Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104528**

ID профиля: **156875**

Вариант 21

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,\ 20)\end{cases}$$

т.к. $\le \min \Rightarrow \le$ каждому из двух

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20\end{cases}$$

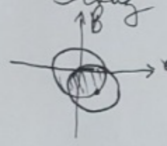
фигура $(x-a)^2+(x-b)^2\le 20$ – круг с радиусом $\sqrt{20}$ и центром $(a;b)$

$a^2+b^2\le 20$ – ~~фигу~~ круг с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{20}$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$ – круг с центром $(4;-2)$ и радиусом $\sqrt{20}$

из $\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20\end{cases}$ искомая фигура для $a;b$ это их пересечение

Эскиз

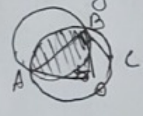


Площадь же искомой фигуры на $x;y$ это ~~какая-то~~ фигура ~~увеличенная~~ такая что из каждой точки $(a;b)$ будет построена окружность радиуса $r=\sqrt{20}$ и это будет площадь пересечения окружностей с центрами $(a;b)$ и

$R=2\sqrt{20}$ (т.к. ~~из~~ каждую из окружностей в радиусе увеличили на $\sqrt{20}$ с $\sqrt{20}$)

Эскиз

Эскиз



Найдём A и B это в случае $\begin{cases}x^2+y^2=80\\ (x-4)^2+(y+2)^2=80\end{cases}$

$x=\sqrt{80-y^2}$

$x=\sqrt{80-(y+2)^2}+4$

$\Leftarrow$

$\Downarrow$

$-8x+4y+20=0$

$x=\frac{y}{2}+\frac{5}{2}$

$\frac{5}{4}y^2+\frac{10y}{4}+\frac{25}{4}=80$

$5y^2+10y+25=320$

$y^2+2y+5=64$

$(y+1)^2=60$

$y_{1,2}=-1\pm\sqrt{60}$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{60}}{2}+\frac{5}{2}$

$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\frac{60}{100}+\frac{460}{100}}=\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot 10$

$\alpha=\arccos\left(\frac{-3\cdot\frac{100}{20}+4\cdot 20+4\cdot 20}{2\cdot 4\cdot 20}\right)=\arccos\left(1-\frac{15}{32}\right)=\arccos-\frac{1}{8}$

по теореме косинусов т.к. R и AB

$AB^2+BC^2=$

$$S=\int_{-1-\sqrt{60}}^{-1+\sqrt{60}}\left(\sqrt{80-(y+2)^2}+4-\sqrt{80-y^2}\right)dy=4y\Big|_{-1-\sqrt{60}}^{-1+\sqrt{60}}-\left(\frac{1}{2}y\sqrt{80-y^2}+80^2\arcsin\frac{y}{80}\right)\Big|_{-1-\sqrt{60}}^{-1+\sqrt{60}}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}(y+2)\sqrt{80-(y+2)^2}+80^2\arcsin\frac{y+2}{80}\right)\Big|_{-1-\sqrt{60}}^{-1+\sqrt{60}}=8\cdot\sqrt{60}+\frac{1}{2}(1+\sqrt{60})\left(\sqrt{80-(1+\sqrt{60})^2}\right)-$$

$$-(1-\sqrt{60})\sqrt{80-(1-\sqrt{60})^2}-80^2\left(\arcsin\frac{\sqrt{60}-1}{80}\right)$$

Ответ: $8\cdot\sqrt{60}+(1+\sqrt{60})\left(\sqrt{80-(1+\sqrt{60})^2}-(1-\sqrt{60})\sqrt{80-(1-\sqrt{60})^2}-2\cdot 80^2\arcsin\frac{\sqrt{60}-1}{80}\right)$

1

Чистовик

№1

$S = \frac{(a_1 + a_1 + 6k)7}{2}$ где k - шаг прогрессии

$S = 7a_1 + 21k$

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1 + 7k)(a_1 + 16k) = a_1^2 + 23a_1k + 112k^2$

$a_{11} \cdot a_{14} = (a_1 + 10k)(a_1 + 13k) = a_1^2 + 23a_1k + 130k^2$

$a_1^2 + 23a_1k + 112k^2 > 7a_1 + 21k + 27$

$a_1^2 + 23a_1k + 130k^2 < 7a_1 + 21k + 60$

$18k^2 < 33$

т.к. a_1, a_2 - целые $\Rightarrow k$ - целое, т.к. $k > 0 \Rightarrow k = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 64 < 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \\ (a_1 + 8)^2 < 15 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ при целых a_1 $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

т.к. $a_1 + 8 \neq 0$

и $|a_1 + 8| \leq 3$ т.к. $15 < 16$

Ответ: $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Чистовик

№2

Дано

$AD = DB = 6$

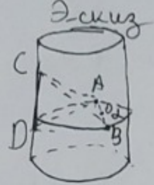
$AC = CB = 5$

$AB = 4$

при $r_ц \to min$

$CD = ?$

Эскиз



т.к. все точки уже лежат. $ABCD$ лежат на боковой поверхности и $CD \parallel$ оси ~~тетраэдра~~ цилиндра $\Rightarrow CD$ лежит на боковой поверхности тетраэдра

очевидно, что радиус цилиндра минимален, когда AB – диаметр окружности цилиндра

зная, что $AB - 4$ тогда радиус очевидно 2

тогда проекции Δ медиан-высот т.к. $CA = CB$ и $DB = DA \Rightarrow$ равнобед. Δ ABC и DAB (медианы на AB) на плоскость α такую, что $AB \in \alpha$ и $\alpha \parallel$ основанию цилиндра будет ~~должны~~ являтся радиусом т.к. это сер. пер. AB

~~тогда $\angle((\widehat{CAB}), \alpha)$ - двугранный угол~~] сер. $AB = O$ тогда

т.к. биссектриса, медиана высота $\Rightarrow \angle ACO$ с прямым $\angle O$

$DO = \sqrt{DA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{4}{2}\sqrt{2}$] $H = \alpha \cap CD$ тогда $DH \perp \alpha$ т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра $\perp \alpha \parallel$ основанию цилиндра $\Rightarrow DH = \sqrt{DO^2 - OH^2} = 2\sqrt{7}$

$OH = r = 2$

аналогично находим CH

$CO = \sqrt{CB^2 - BO^2} = \sqrt{21}$ по Пифагору т.к. ΔCOB - прямоуголь. т.к. DO - высота и мед.

$BO = \frac{1}{2}AB$

т.к. $DH \perp \alpha \Rightarrow CH \perp \alpha \Rightarrow \Delta COH$ - прямоуголь. с прямым H

$\Rightarrow CH = \sqrt{CO^2 - OH^2} = \sqrt{17}$

$OH = r = 2$ это проекция CO на α

тогда $CD = CH + HD$ если с разных сторон от α или $HD - CH$. если с одной стороны от α

$CD \in \{2\sqrt{7} + \sqrt{17}; 2\sqrt{7} - \sqrt{17}\}$

Ответ: $CD \in \{2\sqrt{7} + \sqrt{17}; 2\sqrt{7} - \sqrt{17}\}$

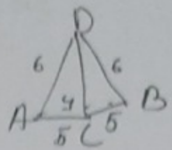
чернавик

$2\cos^2\alpha - 1$

$1 - 2\sin^2\alpha$

$x : \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8}$ $\quad 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8}$ $\qquad 25 - 4$



$\int (x+1)^2 = \frac{(x+1)^3}{}$

$2\cos^2\alpha = \frac{\cancel{37}}{16}$

$\cos\alpha = \frac{\cancel{37}}{4}$

$\int x \frac{1}{x} =$

$$\begin{array}{r} +\,42 \\ 70 \\ \hline 112 \end{array}$$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\operatorname{arctg}' x = 1 + x^2$

$16 \cdot 2 - 4 = 2\sqrt{7}$

$8 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} -\,112 \\ 64 \\ \hline 48 \end{array}$$

$\ln|$

$\sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad \arcsin' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = (ax + b)\sqrt{a^2 - x^2} + \lambda \int \cancel{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

80^2

$$\begin{array}{r} 21 \\ +\,27 \\ \hline 48 \end{array}$$

$2\left(\frac{a^2 - x^2}{}\right) = 2a(a^2 - x^2) + (ax + b) \cdot 2x + 2\lambda$

$2 \cdot 80^2 - 2x^2 = 2a\,80^2 - 2ax^2 - 2ax^2 - 2bx + 2\lambda$

$2x^2 = -4ax^2 \qquad a = -\frac{1}{2} \quad b = 0$

$$\begin{array}{r} -\,130 \\ 64 \\ \hline 66 \end{array}$$

15

$\lambda = 80^2$

$\int \sqrt{80^2 - x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{80^2 - x^2} + \frac{80^2}{2} \arcsin \frac{x}{80}$

21104528 (U156875 M1303634)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104528**

ID профиля: **156875**

Вариант 21

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД\ (a;b;c) = 35 \\ НОК\ (a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$НОД\ (a;b;c) = 7 \cdot 5 \Rightarrow$ во всех числах есть минимум 1-7 и 1-5, но при этом у 1 числа 7 в первой степени и у 1 5 пятёрка в первой степени при этом из $НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$\Rightarrow$ что есть число с 5^{18} и есть число с 7^{16}

тогда степени 7 это $1; 16; x$ $x \in$ ~~Z~~ $\mathbb{N}$ $x \in [1; 16]$;

степени 5 это $1; 18;$ ~~t~~ $t \in$ ~~Z~~ $\mathbb{N}$ $t \in [1; 18]$

тогда мы эти группы делителей должны разбить на пары и посчитать число комбинаций

всего 16 комплектов 7 т.к. $x \in [1; 16]$ и $x \in \mathbb{N}$ и всего 18 комплектов 5 т.к. $t \in [1; 18]$ и $t \in \mathbb{N}$

из них 14 без повторений на 7 и 16 без повторений на 5 тогда число комплектов пар множителей без повторений это $3 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 6$ если 7 повторяеться тогда $3 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 6$ вариантов если 5 повторяеться $3 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 6$ вариантов; если и 5 и 7 повторяются тогда $(6+3) \cdot 2 \cdot 2$ ~~2·2·2/2~~ вариантов тогда всего и учитывая вари

$6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 16 + 3 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 6 + (6+3) \cdot 2 \cdot 2$ вариантов

всего ~~15 37~~ 9180 5180 тройки

Ответ: ~~15132~~ тройки чисел удовлетворяют условию

Пояснение $3 \cdot 2 = 6\ P_3$ для поиска всех возможных пар число перестановок 3 чисел $a; b; c$

6 = также число перестановок 3 чисел ~~уже~~ ~~только~~

14 и 16 и 2 - число возможных элементов множителей их

3 - число A_3^1 т.к. одно из 3 ~~чисел~~ выбераем и ставим

(6+3) число случаев для различных пар делителей

~~См. черновик~~

1

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2,\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

ОДЗ

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} \neq 1 \\ 2x-3 > 0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 1,5 \\ 2x^2-3x+4 > 0 \text{ т.к. } D<0 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \text{ т.к. } D<0 \\ x \neq 0 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,5;2) \cup (2;+\infty)$$

Д) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)+1$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)(x+1)$

$\frac{1}{2}\log_{2x-3}$

] $2x-3 = t$; $2x^2-3x+5 = y$; $x+1 = z \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

$\log_{\sqrt{t}}(z)$; $\log_y t^2$; $\log_z y$

$\frac{1}{2}\log_t z$; $2\log_y t$; $\log_z y$ все $\log \neq 0$ т.к. $x; y; z \neq 1$ по ОДЗ

если $\frac{1}{2}\log_t z = 2\log_y t = \log_z y + 1$

$\log_t z = \frac{\log_z z}{\log_z t} = \frac{1}{\log_z t}$

$\log_y t = \frac{\log_z t}{\log_z y}$

$\frac{1}{2}\log_t z = 2\log_y t = \log_z yz \quad | \cdot 2\log_z t \log_z y$

$\log_z y = 4\log_z^2 t = 2\log_z yz \log_z t \log_z y$ т.к. ни одно из log не равно 0 т.к. $x; y; z \notin \{1\}$ по ОДЗ

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2\log_z yz \log_z t = 1 \\ 2\log_z t = \log_z yz \log_z y \end{cases}$$

(2)

Чистовик

$$2\log_y t = \frac{2\log_z t}{\log_z y} = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_z y \log_t z}$$

то есть одно из чисел это 1 делить на произведение двух других тогда чтобы оно было на 1 меньше при равенстве других

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\log_z^2 y} = \log_z y \mp 1$$

$$1 = \log_z^3 y \mp \log_z^2 y = \log_z^2 y\,(1 \mp \log_z y)$$

$$\frac{1}{2}\log_t z = \frac{1}{2\log_y t \cdot \log_z y} \Rightarrow \text{если } \log_z y = 2\log_y t$$

$$1 + \frac{1}{2}\log_t z = \log_z y$$

$$\frac{1}{2}\log_t z = \frac{1}{\log_z^2 y} = \log_z y - 1$$

$$1 = \log_z^3 y - \log_z^2 y$$

$\Rightarrow$ не существует таких $\log_z y$ при которых

$\frac{1}{2}\log_t z = \log_z y - 1$ т.к. тогда и $2\log_y t = \log_z y - 1$

единственный возможный случай

$$\frac{1}{2}\log_t z = 2\log_y t = \log_z y + 1$$

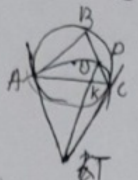
$$\log_z y = \frac{1}{\frac{1}{2}\log_t z \cdot 2\log_y t} \Rightarrow \text{этот случай также не возможен т.к. придём}$$

$\log_z^3 y - \log_z^2 y = 1 \Rightarrow$ нет подходящего случая т.к. все 3 варианта при $\log_z^3 y - \log_z^2 y = 1$

Ответ: такое не возможно

Чистовик №6

Эскиз



Дано

$\triangle ABC$

ω - центр O

$ADC \in \omega_1$

$BC \cap \omega_1 = P$

$TP \cap AC = K$

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

а) $S_{ABC} = ?$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

$AC = ?$

Очевидно, что центр $\omega_1 = T$ т.к. $AK = AT = R$ т.к. две касательные

если $S_{APK} = 12$ и $S_{PKC} = 9$ $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

т.к. общая высота $\triangle APC$

Заметим что PT и OT - радиусы $\Rightarrow$ высоты из O и P равны $\Rightarrow S_{AOC} = S_{APC}$

$\Rightarrow S_{ABC} = 2 S_{APC} + 2 \frac{AK \cdot KC}{AK} S_{APK} = 2 \cdot 21 + \frac{27}{2} = 55{,}5$

Ответ: $S_{ABC} = 55{,}5$

черновик

$\times\frac{6}{14}$ 24 6 84

$\times\frac{84}{16}$ 24 48 84

$+1344$ $+96$ $+84$ 8 1532 -8 1524

$\times\frac{6}{16}$ 36 6 96

16 16 1
1 18 18

16 18 1
16 18 1

16 + 16 | 1
1 18 18

16 16 1
18 18 1

$3\ln 2(6+3)\cdot 2\cdot 2\cdot$

$e^{\ln 3+\ln 2} = e^{\ln 3}\cdot e^{\ln 2} = 3\cdot 2$

$e^{\ln 6}$

$9-40<0$

$2x^2-3x+4=0$

$9-8\cdot 4$

$\times\frac{1524}{6}$ 24 12 30 6 9144 $+36$ 9180

$\times\frac{9}{4}$

Чистовик черновик

$\log_z yz \log_z yz \log_z y = 1$

$(1+\log_z y)^2 (\log_z y) = 1$

$\log_z^3 y + 2\log_z^2 y + \log_z y - 1 = 0$

$\exists\ \frac{1}{2}\log_t z = 2\log_y t = \log_z y + 1$

$\log_t z = \frac{1}{\log_z t} \qquad 2\log_y t = \frac{\log_z t}{\log_z y}$

$\log_{\frac{1}{z}} \frac{z}{y} = 4\log_z^2 t$

$\frac{1}{2}\log_t z = 4\log_z^2 t + 1$

$8\log_z^3 t + 2\log_z t - 1 = 0$

$2\log_y t = \log_z y + 1$

$2\log_z t = \log_z^2 y + \log_z y$

$4\log_z^2 t + 1 = \log^2 z$

$\frac{1}{2}\log_t z \ ; \ 2\frac{\log_z t}{2\log_z y} \ ; \ \log_z y$

$2\log_z t = \log_z^2 y$

$\log_z y + 1 =$

$z^{\frac{1}{2}\log_t z} =$

$\frac{1}{2}\frac{\ln z}{\ln t} = 2\frac{\ln t}{\ln y} = \frac{\ln y + \ln z}{\ln z}$

$\ln z \ln y = 4\ln^2 t = \ln$

$2\ln t = \sqrt{\ln zy}$