Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104491**

ID профиля: **359302**

Вариант 21

Чистовик

№1. a_1 - целое, d - целое, $d>0$

$$S=\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=7(a_1+3d)$$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d)>7a_1+21d+27\\(a_1+10d)(a_1+13d)<60+7a_1+21d\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+23a_1d>7a_1+21d+27-16\cdot 7d^2\\a_1^2+23a_1d<60+7a_1+21d-130d^2\end{cases}$$

$$60+\underline{7a_1}+\underline{\underline{21d}}-130d^2>\underline{7a_1}+\underline{\underline{21}}d+27-16\cdot 7d^2$$

$$33>18d^2$$

$$d^2<\frac{33}{18}$$

Т.к. d - целое ($d\neq 0$) $d_1=1$ $d_2=-1$ - не является решением, т.к. $d>0$

1. $d=1$

$$\begin{cases}a_1^2+(23-7)a_1+64>0\\a_1^2+16a_1+49<0\end{cases}$$

$+$ -8 $+$ a_1

$+$ -8 $+$ a_1

$-8-\sqrt{15}$ $-8+\sqrt{15}$

a_1 - целое. Рассмотрим целые числа, удовлетворяющие системе неравенств

$-7<-8+\sqrt{15}$ $\quad$ $-6<-8+\sqrt{15}$ $\quad$ $-5<-8+\sqrt{15}$ $\quad$ $-4>-8+\sqrt{15}$ $\quad$ $a_1\neq 4$

$1<\sqrt{15}$ $\quad$ $2<\sqrt{15}$ $\quad$ $3<\sqrt{15}$ $\quad$ $4>\sqrt{15}$

$-9>-8-\sqrt{15}$ $\quad$ $-10>-8-\sqrt{15}$ $\quad$ $-11>-8-\sqrt{15}$ $\quad$ $-12<-8-\sqrt{15}$ $\quad$ $a_1\neq -12$

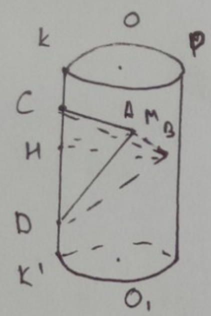
$\sqrt{15}>1$ $\quad$ $\sqrt{15}>2$ $\quad$ $\sqrt{15}>3$ $\quad$ $\sqrt{15}<4$

$a=-8$ - не удовлетворяет 1-ому неравенству

Ответ: a_1 $-11; -10; -9; -7; -6; -5.$

Чистовик

№2.



Дано: ABCD - тетраэдр $AB=4$

$AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$

Найти : CD-?

Решение :

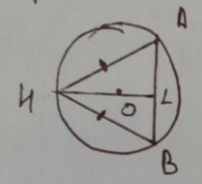
$CD \parallel OO_1 \Rightarrow CD \in KK_1$

Рассм $\triangle CAD$ и $\triangle CBD$

1) CD - общая
2) $AC = CB$
3) $AD = DB$

$\Rightarrow \triangle CAD = \triangle CBD$ (по 3 сторонам) $\Rightarrow$ высоты AH_1 и BH_2 равны

и пересекаются в т. H (т. H_1 и т. H_2 совпадают) $\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ BH \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow (BAH) \parallel (KOP)$

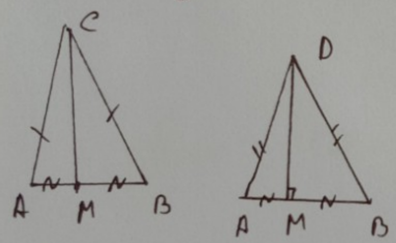


Проведем высоты $CM \perp AB$ и $DN \perp AB$

$HL \perp AB$

$\triangle ACB$ - равноб. с осн. AB
$\triangle ADB$ - равноб. с осн. AB
$\triangle AHB$ - равноб с осн. AB

$\Rightarrow$ т. L, т. M и т. N - совпадают



$$CM = \sqrt{CB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$$

$$DM = \sqrt{DB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$$

$$HL = HM = \sqrt{AH^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{AC^2 - CH^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

2. ~~ABCD - симметричен относительно (CMD)~~

~~По т. косинусов~~ $\cancel{CD^2 = CM^2 + MD^2 - 2MC \cdot MD \cdot \cos\angle CMD}$

$\cancel{-1 < \cos\angle CMD < 1}$

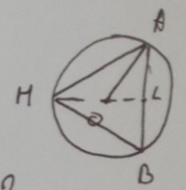
$\cancel{CM^2 + MD^2 - 2MC \cdot CD < CD^2 < CM^2 + MD^2 + 2MC \cdot MD}$

$\cancel{|CM - MD| < CD < |CM + MD|}$

$\cancel{4\sqrt{2} - \sqrt{21} < CD < \sqrt{21} + 4\sqrt{2}}$

~~Ответ:~~ $\cancel{4\sqrt{2} - \sqrt{21} < CD < \sqrt{21} + 4\sqrt{2}}$

Чистовик



Радиус будет минимален при $r = AL$

так как $r = AO = \sqrt{OL^2 + AL^2}$ $\quad r_{мин} = AL = \frac{AB}{2} = 2$

$AL = \frac{AB}{2}$ (т. $O \in HL$ т.к. $\triangle AHC$ - равноб. с осн. AB)

Тогда AB - диаметр. $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\angle AHB = 90^\circ \\ AH = HB\end{array}\right\} \Rightarrow AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \underline{2\sqrt{2}}$

$$HL = \sqrt{AH^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 2 - 4} = 2$$

По т. Пифагора

$$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$$

$$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28}$$

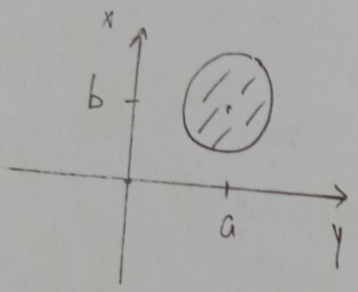
$$CD = CH + HD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$$

Ответ: $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases} \quad (R^2=20)$$



при $8a-4b<20$

$2a-b<5 \qquad 2a<5+b$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$b^2+a^2-8a \le -4b$

$a^2-8a+b^2+4b \le 0$

$D=64-4b^2-16b$

$a=\dfrac{8 \pm 2\sqrt{16-4b-b^2}}{2}$

+ − + ; a_1 a_2

т. $(0;0)$ - не удовлетворяет нер-ву на графике при $a^2+b^2>20$

$\Rightarrow a^2+b^2>20$

Тогда

$8a-4b<20$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$4-\sqrt{16-4b-b^2} \le a \le 4+\sqrt{16-4b-b^2}$

$\cancel{8-2\sqrt{16-4b-b^2} \le}$

$8-2\sqrt{16-4b-b^2} < 5+b$

$3-b < 2\sqrt{16-4b-b^2}$

$9-6b+b^2 < 64-16b-4b^2$

$5b^2+10b-55<0$

+ − + ; $-1-\sqrt{12}$; $\sqrt{12}-1$; b

Так же важно учесть, что $D=16-4b-b^2>0$

− + − ; $-2-2\sqrt5$; $2\sqrt5-2$; b

$2\sqrt5-2 > -1-\sqrt{12}$ b - существует

$S=\pi R^2=20\pi$

Ответ: 20π

4

Черновик

$4b - 4b - b^2 > 0$

$D = 16 + 4 \cdot 16 = 5 \cdot 16$

$b = \frac{4 \pm 4\sqrt{5}}{-2} = \left[-2 \pm 2\sqrt{5} \right.$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$4 \cdot 4$

$D = 4 \cdot 164 - 4 \cdot 49 = 4(64 - 49) = 4 \cdot 15$

$a = \frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2}$

200

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$

p·x

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a_1 =$	-5 ;	-4 ;	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

$S = -14$

$2 \cdot 11 > -14 + 27$

$22 > 13$

$5 \cdot 8 < 60 - 14$

$40 < 46$

№1. a_1, d Черновик

$$S=\frac{a_1+a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)7$$

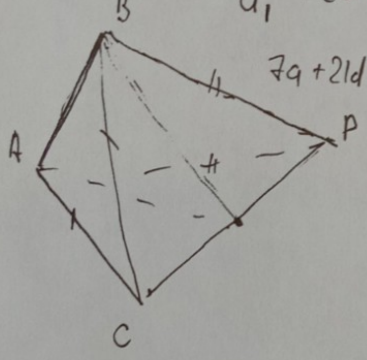
$7\cdot 16=112$

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d)>27+7a_1+21d\\(a_1+10d)(a_1+13d)<60+7a_1+21d\end{cases}$$

$\underbrace{a_1^2+23a_1d}_{x}+112d^2>7a_1+21d+27$

$a_1^2+23a_1d+130d^2<7a_1+21d+60$

$7a+21d+60-130d^2>x>7a_1+21d+27-112d$



$60-130d^2>27+112d^2$

$33>18d^2$

$0<d^2<\frac{33}{18}$

d - целое $\quad d=1 \quad d=-1$

$D=100+20\cdot 55$

1200

$b=\frac{-10\pm 10\sqrt{12}}{10}$

$b=-1\pm\sqrt{12}$

$AC^2-x^2=AD^2-(CD-x)^2$

$AC^2=AD^2-CD^2+2CD\cdot x$

$d=1$

$a_1^2+23a_1+112>27+7a_1+21$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$

-8

$a_1^2+23a_1+130<7a_1+21d+60$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$D=4(64-49)=4\cdot 15$

$a_1=\frac{-16\pm 2\sqrt{15}}{2}$

$-8-\sqrt{15} \quad -8+\sqrt{15}$

$3<15$ $\quad$ -11

$2<\sqrt{15}$ $\quad$ -10

$1<\sqrt{15}$

$-8-\sqrt{15}<-9$

$-8+\sqrt{15}>-9$

$1+\sqrt{15}>0$

$-8+\sqrt{15}<-4$

$-8+\sqrt{15}>-\sqrt{7}$

$\sqrt{15}<4$

$-5+\sqrt{15}$ $\quad -6$, -5

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104491**

ID профиля: **359302**

Вариант 21

Чистовик

№4 $a = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1)$

$b = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$c = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$$\log_{2x-3}(x+1) = \frac{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)} = \frac{1}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{2}{b} \Rightarrow a\cdot b\cdot c = 4$$

Пусть 2 числа равны y, тогда третье $= y-1$

$y^2(y-1)=4$

$y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$y=2$. Подставим это значение для каждого из чисел a, b, c

$2\log_{2x-3}(x+1)=2 \Rightarrow 2x-3=x+1$ и $x=4$

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=2$ $\quad 2x-3=2x^2-3x+5$ $\quad 2x^2-5x+8=0$ - к.н.

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$ $\quad 2x^2-3x+5=x^2+2x+1$ $\quad x^2-5x+4=0$

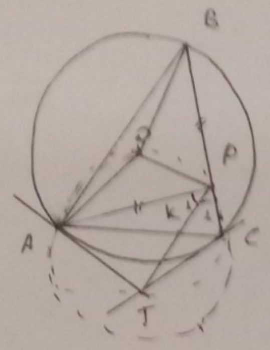
$x_1=1$ - не удовлетворяет условиям

$x_2=4$

$b = 2\log_{(32-12+5)}5 = 2\log_{25}5 = 1$

Ответ: $x=4$

№6



Чистовик

Дано: $\triangle ABC$, AT, TC - касательные

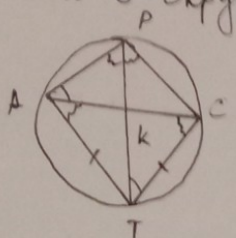
$S_{APK} = 12$ $S_{CPK} = 9$

Найти: а) S_{ABC} - ?

AC - ?

Решение:

1) TA, TC - касательн. $\Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = 90° \Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow AOCT$ - можно вписать в окружность $\Rightarrow$ т. T опирается на ту же окруж., что и т. A, т. C



По св-ву касательных из 1 точки AT = TC

Рассм. $\triangle AKT$ и $\triangle PKC$

1) $\angle AKT = \angle PKC$ (вертикал.)

2) $\angle CPK = \angle KAT$ (опир. на $\smile CT$) $\Rightarrow \triangle AKT \sim \triangle PKC$

~~Аналогично $\triangle PKA \sim \triangle CKT$ (по 2 углам) $\Rightarrow PA = CT$.~~

$\angle ACT = \angle TAC$ (т.к. AT = TC)

$\angle CAT = CPT$ (опир. на 1 дугу)

$\angle ACT = \angle APT$ (опир на 1 дугу) $\Rightarrow$ PT - бис-са $\Rightarrow AK : KC = AP : PC$

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{PH \cdot AK}{PH \cdot KC} = \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow AP : PC = 4 : 3$$

Пусть $\angle TPC = \alpha \Rightarrow \angle APT = \alpha$

$\angle OAT = 90° \Rightarrow$ OT - диаметр $\Rightarrow \angle OPT = 90°$ $\Rightarrow \angle OPA = 90 - \alpha$

$\angle BPO = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha = \angle OPA$

Рассм. $\triangle AOP$ и $\triangle BOP$

1) OP - общ.

2) AO = OB = R

3) $\angle OPA = \angle BPO$

$\Rightarrow \triangle AOP = \triangle BOP \Rightarrow AP = BP \Rightarrow BP : PC = 4 : 3 \Rightarrow S_{ABC} : S_{APC} =$

$= 7 : 3 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{7}{3}(S_{APK} + S_{PKC}) = \frac{7}{3} \cdot \cancel{21}^{7} = 49$

2

Чистовик

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC}{2} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

$$AC = 2R \sin\angle ABC$$

$$\frac{1}{\sin^2\angle ABC} = 1 + \frac{49}{9} = \frac{58}{9} \qquad \sin\angle ABC = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC \quad ; \angle ATC = 180 - \angle AOC$$

$$S_{ATC} = CT^2 \cdot \sin\angle ATC = S_{AKT} + S_{TKC} = \frac{7}{4} \cdot S_{AKT} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{S_{APT}}{S_{PTC}} = \frac{AP \cdot PT \cdot \sin\angle}{PC \cdot PT \cdot \sin\angle} = \frac{4}{3}$$

$\cancel{S_{AKT} + \ldots = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}}$

$$AC = CT \cdot \sin\left(\frac{\angle ATC}{2}\right)$$

Ответ: $S_{ABC} = 49$

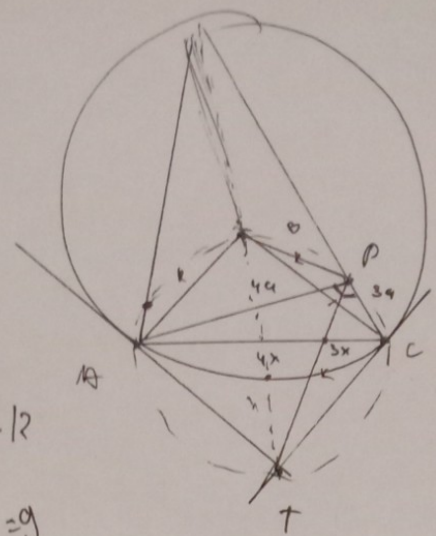
Черновик

Ыа $2x^2-3x+5$

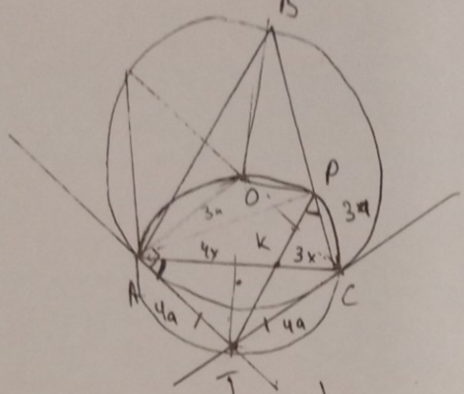
о - 9 -

$\log_a b$

$\log_a c$



№6.



$S_{APK}=12$

$S_{CPK}=9$

$B+90+\angle=180$

1) $OAT=\angle OCT=90^\circ \Rightarrow AOCT$ - впис. в окр

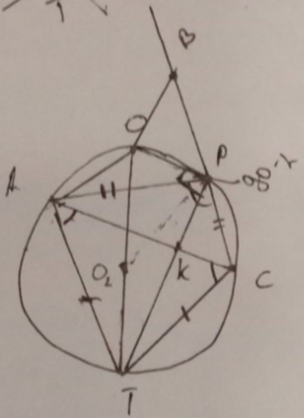
Т. опир. на ту же окр

OT - диаметр

$\triangle APC$ и $\triangle CAB$

$\angle C$ - общ.

$\frac{S_{APK}}{S_{PCK}}=\frac{AK}{CK}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

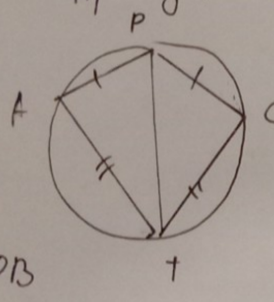


$\triangle AKT \sim \triangle PKC$

$S_{AKT}=\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot S_{PKC}=\frac{16}{9}\cdot 9=16$

$TK : KP = 16:12=4:3$

Проведём

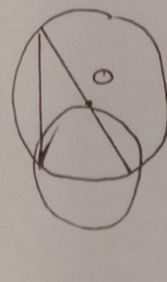


$CO=OB$

$\triangle APT=\triangle PCT \Rightarrow \angle PAT=90^\circ$

опир на d

т. D = т. D



Черновик

№5. $\underbrace{2\log_{2x+3}{x+1}}_{a}$ $\underbrace{2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)}_{b}$ $\underbrace{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}_{c}$

$$\log_{2x+3}(x+1) = \frac{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)} = \frac{1}{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)}$$

$$\log_{2x+3}(x+1) = \frac{a}{2} = \frac{2}{c\cdot b}$$

$a\cdot b\cdot c = 4$

$y^2(y-1)=4$

$y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)$

$\underline{y=2}$

$$\begin{array}{r|l} y^3-y^2-4 & y-2 \\ \cline{2-2} y^3-2y^2 & y^2+y+2 \\ \cline{1-1} y^2 \cancel{+4} & D=1 \\ y^2-2y & \\ \cline{1-1} 2y-4 & \\ 2y-4 & \end{array}$$

$\log_{2x-3}{x+1}=1$

$x+1=2x-3$

$x=4$

$2x^2-3x+5=2x-3$

$2x^2-5x+8=0$

$D=25-4\cdot\underbrace{2\cdot8}_{16}$

К.Н.

$2x^2-3x+5=(x+1)^2$

$\cancel{2x^2-4x+4}$

$x^2-2x+\cancel{2}=0$

$D=4-4\cdot\cancel{2}$

$x^2-3x+5=2x+1$

$x^2-5x+4=0$

$x_1=1$

$x_2=4$