# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

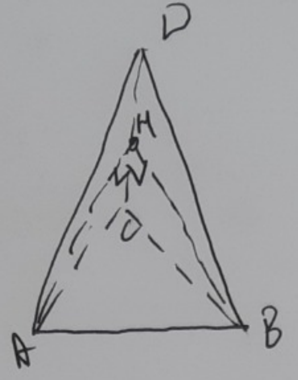
Шифр: **21104526**

ID профиля: **304292**

Вариант 21

№2 БЕЛОВИК

$AB = 4$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 6$




$\triangle ACD = \triangle BCD$ по третьему признаку $\Rightarrow$ основания высот этих треуг. совпадут.

$CD \parallel$ оси, $AH \perp CD$, $BH \perp CD \rightarrow$
$(AHB) \perp$ оси

$\triangle AHB$ вписан в окр. радиуса основания цилиндра.

т. sin: $2R = \frac{AB}{\sin AHB}$, $\sin AHB$ наиб. значение 1, т.к. ищем наим. $R \rightarrow R_{min} = \frac{AB}{2 \cdot 1} = 2$

$AH = BH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ из $\triangle AHB$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28}$

$CD = CH + HD = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

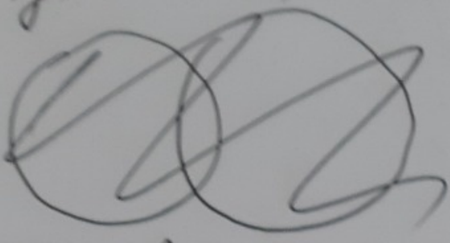
Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$

№3 продолжение:

21104526 (U304292 M1299077)

БЕЛОВИК

№3
(продолжение)



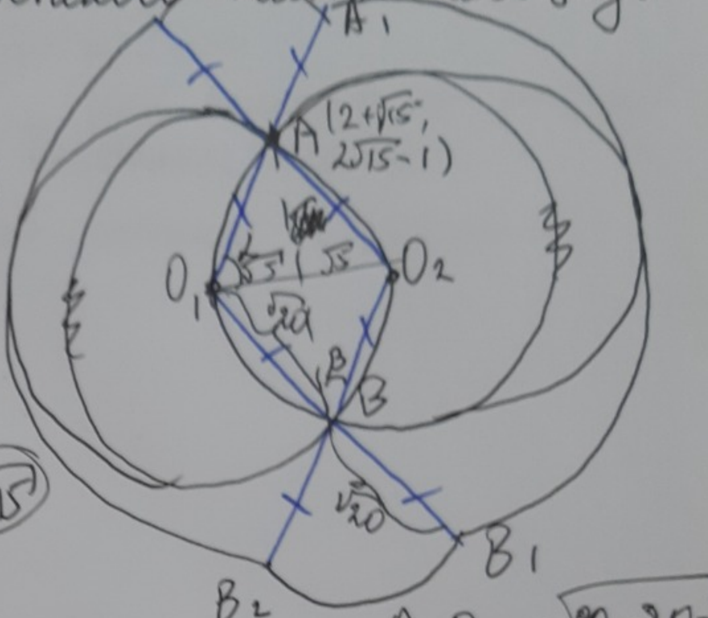
найдём $A_1$: лежит на $y=2x-5$,
$y^2+x^2=4\cdot 20 \Rightarrow x_A = 2+\sqrt{15}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{15}-1}{\sqrt{5}}$

$S_{сект.}\ A_1O_1B_1 = \pi\cdot\frac{2\alpha}{360}r^2 =$
$= \frac{\pi\cdot 2\arcsin(\ldots)\,r^2}{360}$

$S_{O_1AO_2B} = 2\cdot\ldots\cdot\sqrt{5}\cdot 2 = 20\sqrt{15}$

Осталось найти площадь.




$A_1O_2 = \sqrt{80-20} =$
$\sin\beta = \sqrt{60} =$
$\sin\alpha =$

$S_{искомая} = 2S_{сект A_1O_1B_1} - S_{O_1AO_2B} +$

$+ 2S_{сектор}\ BB_1B_2$

~~$S_{сектор}\ BB_1B_2$~~

№3 БЕЛОВИК

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$

1-ое неравенство задаёт ~~окруж~~ круг. с радиусом $\sqrt{20}$, центр в $(a;b)$

исходная система равносильна следующей:

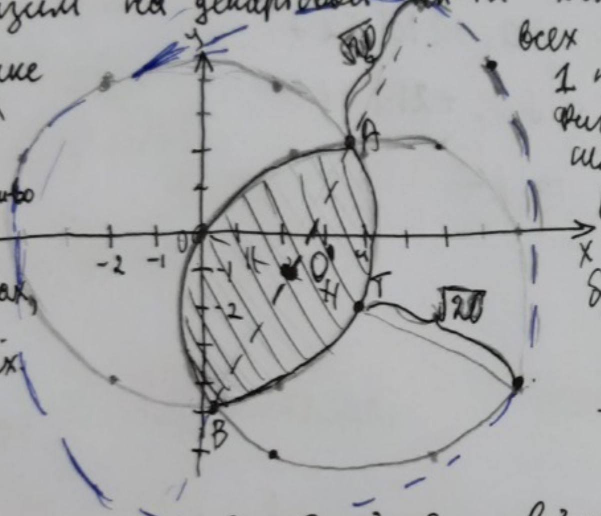
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b \to a^2-8a+b^2+4b\le 0;\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

Изобразим на декартовой пл-ти точки с коорд. $(a;b)$, это месторасполож. всех возможных центров ~~окруж.~~ кругов из 1 нер-ва.

Фигура, состоящая из наших центров симметричная.

Будем рассматривать погранич. точки, нужные точки $(x;y)$ будут в радиусе $\sqrt{20}$, таким образом мы ~~получим~~ получим фигуру ~~окружность~~ круга с центром в $O'$.

на графике отмеч. ||| фигура. Ответом будет множ-во кругов с центрами в этих точках, располож. в заштрих. фигуре.




Найдём точки A и B, $a^2-8a+b^2+4b+20=a^2+b^2$

$-8a+4b=-20$

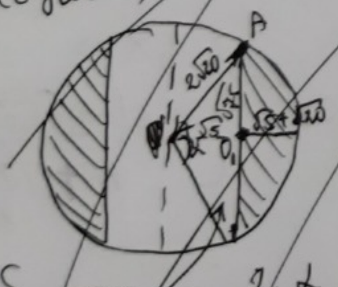
$-2a+b=-5 \to b=2a-5$

$a^2+(2a-5)^2=20$

из симметрии найдём $O'$: $x_{O_1}=\frac{4}{2}=2$; $y_{O_1}=\frac{-2}{2}=-1$

(с учётом)

$O'(2;-1)$, $O'T=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$




штриховкой показана искомая площадь.

$AO_1=\sqrt{\underbrace{4\cdot 20}_{80}-5}=\sqrt{75}$

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{75}}{2\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$S_{сектора}=\pi\cdot\frac{2\alpha}{360}r^2=\pi\cdot\frac{\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot 4\cdot 20\cdot 2}{360}=\pi\cdot\frac{8}{13}\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}$

$S_{треуг.}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{75}=5\sqrt{15}$

Тогда искомая площадь: $S=2(S_{сект}-S_{треуг.})=2\left(\frac{8}{13}\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\pi-5\sqrt{15}\right)$

Ответ: $2\left(\frac{8}{13}\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\pi-5\sqrt{15}\right)$ продолж →

БЕЛОВИК

№1

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$a_8 a_{17} > S + 27$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

Пусть разность прогрессии $d$, тогда $S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > (a_1 + 3d)7 + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < (a_1 + 3d)7 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 7a_1 d + 16a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ a_1^2 + 10a_1 d + 13a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 > S + 27 + 18d^2 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60 \end{cases}$$

$S + 60 > S + 27 + 18d^2$

$18d^2 < 33$

$d^2 < 1\frac{15}{18}$

но $d > 0$, $d \in Z$ по условию (возрастающ.), тогда $d = 1$

теперь подставим $d = 1$ в нашу систему.

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \end{cases}$$

$D_1 = 64 - 49 = 15$

$a_{1,2} = -8 \pm \sqrt{15}$

$-8-\sqrt{15}$ $-8+\sqrt{15}$ $a_1$

$\sqrt{15} > 3$, но $\sqrt{15} < 4$, тогда $-8+\sqrt{15} > -11$, $-8-\sqrt{15} < -4$,

тогда

при этом $a_1 \in Z$, исключаем $-8$.

Ответ: $\{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104526**

ID профиля: **304292**

Вариант 21

чистовик (БЕЛОВИК)

N 5

$a=\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x-3}(x+1)^2$

$b=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$c=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$ $\quad (x_в=\frac{3}{4})$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0,\ \neq 1 \\ 2x-3>0,\ \neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0, \neq 1,\ D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x>\frac{3}{2}} \\ x\neq 2 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$

на ОДЗ: используя свойства логарифмов:

$a\cdot b\cdot c=4 \quad =d^2(d-1)$ т.к. два равны, третье меньше на 1.

сравним числа с 2

1) $\log_{2x-3}(x+1)^2-\log_{2x-3}(2x-3)^2 \vee 0$

$=(2x-4)((x+1)^2-(2x-3)^2) \vee 0$

$=-2(x-2)(x-4)(3x-2)$ $\quad$ $+\ \frac{2}{3}\ -\ 2\ +\ 4\ -$ $\quad x$ $\quad \geq 0$

2) $\log_2 b-2=(2x^2-3x+4)((2x-3)^2-(2x^2-3x+5))=$

$\boxed{\text{значит } b<2}$

3) $c-2=x(2x^2-3x+5-(x+1)^2)=x(2x^2-4x+4)$

$=\cancel{2x(x^2-2x}\ =x(x-1)(x-4)$ $\quad$ $-\ 0\ +\ 1\ -\ 4\ +$ $\quad x$

Значит $x=4$: $a=c=\log_5 25=2$

$b=\log_{25}25=1$ (p.s. 1), 2), 3) оказались ненужными)

Действительно:

$d^2(d-1)=\cancel{(d-2)(d^2+d+2)}=0=(d-2)(d^2+d+2)=0$

имеет 1 решение, его проверили. Ответ: $x=4$

№4 ~~Честовик~~ (БЕЛОВИК)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 35 \cdot k$
$b = 35 \cdot l$ , где $k, l, m \in N$, ~~k ≠ ...~~ $k \neq l \neq m$ одновременно
$c = 35 \cdot m$

тогда НОК ~~...~~

каждое из $k, l, m$ можно представить как произведение степеней 5-ки и 7-ки.
Тогда искомое кол-во вариантов = кол-во вар-ов распред-я степеней 5ки × вар-ты распр-я 7 степени

При этом надо учитывать НОД. =>

НОД$(k, l, m)$ = одновр 1

~~Если у кого-то степень 5-ки 1 7, то~~

$НОК = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$a = 5^{x_a} \cdot 7^{y_a}$
$b = 5^{x_b} \cdot 7^{y_b}$
$c = 5^{x_c} \cdot 7^{y_c}$

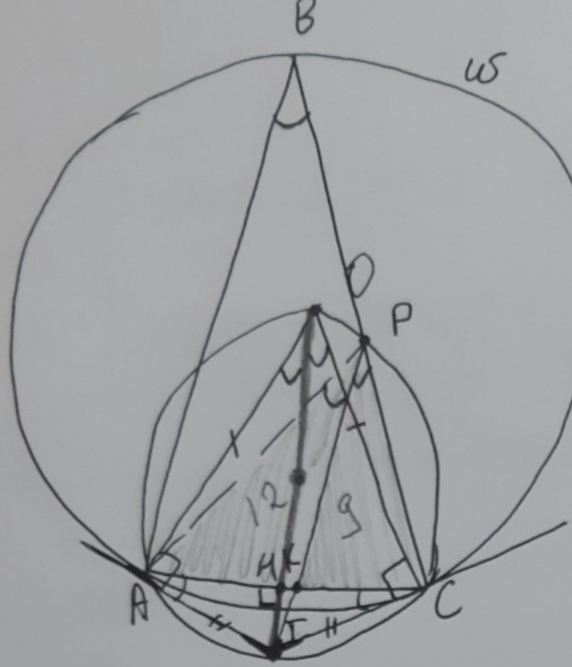
Если $x_a \neq x_b \neq x_c$, то один из них равен 1 т.к НОД 35, один из них = 18 (т.к. НОК $5^{18} \cdot 7^{16}$), а третий $[2;17]$, всего вариантов $3 \cdot 2 \cdot 16$.
Если какие-то $x_i = x_j$ то это либо $(1;1;18)$, либо $(1;18;18)$
Всего таких вариантов $3+3=6$. Тогда для $x_a, x_b, x_c$ вариантов $3 \cdot 2 \cdot 16 + 6 = 6 \cdot 17$
Аналогично для $y_a\ y_b\ y_c$ : $3 \cdot 2 \cdot 14 + 6 = 6 \cdot 15$
Тогда ответ: $6 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 15 = 9180$

Ответ: 9180

21104526 (U304292 M1299078)

ЧЕСТОВИК (БЕЛОВИК)

№6




TA = TC
касат. из одной точки.

$\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$
тогда T ∈ окр. опис. около AOC, TO - диаметр

У △ APK и KPC общая высота, тогда

$\frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle TOC = \angle TPC$ т.к. на одну дугу опираются.

аналогично $\angle AOT = \angle APT$

значит PT - биссектр в △APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$

угол между хордой и секь касат $\angle ACT = \angle CAT = \angle ABC$

$\triangle TAH = \triangle THC \sim \triangle OHC$

$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} =$ отнош. высот.

21104526 (U304292 M1299078)