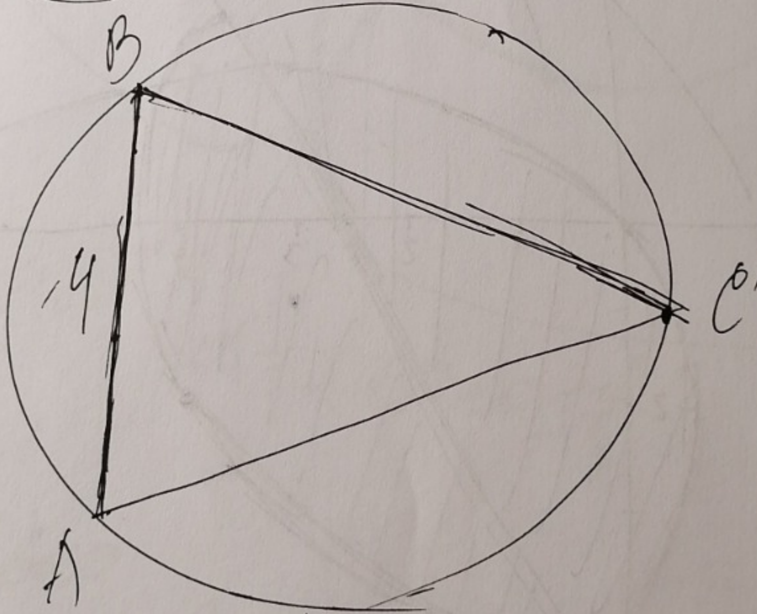
$D_{min} = 4.$

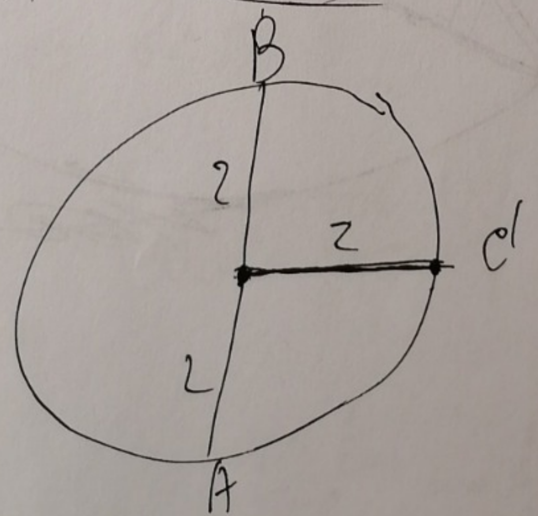
$R_{min} = 2.$

$\sqrt{3^2-2^2} = \cancel{2}\sqrt{5}$

$\sqrt{20-4} = \sqrt{16} = 4$

$CD = 4+\sqrt{5}$





21104543 (U848353 M1300363)

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20)$

Черновик

1) $8a-4b \le 20$

$2a-b \le 5$

$b \ge 2a-5$

2) $8a-4b > 20$

$2a-b > 5$

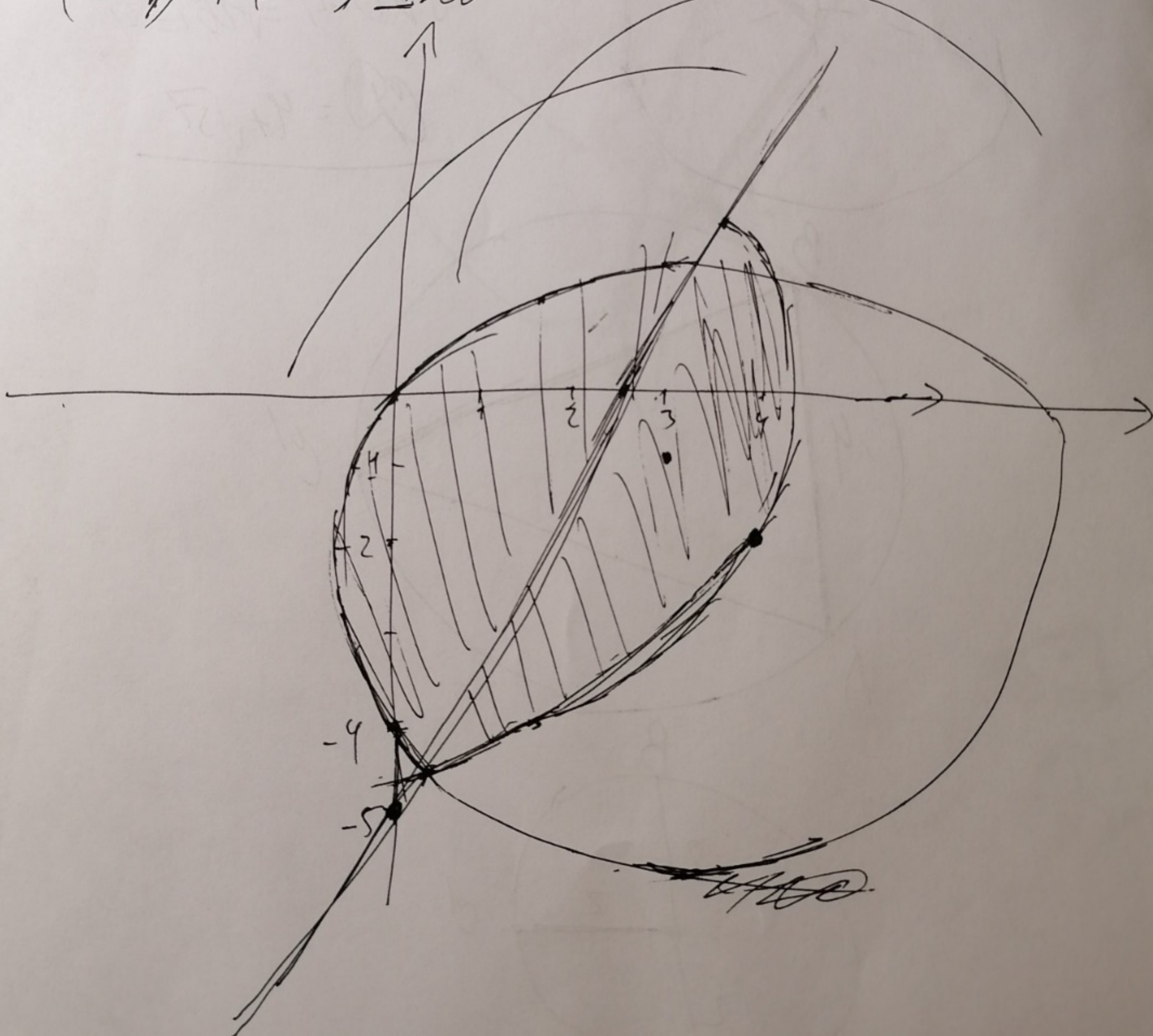
$b > 2a-5$

$a^2+b^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

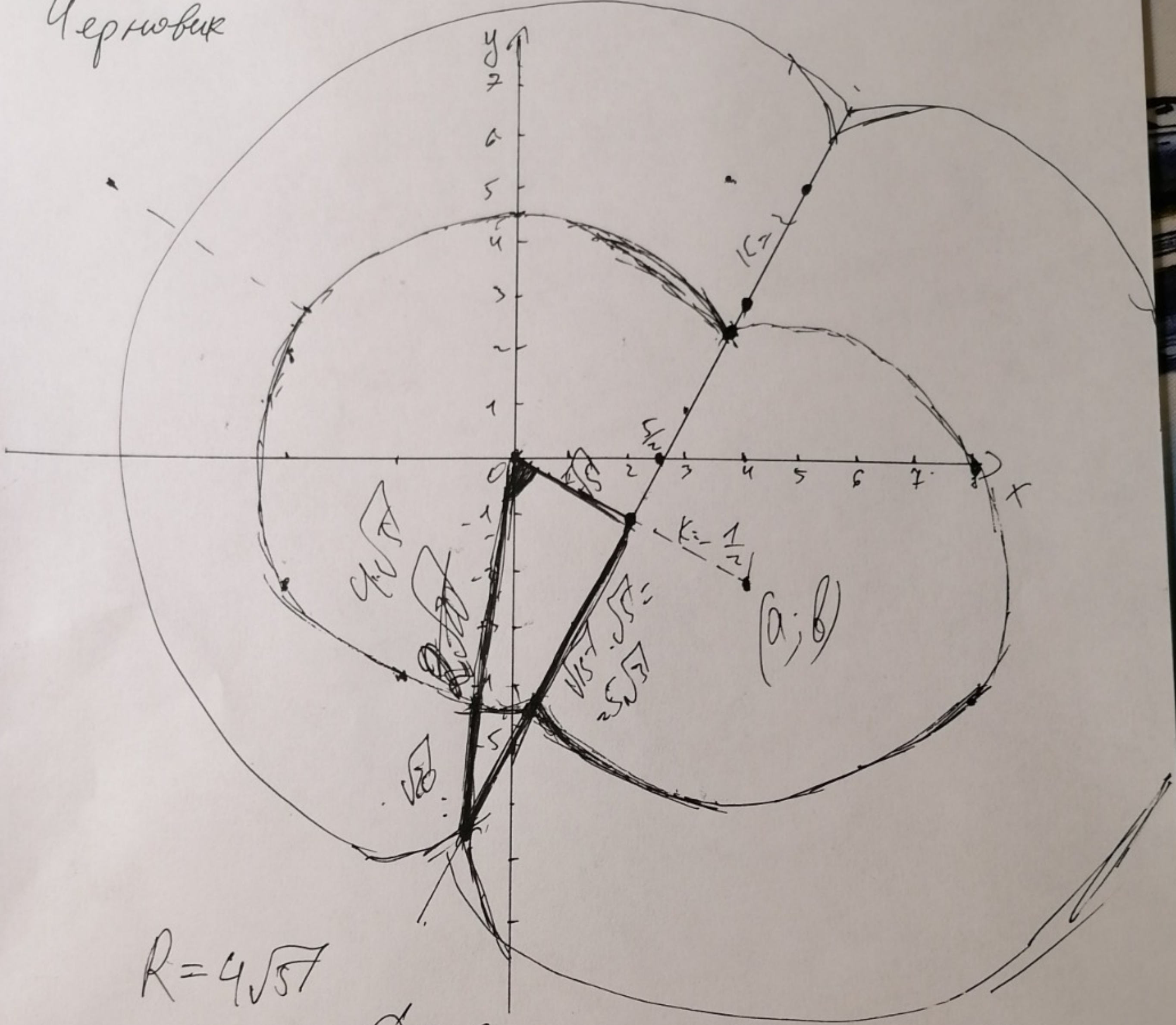
$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$



21104543 (U848353 M1300363)

Черновик



$R=4\sqrt{57}$

$\alpha = 2\arccos\frac{1}{4}.$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ 2a-b \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad b \le 2a-5$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 2a-b<5 \end{cases}$

$2a-5=3$

$5 \vee \sqrt{20}$

$\frac{R^2 \cdot \alpha}{2}$

$S \quad \frac{\alpha R^2}{2}.$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{57}}{4\sqrt{57}} = \frac{1}{4}.$

$\frac{1}{2}\cdot R^2 \sin\alpha.$

$\frac{\alpha R^2}{2} - \frac{R^2\sin\alpha}{2} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$

Чистовик Лист №1.

1. $S=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)7=7a_1+21d$,
где d - разность прогрессии $(d\in\mathbb{N})$

$$\begin{cases} a_8\cdot a_{17}>S+27 \\ a_{11}\cdot a_{14}<S+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d)>7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d)<7a_1+21d+60 \quad |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$+\begin{array}{l} a_1^2+23da_1+112d^2>7a_1+21d+27 \\ -a_1^2-23da_1-130d^2>-7a_1-21d-60 \\ \hline \end{array}$$

$-18d^2>-33$

$6d^2<11$

$d^2<\frac{11}{6}<2$

$d<\sqrt{2}$

$d=1 \quad (d\in\mathbb{N})$

Условия можно переписать в виде:

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112>7a_1+21+27 \\ a_1^2+23a_1+130<7a_1+21+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a+49<0 \end{cases}$$

1) $(a_1+8)^2>0$

$\cancel{a_1}$ $a_1\neq -8$

2) $a_1^2+16a+49<0$

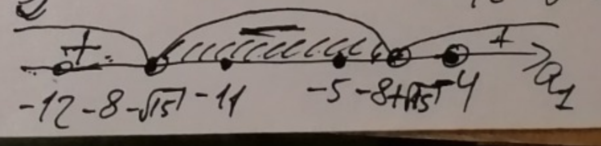
$a_{1,2}=-8\pm\sqrt{15}$

$3<\sqrt{15}<4$

$-5<-8+\sqrt{15}<-4$

$-4<-\sqrt{15}<-3$

$-12<-8-\sqrt{15}<-11$



Чистовик Лист №2

$$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \cap \mathbb{Z} \end{cases}$$

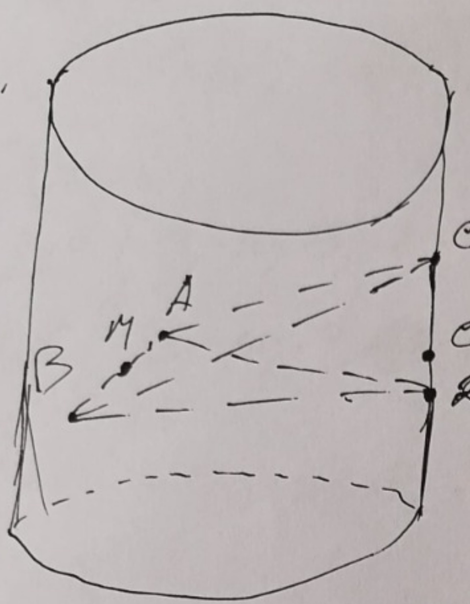
$$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5\} \end{cases}$$

$$a_1 \in \{-11; -10; -9; \cancel{-8}; -7; -6; -5\}$$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

Чистовик Лист №3

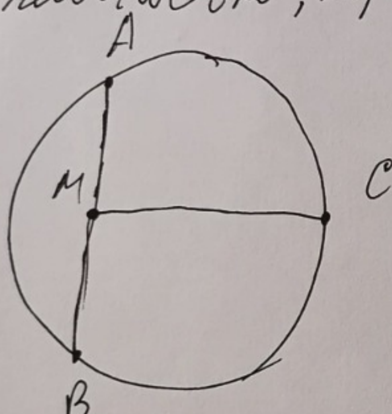
(2)



$AC = CB = 5$
$AD = DB = 6$
$AB = 4.$

$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ — равнобедр. $\Rightarrow$ медианы CM и DM - высоты $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \perp (CDM) \Rightarrow AB \perp CD$.
т.к. $CD \parallel$ Оси, то CD лежит на образующей $\Rightarrow AB \perp$ образующей.

Расамотрим сечение цилиндра плоскостью, проходящей через AB и $\perp CD$.



Точка C' - проекция точек C и D на эту плоскость ~~$\perp AB$~~

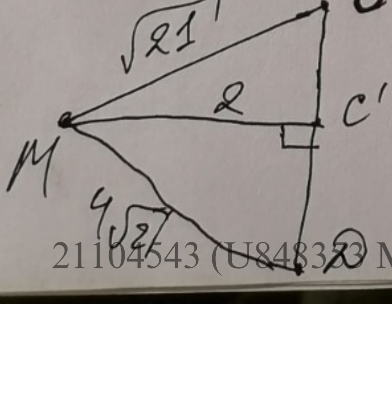
В круге есть хорда $AB=4$ $\Rightarrow$ его min диаметр равен 4.
т.к. мы расаматриваем цилиндр с наименьшим радиусом, то он равен $\frac{D_{min}}{2} = \frac{4}{2} = 2. \Rightarrow$

AB - диаметр, $C'M$ - радиус. $\Rightarrow C'M = 2$.

$\triangle AMC$ - прямоуг. $AM = \frac{AB}{2} = 2$.
$MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$\triangle AMD$ - прямоуг.
$MD = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

В плоскости: MCD



$CD = CC' + C'D = \sqrt{MC^2 - MC'^2} + \sqrt{MD^2 - MC'^2} =$
$= \sqrt{21-4} + \sqrt{32-4} = \sqrt{17} + \sqrt{28} = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

Ответ: $CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$.

Чистовик   Лист №4.

3) ~~Изобразим~~ Переформулируем условие: на плоскости xOy найдется точка $K(a;b)$ такая, что расстояние от нее до точки $A(x;y)$ $\leq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Причем точка K должна удовлетворять второму условию системы.

Множество точек A и есть фигура M.

Изобразим область, где может находиться точка K.

$a^2+b^2 \leq \min(8a-4b;20)$

1) $8a-4b \leq 20$

$a^2+b^2 \leq 8a-4b$

$a^2-8a+b^2+4b \leq 0$

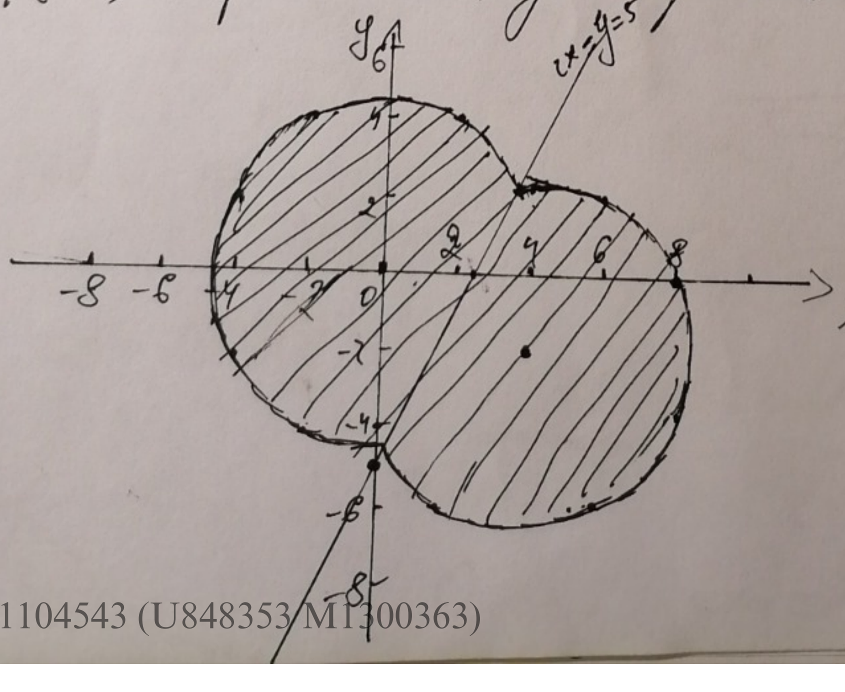
$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \leq 20$

$\begin{cases}(a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20\\ 2a-b \leq 5\end{cases}$

2) $8a-4b>20$

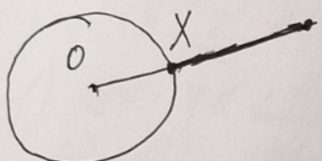
$\begin{cases}a^2+b^2 \leq 20\\ 2a-b>5\end{cases}$

Данная* область представляет собой часть круга, ограниченную прямой, *в случае 1 и 2.

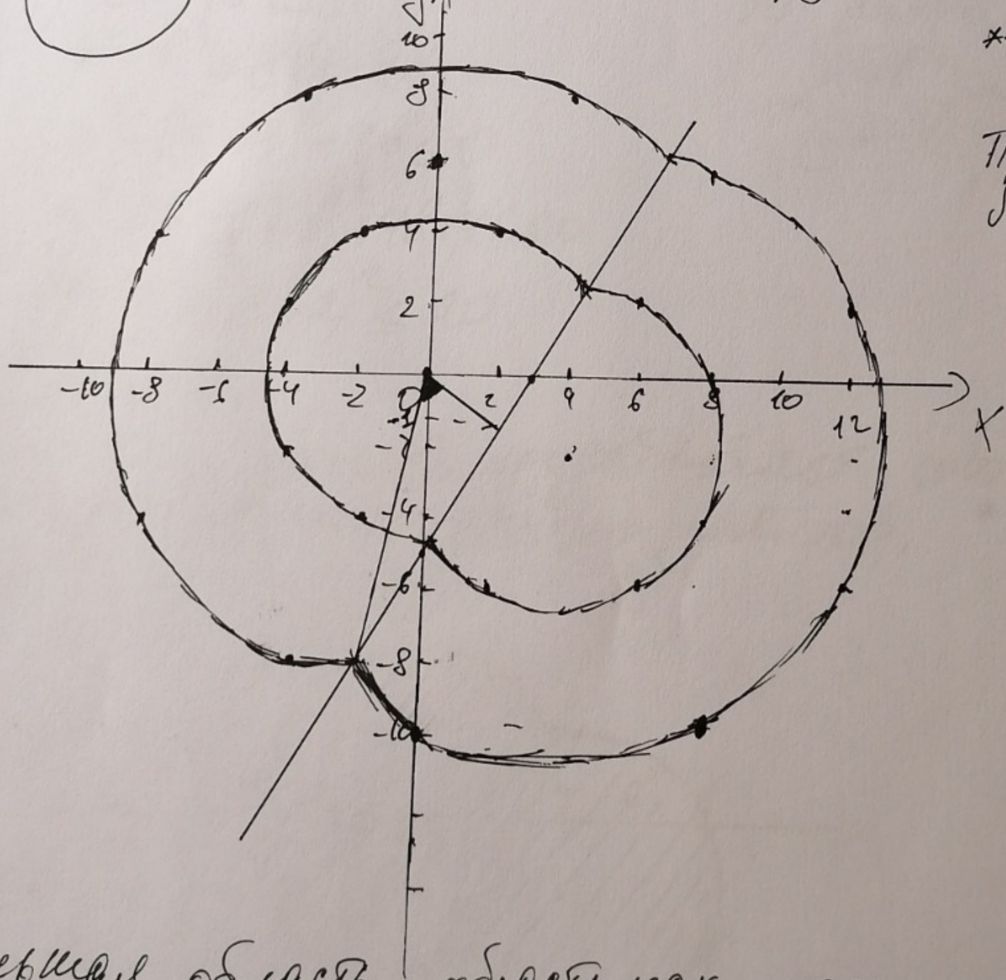


Область нахождения точки K показана на рисунке. Части кругов, задаваемые случаями 1 и 2. симметричны относительно прямой $2x-y=5$, т.к. она ~~на~~ $\perp$ линии центров, проходя через середину отрезка, их соединяющего.**

Увеличив радиус каждого круга на $2\sqrt{5}$ получим область нахождения точки A, т.к. ближайшая точка круга к данной – та, которая лежит на прямой соединяющей точку и центр круга (см. рис).



PX – кратчайшее расстояние от P до точки круга.



** $K_{2x-y=5}=2$

$K_{\text{линии центров}}=-\frac{1}{2}$

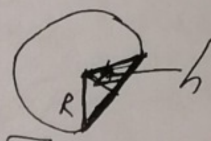
Проходит через $(2;-1)$

$\rho((0;0);(2;-1))=\rho((2;-1);(4;-2))=\sqrt{5}$

Меньшая область – область нахождения точки K, Большая – область нахождения точки A, т.е. фигура M. Её площадь (фигуры M) равна $2\tilde{S}$, где $\tilde{S}$ –

Чистовик Лист №6.

площадь данной фигуры →



$R = 4\sqrt{5}$; $h = \rho((0;0); 2x-y=5) = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

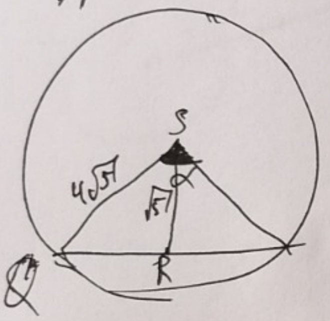
Площадь части, которой не достаёт до круга равна

$S_{сектора} - S_{\Delta} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$, α - угол сектора в радианах.

Значит площадь данной фигуры равна

$\tilde{S} = \pi R^2 - \frac{R^2(\alpha - \sin\alpha)}{2} = R^2\left(\pi - \frac{\alpha - \sin\alpha}{2}\right)$

$S_M = 2\tilde{S} = 2R^2\left(\pi - \frac{\alpha - \sin\alpha}{2}\right) = R^2(2\pi + \sin\alpha - \alpha)$



из $\triangle QRS$: $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{SR}{QS} = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{4}$.

$\frac{\alpha}{2} = \arccos\frac{1}{4}$; $\alpha = 2\arccos\frac{1}{4}$.

$QR = \sqrt{QS^2 - RS^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{QR}{QS} = \frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

$S_M = (4\sqrt{5})^2\left(2\pi + \frac{\sqrt{15}}{8} - 2\arccos\frac{1}{4}\right) =$

$= 80\left(2\pi + \frac{\sqrt{15}}{8} - 2\arccos\frac{1}{4}\right)$

Ответ: $S_M = 80\left(2\pi + \frac{\sqrt{15}}{8} - 2\arccos\frac{1}{4}\right)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

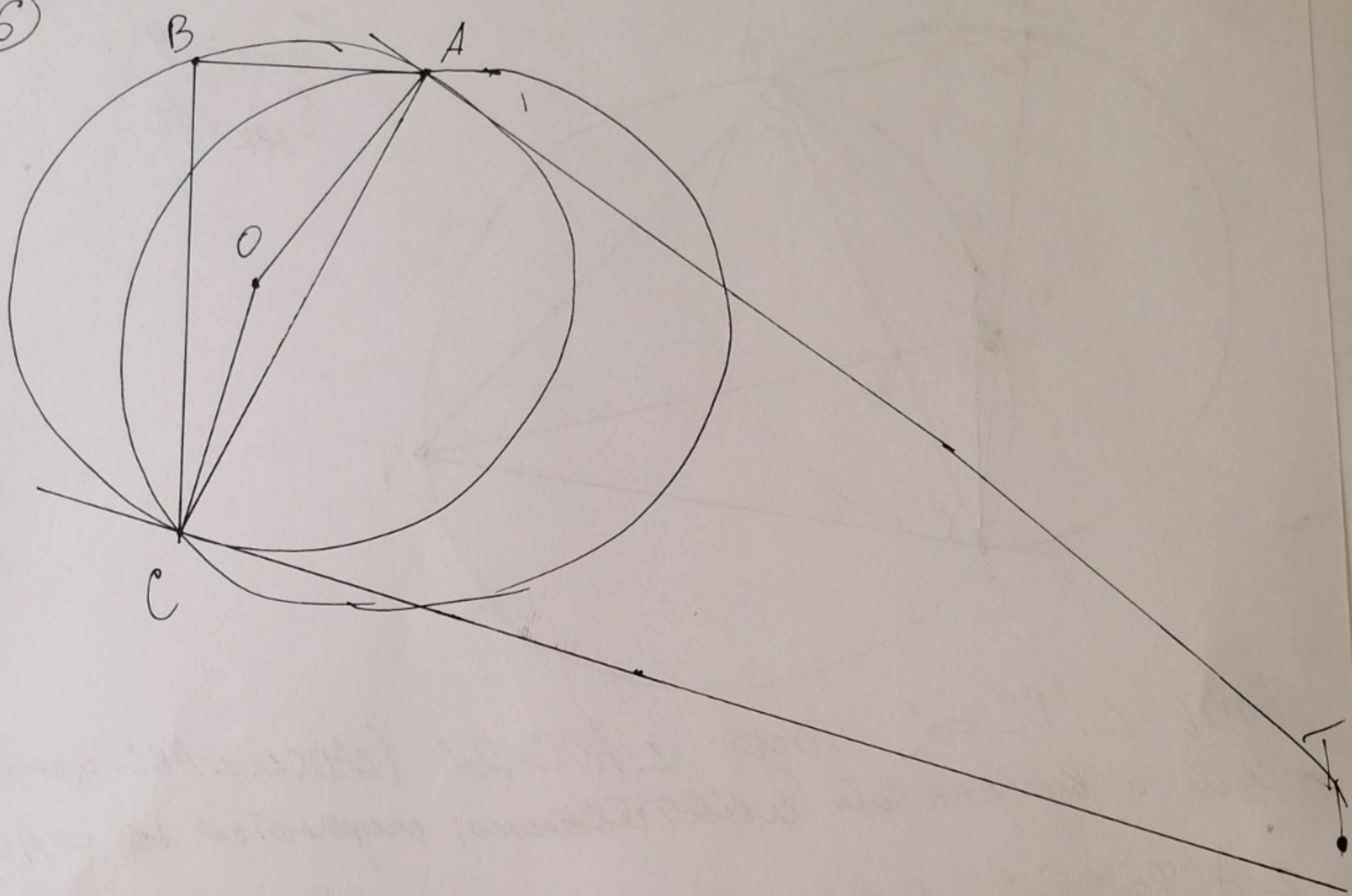
Шифр: **21104543**

ID профиля: **848353**

Вариант 21

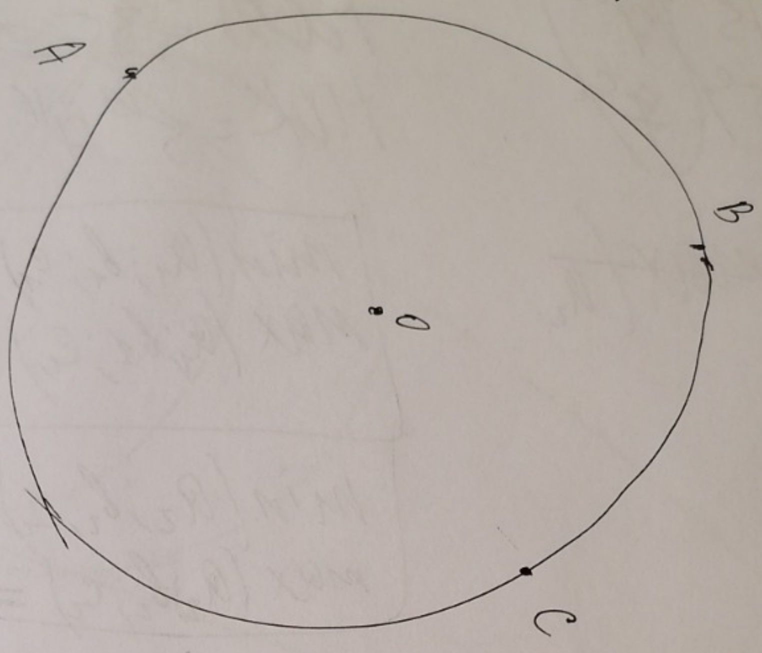
~~Чистовик Лист №5~~ Черновик

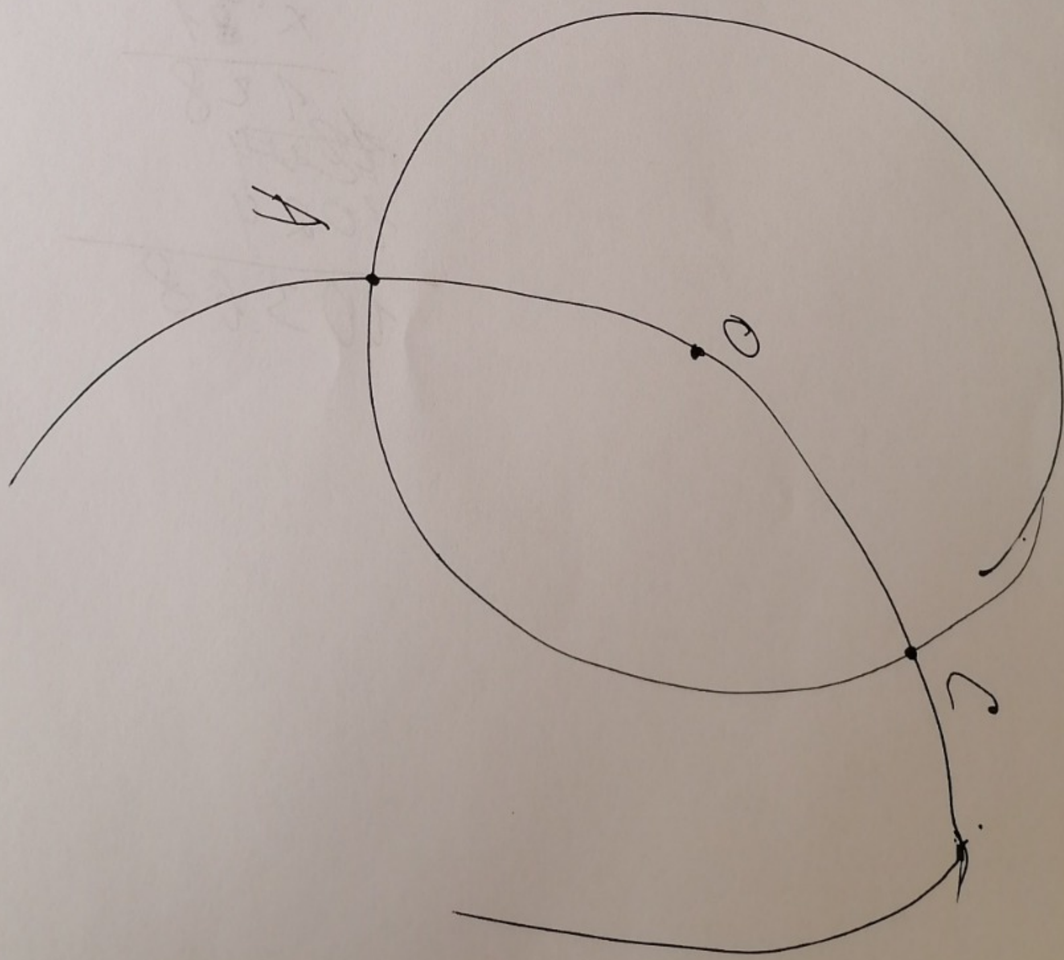
6



21104543 (U848353 M1300364)

Черновик





Черновик.

$a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

$НОД = 35 = 5^1 \cdot 7^1$

$НОК = 5^{18} \cdot 7^{16}$

~~max~~ a_2

$$\boxed{\begin{array}{l} \min(a_1; b_1; c_1) = 1 \\ \max(a_1; b_1; c_1) = 18 \\ \hline \min(a_2; b_2; c_2) = 1 \\ \max(a_2; b_2; c_2) = 16 \end{array}}$$

$3 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 16$

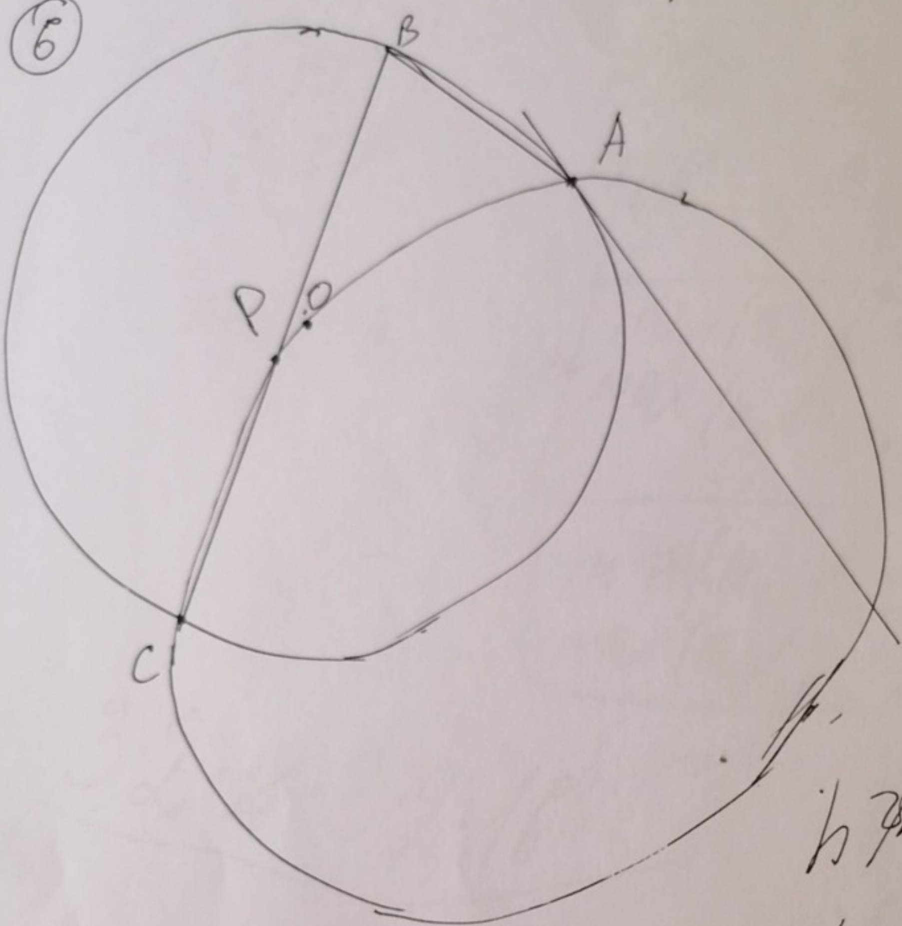
3 9 27 81

128

$$\begin{array}{r} 128 \\ \times\ 81 \\ \hline 128 \\ 1024\ \ \\ \hline 10368 \end{array}$$

~~Чистовик~~ ~~Лист~~ №5 Черновик

6



$PK = \frac{3AB}{7}$. $PK = AB \cdot tg\alpha$

$tg\alpha = \frac{PK}{AB}$

$AL = PK$

$AB \cdot BC \cdot \frac{\sin\alpha}{2} = 49$

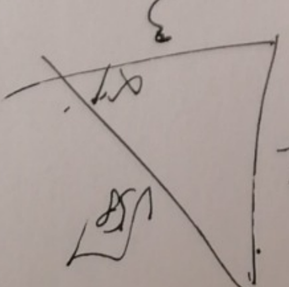
$AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = 98$

$\frac{\sqrt{58}}{7}$

$AP \cdot \frac{3AB}{BC} \cdot \frac{7}{1} \cdot \sin\alpha = 12.$

$\frac{AP \cdot 7 \cdot 3}{BC} = 12 \cdot 4.$

$\frac{AP}{BC} = \frac{4}{7}.$

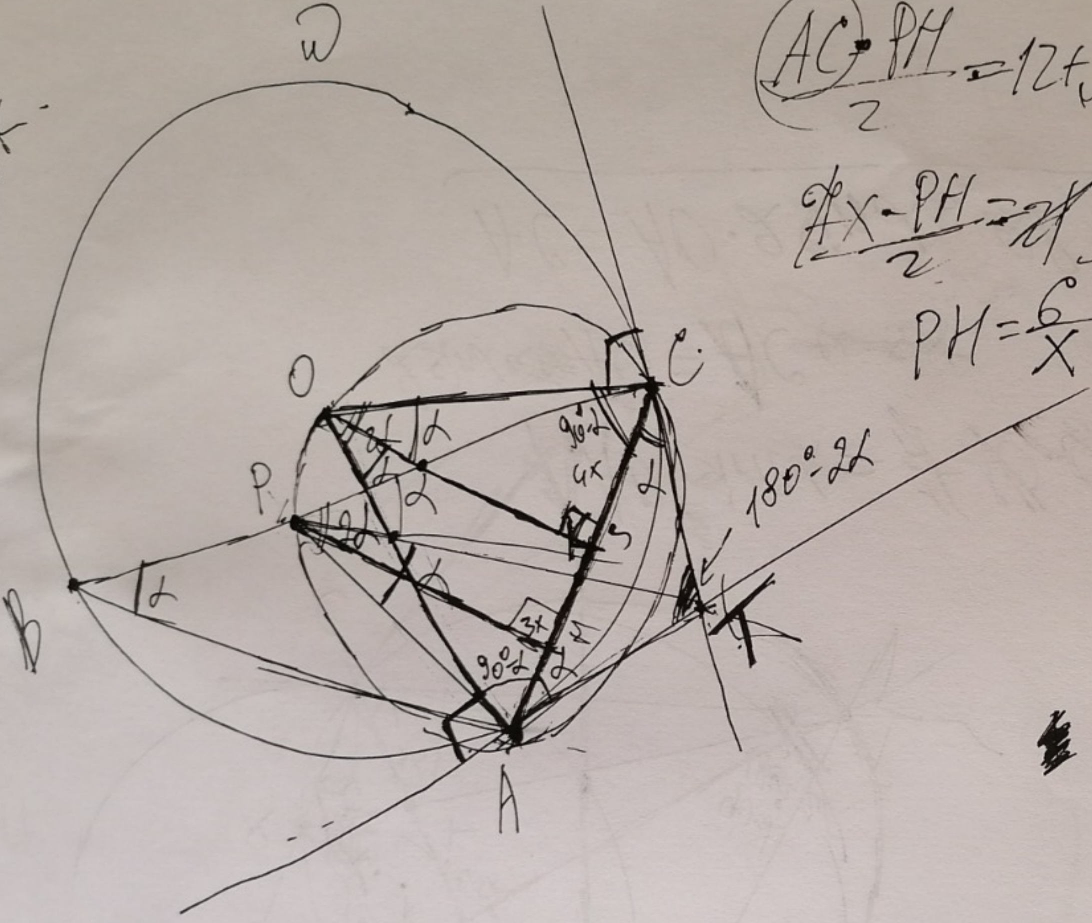


$7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$

$AB = \frac{49 \cdot 14}{BC\sqrt{58}}$

21104543 (U848353 M1300364)

Черновик.



S_{ABC} - ?

$\frac{AC \cdot PH}{2} = 12+9$

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$\frac{AK}{CK} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

$\frac{7x \cdot PH}{2} = \cancel{21}\ 3$

$PH = \frac{6}{x}$

$AT = CT$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$.

$R = \frac{abc}{4S}$

$\frac{AS}{OS} = tg\alpha = \frac{3}{7}$.

$\frac{3{,}5x}{0.5} = \frac{3}{7}$

$OS = h$.

$\sqrt{\left(\frac{49x}{6}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}x\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1^2} \cdot \frac{7}{2}x =$

$S = \frac{x}{2}$.

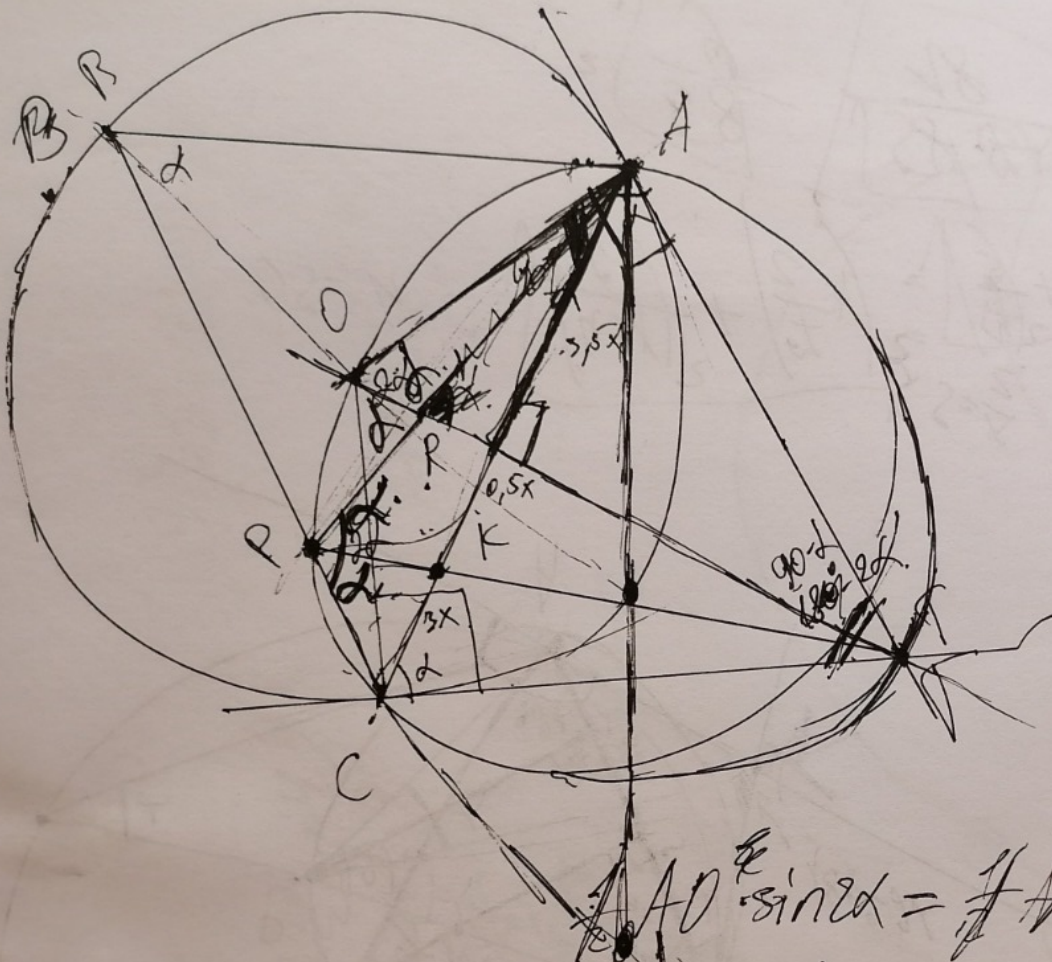
$\frac{7x}{2OS} = \frac{3}{7}$

$= \sqrt{\frac{58}{9}}$

$\boxed{\frac{\sqrt{58} \cdot 7x}{18}}$

$OS = \frac{49x}{6}$

21104543 (U848353 M1300364)



Черновик

$S_{APK} = 12$

$S_{\cancel{A}PK} = 9$

$AC = 7x$

$OA = \frac{\sqrt{58}\,7x}{18}$

$\cancel{OA}$ $\frac{AC}{OA} = \frac{3}{7}$

$OA = \frac{7AC}{3} = \frac{\sqrt{58}\,AC}{18}$

$\cancel{CK}$ $\frac{\overset{4x}{AK}}{AP} = \frac{\overset{3x}{CK}}{CP}$

$4CP = 3AP$ y

$CP = \frac{3y}{4}$

$\cancel{CK}$

$AO^2 \sin 2\alpha = \cancel{1}\,\cancel{AO} \cdot OC \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$

$2\sin\alpha\,AO = AC\,\cancel{\cos\alpha}$

$AC = AO \cdot 2\sin\alpha = 2R\sin\alpha$

$\cancel{9 = \frac{1}{2} PK \cdot \frac{8y}{4}} \sin\alpha$

$12 = \cancel{\frac{1}{2} PK \cdot APy} \sin\alpha$

Черновик

$\cancel{2}\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)+\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+\log_{x+1}2x^2-3x+5=$

$=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)+\frac{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)^2}{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)}+\frac{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)}{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)}=$

$=\log^2_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\log_{\sqrt{2x-3}}2x^2-3x+5+\cancel{\log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)}4\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=\cancel{2}4\cancel{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)}\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=4\log_{2x^2-3x+5}(x+1)\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=4.$

$a\cdot a\cdot(a-1)=4$ $\quad a^2(a-1)=4.$

$a^3-a-4=0.$ $\quad \cancel{a=2}$

$a^2(a-1)=4.$

$8-$

$a=2$

$a^3-a=4.$ $\quad 4(2-1)=4!$

$a^3-a^2-4=0.$

$8-2-4=2.$

$$\begin{array}{l|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \underline{a^3-2a^2} & a^2+2a+3 \\ 2a^2-a-4 & \\ \underline{2a^2-4a} & \\ 3a-4 & \\ \underline{3a-6} & \\ -2. & \end{array}$$

21104543 (U848353 M1300364)

Черновик.

$$\begin{array}{l|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \underline{a^3-2a^2} & a^2+a+2 \\ a^2-4 & \\ \underline{a^2-2a} & \\ 2a-4 & \\ \underline{2a-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$(a^2+a+2)(a-2)=0$

$a=2$

$2x^2-9x+4=0$

$x^2-9x+8=0$

$x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{8}{2}=4$.

$2\cdot 16-12+5=32-12+5=$

$20+5=25$.

$(8-3)^2=25$

21104543 (U848353 M1300364)

Чистовик лист №1.

~~4~~ 5 $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=2\cdot2\cdot\log_{2x-3}(x+1)\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=4.$

Пусть один из больших логарифмов равен a.

Тогда $a\cdot a\cdot(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$

$a=2$

Меньший из логарифмов равен $2-1=1$.

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1$

$x+1=\sqrt{2x-3}$

$x^2+2x+1=2x-3$

$x^2+4=0$

$x\in\varnothing$

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1$.

$2x^2-3x+5=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$

$2x^2-9x+4=0$

$2(x-\frac{1}{2})(x-4)=0$.

$x=\frac{1}{2}$

$x=4$.

3) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1$

$2x^2-3x+5=x+1$

$2x^2-4x+4=0$

$x^2-2x+2=0$

$(x-1)^2+1=0$

$x\in\varnothing$.

Чистовик Лист №2.

Потенциально возможны только $x=\frac{1}{2}$ и $x=4$.

Проверим. $x=\frac{1}{2}$.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \log_{\sqrt{1-3}}\frac{3}{2}$ – не имеет смысла.

Проверим $x=4$.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\Big|_{x=4} = \log_{\sqrt{8-3}}(4+1) = \log_{\sqrt{5}}5 = 2.$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\Big|_{x=4} = \log_{25}25 = 1.$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_5 25 = 2.$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2+1.$

Ответ: $x=4$.

Чистовик Лист №3

4)
$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 & (1) \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} & (2). \end{cases}$$

(1) => каждое число делится на 35, т.е. делится на 5 и на 7. В то же время не все числа делятся на 5^2 или 7^2.

Пусть $a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}\cdot p_a$
$b=5^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}\cdot p_b$, где p_a, p_b, p_c не делятся ни на 5, ни на 7.
$c=5^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}\cdot p_c$

$$\boxed{\begin{matrix} \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1 \end{matrix}}$$

(2) => Никакое число не содержит в разложении простых чисел, отличных от 5 и 7. =>

$p_a=p_b=p_c=1$. $a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$
$b=5^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$
$c=5^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$

~~min~~
$$\boxed{\begin{matrix} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=18 \\ \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=16 \end{matrix}}$$

Найдем кол-во решений системы:

способов выбрать число с минимальной степенью вхождения числа 5 – 3 штуки; Способов выбрать число с максимальной степенью числа 5 – 2 штуки (одно из двух оставшихся). Степень вхождения 5 в 3-е число может изменяться от 1 до 18. Значит общее кол-во способов распределить 5 по числам равно $3 \cdot 2 \cdot 18$.

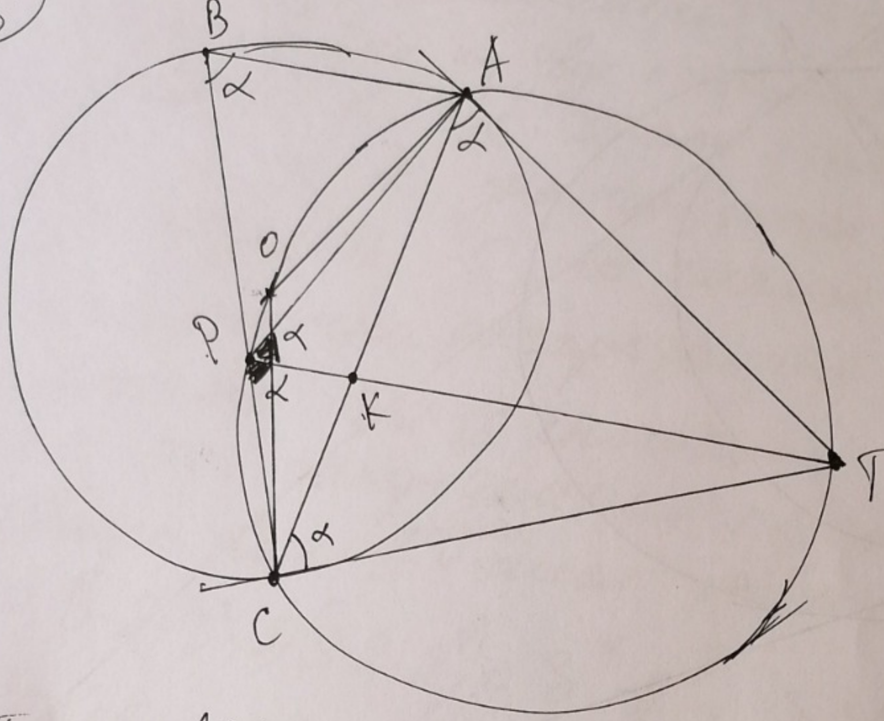
Аналогично: распределить 7 по числам можно $3 \cdot 2 \cdot 16$ способами.

Т.к. эти распределения независимы, то общее кол-во троек чисел равно $3 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 16 =$
$= (3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2)(3 \cdot 2 \cdot 2^4) = 3^4 \cdot 2^7 = 10368.$

Ответ: 10368

Чистовик Лист №5

6



$S_{PKC}=9$

$S_{APK}=12$

а) Пусть $\angle ABC=\alpha$. Тогда $\angle AOC=2\alpha$ ($\angle AOC$ и $\angle ABC$ – центральный и вписанный соответственно; опираются на $\smile AC$).

$\angle ACT=360^\circ-\angle AOC-2\cdot 90^\circ$ ($\angle OAT=\angle OCT\overset{90^\circ}{=}$ кас.) $=$

$=180^\circ-2\alpha \Rightarrow OATCP$ – вписанный.

$\angle ABC=\angle TAC$ (угол между касательной и хордой) $=$ $=\alpha$; $\angle CPT=\angle CAT$ (вписанные) $=\alpha$.

$\angle ABC=\alpha=\angle CPT \Rightarrow AB \parallel PK$.

$\triangle ABC \sim \triangle PCK$ (по 2 углам) ($\angle C$ – общий; $\angle B=\angle P=\alpha$).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}}=\left(\frac{CA}{CK}\right)^2=\left(\frac{S_{APC}}{S_{PKC}}\right)^2=\left(\frac{S_{PKC}+S_{APK}}{S_{PKC}}\right)^2=\left(\frac{12+9}{9}\right)^2=\left(\frac{21}{9}\right)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2=$$

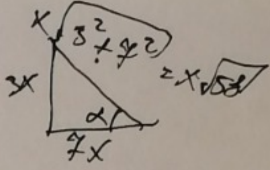
имеют общую высоту

$$=\frac{49}{9}$$

$S_{ABC}=\frac{49}{9}S_{PKC}=\frac{49}{9}\cdot 9=49$. Ответ: а) $S_{ABC}=49$

Чистовик Лист №6.

б) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} = \arcsin\frac{3}{\sqrt{58}} = \arccos\frac{7}{\sqrt{58}}$



$AB\cdot BC\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha = 49$

$AP\cdot PK\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha = 12$

$\frac{PK}{AB}=\frac{CK}{AC}=\frac{3}{7}$

$\frac{AB\cdot BC\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha}{AP\cdot PK\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha}=\frac{49}{12}$

$\frac{BC\cdot \cancel{7}}{AP\cdot 3}=\frac{49}{12}$

$AP=\frac{\overset{4}{\cancel{12}}\cdot\cancel{7}\cdot BC}{\cancel{3}\cdot\cancel{49}\,7}=\frac{4BC}{7}$

$\frac{PC}{CB}=\frac{3}{7}$ $PC=\frac{3BC}{7}$

$AP\cdot PC\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha = S_{APC} = 9+12=21$

$\frac{2\cancel{4}BC}{7}\cdot\frac{3BC}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\sin\alpha\cos\alpha = 21$

$\frac{6BC^2}{49}\cdot\frac{\cancel{3}}{\sqrt{58}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\sqrt{58}}=\cancel{21}\,1$

$BC^2=\frac{58\cdot49}{6}=\frac{29\cdot49}{3}$

$BC=7\sqrt{\frac{29}{3}}$

Ответ: б) $AC=7\sqrt{6}$.

$AB\cdot 7\sqrt{\frac{29}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{58}}=49$

$AB=\frac{\cancel{7}\,49\cdot\sqrt{58}\cdot 2\sqrt{3}}{\cancel{7}\cdot 3\sqrt{29}}=$

$=\frac{7\cdot 2}{3}\cdot\sqrt{6}=7\sqrt{\frac{2}{3}}$

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=$

$=7^2\cdot\frac{2}{3}+7^2\cdot\frac{29}{3}-2\cdot 7^2\sqrt{\frac{29\cdot 2}{9}}\cdot\frac{7}{\sqrt{58}}$

$=7^2\left(\frac{2}{3}+\frac{29}{3}-\frac{2\cdot 7}{3}\right)=$

$=49\left(\frac{32-14}{3}\right)=49\cdot\frac{18}{3}=$

$=49\cdot 6$

$AC=7\sqrt{6}$