Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104465**

ID профиля: **822474**

Вариант 21

№1. Числа

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7$ d – разность прогрессии

$$S = \frac{a_1 + (a_1 + 6d)}{2} 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = 7a_1 + 21d$$

$a_8 = a_1 + 7d$ Т.к. все члены – целые числа, то и $d \in \mathbb{Z}$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$

Из усл:

$$\begin{cases} 7a_1 + 21d + 27 < (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

Сложив, получим следующее:

$$130d^2 + 27 < 112d^2 + 60$$

$$18d^2 < 33$$

$$d^2 < \frac{33}{18}$$

$-\sqrt{\frac{33}{18}} < d < \sqrt{\frac{33}{18}}$ Заметим, что $1 < \left|\sqrt{\frac{33}{18}}\right| < 2$

значит либо $d = 1$ либо $d = 0$ либо $d = -1$

но т.к. прогрессия возрастающая по усл, то либо $d = 0$, либо $d = 1$

При $d = 0$:

$S = 7a_1$

$$\begin{cases} a_1^2 > 7a_1 + 27 \\ a_1^2 < 7a_1 + 60 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 - 7a_1 - 27 > 0 \\ a_1^2 - 7a_1 + 60 < 0 \ (2) \end{cases}$$

$/ a_1^2 - 7a_1 + 60 = 0$ $D < 0$ знач корней нет

Чистовик

№1

т.к. $a_1^2 - 7a_1 + 60$ есть число с целыми

иначе (2) не вып.

значит $d \neq 0$

значит $d = 1$

Тогда: $S = 7a_1 + 21$

$$\begin{cases} 7a_1 + 21 + 27 < (a_1+7)(a_1+16) \\ (a_1+10)(a_1+13) < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a_1 + 48 < a_1^2 + 23a_1 + 112 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 16a_1 - 64 < 0 \\ a_1^2 + 16a + 49 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 16)^2 > 0 \\ \left(a - (-8+\sqrt{15})\right)\left(a - (-8-\sqrt{15})\right) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq -16 \\ -8 - \sqrt{15} < a < -8 + \sqrt{15} \end{cases} \qquad (3 < \sqrt{15} < 4)$$

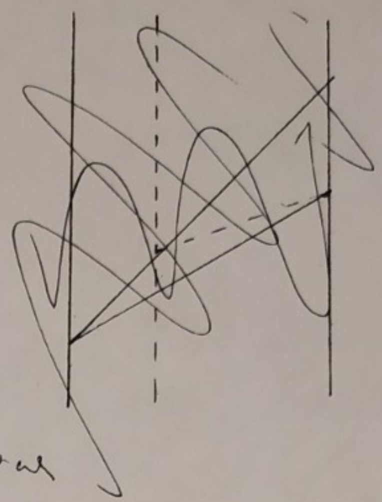
подходящие целые значения a:

$a \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5\}$

Ответ: $a \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5\}$

№2.

1) Заметим, что картина симметрична плоскости, проходящей через CD и ось цилиндра



2) Спроецируем точки на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, и соединим A (первая точка) и B (вторая). Назовём эти точки A' и C'

$(A'B'C)$ есть плоскость перпендикулярная оси цилиндра, а $\Delta A'B'C$ вписанный, вписан в окружность, радиус которой окр-ти осн-я цилиндра

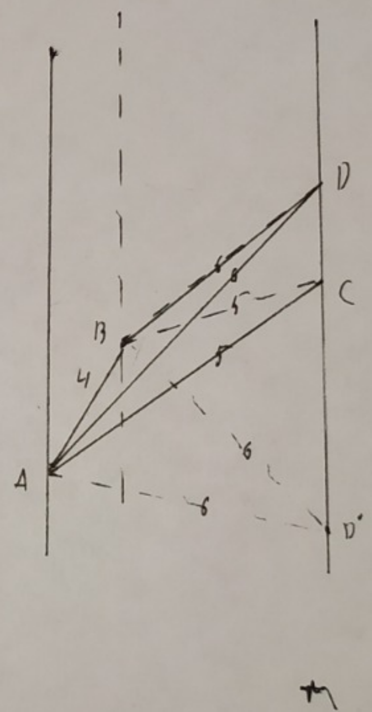
R - радиус окр-ти осн-я

По т. синусов:

$$R = \frac{A'B'}{2\sin\angle A'CB'}$$

По т.к. $A'B' \parallel AB$ и $A; A'$ и $B; B'$ лежат на параллельных прямых $AB = A'B'$

значит $A'B' = 4$



Чем больше синус $\angle A'CB'$, тем меньше радиус.

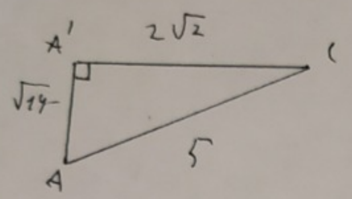
Значит в лучшем случае $\sin\angle A'CB' = 1$

и $\angle A'CB' = 90^\circ$

№2.

3) Т.к. $\Delta A'B'C$ — р-б и прямоугольный с гипотенузой 4

$A'C = A'B = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



по т. П.

$AA' = \sqrt{AC^2 - A'C^2}$

$AA' = \sqrt{25 - 8}$

$AA' = \sqrt{17}$

~~$\sin \angle ACA' = \frac{\sqrt{17}}{5}$~~

$\cos \angle A'CA = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ $\qquad$ $\sin \angle A'CA = \frac{\sqrt{17}}{5}$

I Если D и A ~~...~~ лежат по разные стороны от плоскости $A'CB'$

$\angle ACD = 90^\circ + \angle ACA'$

$\cos \angle ACD = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \angle A'CA\right) = \sin(-\angle A'CA) = -\sin \angle A'CA$

$\cos \angle ACD = -\frac{\sqrt{17}}{5}$

По т. кос для ΔACD:

$AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \angle ACD = AD^2$

$25 + CD^2 + 2\sqrt{17}\, CD = 36$

$CD^2 + 2\sqrt{17}\, CD - 11 = 0$

$CD = \frac{-2\sqrt{17} \pm \sqrt{112}}{2}$

$CD = \cancel{-2\sqrt{17} \pm 1}\ -\sqrt{17} \pm 2\sqrt{7}$

$CD \geq 0$ поэтому берем знак +

$CD = -\sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

№2. Чистовик

<u>II</u> Если не одну

$\angle ACD = 90^\circ - \angle ACA'$

$\cos\angle ACD = \cos(\frac{\pi}{2} - \angle ACA) = \sin\angle ACA \qquad \cos\angle ACD = \frac{\sqrt{17}}{5}$

По т. кос. для ΔACD:

$$CD^2 - 2\sqrt{17}\,CD \cancel{\;} - 11 = 0$$

$\cancel{2x \cdot CD^2\ 2\sqrt{17}}$ $\qquad CD = \frac{2\sqrt{17} \pm \sqrt{112}}{2}$

т.к. $CD > 0$

$$CD = \cancel{2} \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$$

Ответ: $CD = \pm\sqrt{17} + 2\sqrt{7}$

№3. №3. чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \ (1)\\ a^2+b^2\le 20 \ (2)\\ a^2+b^2\le 8a-4b \ (3)\end{cases}$$

(1) — окружность радиуса $\sqrt{20}$ с центром в $(a;b)$

(2) Расстояние от $(0;0)$ до $(a;b)$ не более $\sqrt{20}$

~~Заметим: при каких a и b, что $(a;b)$ лежит на окр. радиуса $\sqrt{20}$ с центром в $(0;0)$, ... расстояние от $(0;0)$ до $(a;b)$ ... Заметим, что (1) и (2) ... (2) задает окр-ть радиуса $\sqrt{20}$ с центром в $(0;0)$~~

(3): $a^2+b^2\le 8a-4b$

$$(a^2-8a+16)+(b^2+4b+4)\le 20$$

$$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$$

Расстояние от $(a;b)$ до $(4;-2)$ меньше либо равно $\sqrt{20}$

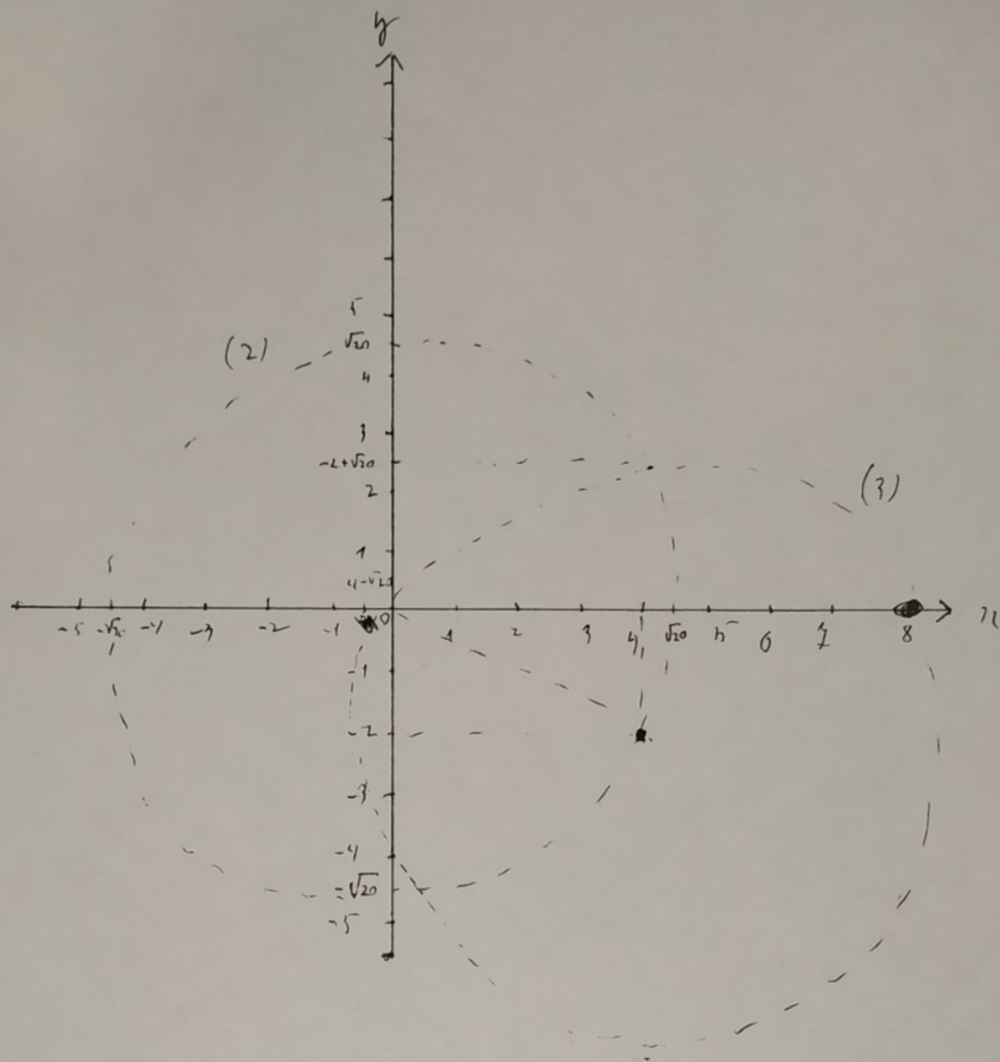
Пересечение (2) и (3) есть допустимые значения точки $(a;b)$. Сист-а системе есть совокупность кругов радиуса $\sqrt{20}$ с центром в этой области.

Очевидно, что достаточно рассмотреть лишь круги с центрами на границе области пересечения (1) и (2) (т.к. очевидно, что сама область входит в сист-у)

6

Mulheam

N3 -



y
x
(2)
(3)
5
$\sqrt{20}$
4
3
$-2+\sqrt{20}$
2
1
$4-\sqrt{20}$
0
-1
-2
-3
-4
$-\sqrt{20}$
-5
1
2
3
4
$\sqrt{20}$
5
6
7
8

ЧЕРНОВИК

$\frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2}$

60 2
30 2
15

$\frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2}$

$-8 \pm \sqrt{15}$

23
2
16

112
48
64

3
49
4
196

2
4
8
16

2
17
4
68
44
112

130
81
49

256
156
60

256 | 2
128 | 2
64 | 2
32 | 2
16 | 2
8 | 2
4 | 2
2 | 2
1

3
16
16
96
16
256

17 $17\cdot4 = 11\cdot4$
4 $4\sqrt{28}$ $4\cdot 28$
$4\sqrt{28}$ $4^2\cdot 7$
11

3
49
4
196

1024 10
512 9
256 8

$\sqrt{2^8}$

2^4

256
156
60

$-8+4$
-4

$-8-4$

8

ЧЕРНОВИК

$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2$

$a_1^2 + 23a_1d + 130d^2$

$x^2+y^2-2(4x+4y) \le 0$

$a^2+b^2 \le 20$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 20$

$(a-8)^2+(b+4)^2 \le 80$

$a^2-8a+64+b^2+8b+16 \le 80$

~~$a^2+4a+\dots+b^2$~~

$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2+b^2 \le 20$

$\frac{a_1+a_1+6}{2}\cdot 7$

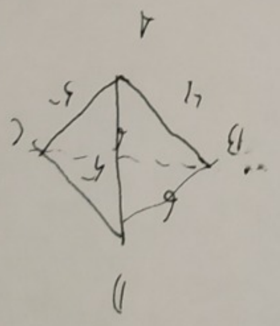
$7a_1+21$

$2\sqrt{5}$

$16 < 20 < 25$

$4 < \sqrt{20} < 5$

$16 < 20 < 25$



$16 \cdot 7 = 112$

$130 - 112 = 18$

$67 - 27 = 33$

$16 \cdot 7 = 112$

$130 - 112$

7

45

(9)

ЧЕРНОВИК

$0 \leq 20 - 8a + 4b$ | $8a - 4b \leq 20$

$0 \leq 5 - 2a + b$

$2 \leq 3$

$1 \leq 4$ $\quad -3 \leq 1$

$2a - 1 - 5 \leq 0$

$5 \leq 2$

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 8^2$

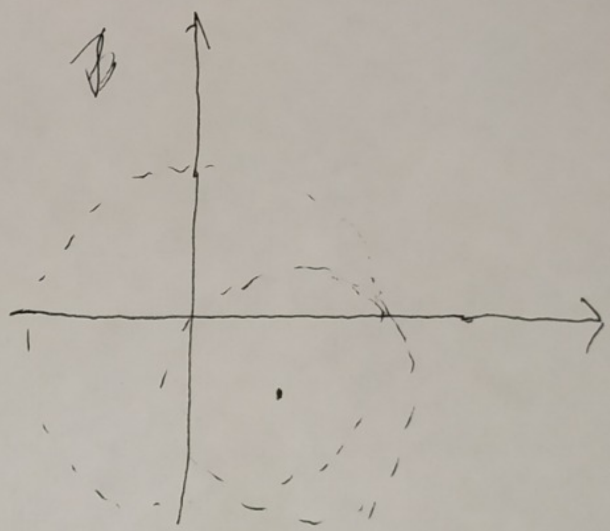
$\sqrt{50} = 3\sqrt{10} \approx 9,5$

$a^2 - 8a + \overset{16}{\cancel{8a}} + b^2 + 4b + \overset{4}{\cancel{4a}} \leq 0$

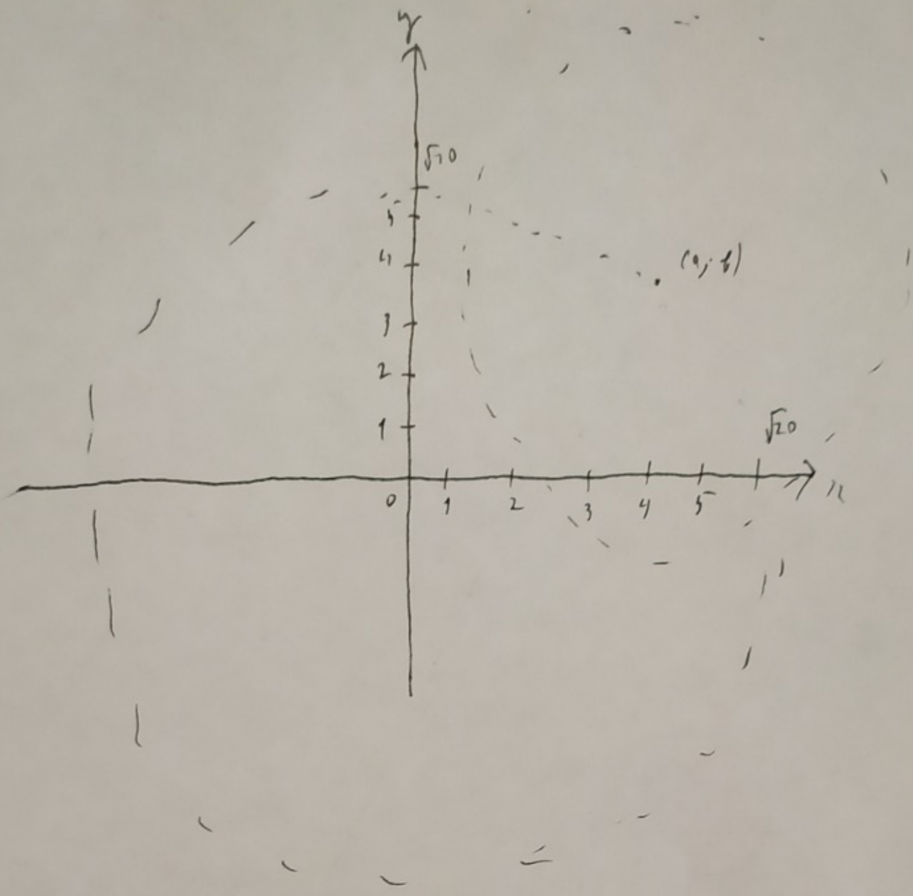
$(a-4)^2 + (b+2)^2 \leq 20$

(4; −2)

2 · 4.

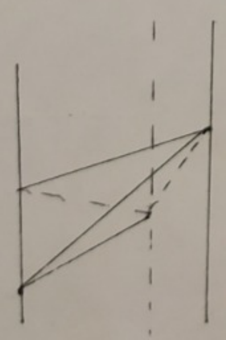


11



$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$

$$\begin{array}{r|l} 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & \end{array}$$



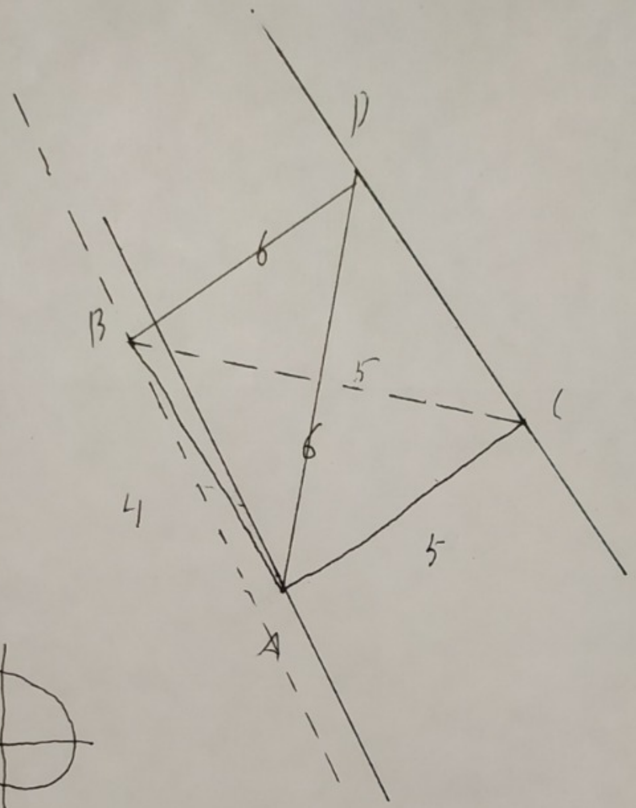
$$\begin{array}{r} 2 \\ 17 \\ \times\ 4 \\ \hline 68 \\ +\ 44 \\ \hline 112 \end{array}$$

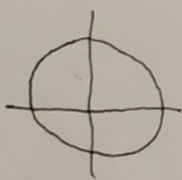
12 28

$\sqrt{12}$ $2\sqrt{7}$

12 28

ЧЕРНОВИК

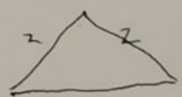




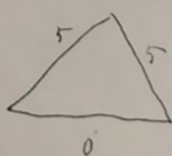
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

$\sin\uparrow \Rightarrow R\downarrow$

$\sin\downarrow \Rightarrow R\uparrow$



r ↓ sin



-4 6
2 5
1 1

ЧЕРНОВИК

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104465**

ID профиля: **822474**

Вариант 21

~~Черновик~~

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \quad (1) \\ НОК(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \quad (2) \end{cases}$$

1) заметим, что если мы найдём какую-то тройку чисел $(a_1; b_1; c_1)$, то нам также подойдут также другие тройки, составленные из этих чисел (где каждое из этих чисел 1 и лишь 1 раз)

2) $35 = 7\cdot 5$

3) ~~НОК где~~ т.к. НОК содержит множитель 5^{18} в своем разложении, то хотя бы одно из чисел $a; b; c$ тоже его содержит. аналогично для 7^{16}

Пояснение:

Если бы ни одно из чисел a, b, c не делилось на 5^{18} либо наибольшая такая из этих степень бы число, делящееся на 5, то НОК был бы другим. Аналогично для 7^{16}

4) Пусть будет число, делящееся на 5^{18} и число, делящееся на 7^{16} – разные ~~разные~~ числа. Пусть, для определённости, это a и b $(a \vdots 5^{18}; b \vdots 7^{16})$

Из (1) то следует, что $a \vdots 7$ и $b \vdots 5$

~~a~~ Z

(*) Кстати, заметим, что a, b, c. могут делиться лишь на ~~степ~~ степени 5 и 7 и их произв., иначе НОК или НОД делились бы на что-то кроме 5 и 7 и различных степеней и их произв.

ЧИСТОВИК

№4 $a = 5^{18} \cdot 7^{x}$

$b = 7^{16} \cdot 5^{y}$

$c = 5^{m} \cdot 7^{n}$

$x, y \geq 1$
$x, y \in \mathbb{N}$

$m, n \geq 1$
$m, n \in \mathbb{N}$

$x \leq 16$
$y \leq 18$

$m \leq 18$
$n \leq 16$

Если $m = n = 1$:

16 способов выбрать x

18 — y

Итого: $16 \cdot 18$

Если $m \neq 1$ и $n = 1$

$y = 1$

16 способов выбрать x

m выбираем 17 способами

Итого: $16 \cdot 17$

Если $n \neq 1$ и $m = 1$

18 способов выбрать y

15 способов выбрать n

$x = 1$

Итого: $15 \cdot 18$

Если $m \neq 1$ и $n \neq 1$

$x = 1$

$y = 1$

17 способ выбрать m

15 способ выбрать n

Итого: $17 \cdot 15$

$15 \cdot 17 + 15 \cdot 18 + 16 \cdot 17 + 16 \cdot 18 =$

$= 17(15 + 16) + 18(15 + 16) =$

$= 31(17 + 18) = 31 \cdot 35 = 1085$

№4 II Если это ещё и так число (нужно а) ЧИСТОВИК

$a = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$b = 5^{x} \cdot 7^{y}$

$c = 5^{m} \cdot 7^{n}$

~~Для них~~ 2^{n} ~~...~~

x, y, m, n задаются аналогично п. I (⊙)

Одно из x, m равно 1, другое — 18 способами

Одно из y, n равно 1, другое — 16 способами

$\boxed{m = n = 1}$	$\boxed{m \neq 1 \quad n = 1}$	$\boxed{n \neq 1 \quad m = 1}$	$n \neq 1 \quad m \neq 1$
	~~...~~ $x = 1$	$y = 1$	$x = 1$, $y = 1$
Способов: $16 \cdot 18$	Способов: $17 \cdot 16$	Способов: $18 \cdot 15$	Способов: $15 \cdot 17$

Сумма всего 1085

Некоторые случаи мы посчитали дважды

~~1. ... в I ...~~

$a = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$b = 7^{16} \cdot 5^{x}$

$c = 5^{m} \cdot 7^{n}$

Таких всего: ~~...~~ $18^2 - 1 = 323$

Тогда всего способов

$1085 \cdot 2 - 323 = 1847$

Случаев, когда $a = b = c$ не может быть

Случаи, когда две тройки равны:

1. $a = 5^{18} \cdot 7^{16}$	2. $a = 5^{18} \cdot 7^{16}$	3. $5^{18} \cdot 7$	4. $5 \cdot 7^{16}$
$b = 5 \cdot 7$	$b = 7^{16} \cdot 5^{18}$	$5^{18} \cdot 7$	$5 \cdot 7^{16}$
$c = 5 \cdot 7$	$c = 5 \cdot 7$	$5 \cdot 7^{16}$	$5^{18} \cdot 7$

№4

ЧИСТОВИК

5) Вычислив в п. 1) учтём то, что тройки упорядочены

$1843 \cdot 3! + 4 \cdot 3 = 11.070$

Ответ: 11.070

№5. доп. усл:

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > \cancel{3}\frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ x \neq 0 \\ 2x^2 - 3x + 5 > 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Пусть значение одного из чисел (правого) есть a

Тогда левое есть $a-1$

Перемножив все три числа при доп. усл, получим

4

Что есть

$$a^2(a-1) = 4$$

$$a^3 - a^2 - 4 = 0$$

$$(a-2)(a^2+a+2) = 0$$

$(a^2+a+2=0$
D<0 нет корней$)$

$$a = 2$$

№5 ЧИСТОВИК

Из 4х ур:

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$

$x+1=2x-3$

$4=x$

входит в одз. ур-я

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=2$

$2x-3=2x^2-3x+5$

$2x^2-5x+8=0$

$D<0$ не подходит

ОДЗ значит значение ~~...~~ меньше всех других на 1

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$2x^2-3x+5=x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$

В эти ур-я подходит лишь

$x=4$

~~Где~~ $\log$ ~~2x~~^{2}?

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1$

$4x^2-12x+9=2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4=0$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

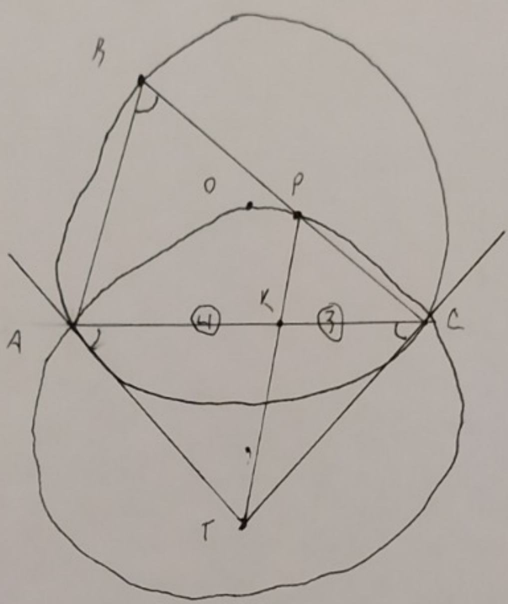
Значит подходит лишь $x=4$

Ответ: $x=4$.

№6. Чистовик

1) $\angle TAC = \angle ACT$ т.к. AT и CT кас.
$\quad ||$
$\angle ABC$ опирается на AC, CAT угол между кас. и хор.
$\quad ||$
$\frac{1}{2}\angle AOC$

Пусть $\angle TAC = \alpha$
Тогда $\angle AOC = 2\alpha$
Из $\triangle ATC$:
$\angle ATC = \pi - 2\alpha$



Значит, что
$\angle AOC + \angle ATC =$
$= 2\alpha + \pi - 2\alpha = \pi$
значит AOCT — вписанный четырёхугольник
(Точки на одной окр-ти)

2) Тогда $\angle ATP = \angle ACP$ (опираются на AP)
$\triangle ATK \sim \triangle ABC$ (по двум углам)
значит
$\angle BAC = \angle AKT$
и кроме того $\angle AKT = \angle PKC$
значит
$\angle PKC = \angle BAC$
то есть $AB \parallel PK$
и $\triangle ABC \sim \triangle PKC$

3) $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ имеют общую высоту из P,
значит $\frac{AK}{KC} = \frac{S(APK)}{S(PKC)} = \frac{4}{3}$

7

3*) так эти подобные

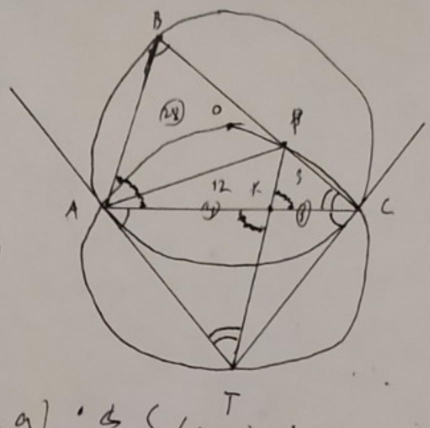
ΔKPL и ΔABC

если $k = \frac{4+3}{3}$

Площади относятся

как квадраты

коэф. подобия



$S(ABC) = \frac{49}{5} S(PKL)$

$S(ABC) = 49$

Ответ на пункт а): $S(ABC) = 49$.

4) пров.: опустим высоту TH на AC

$AH = HC = \frac{1}{2} AC$ т.к. ATC р/б

$\frac{TH}{\frac{1}{2}AC} = \frac{3}{7}$ $(\angle ABC = \angle TAC)$

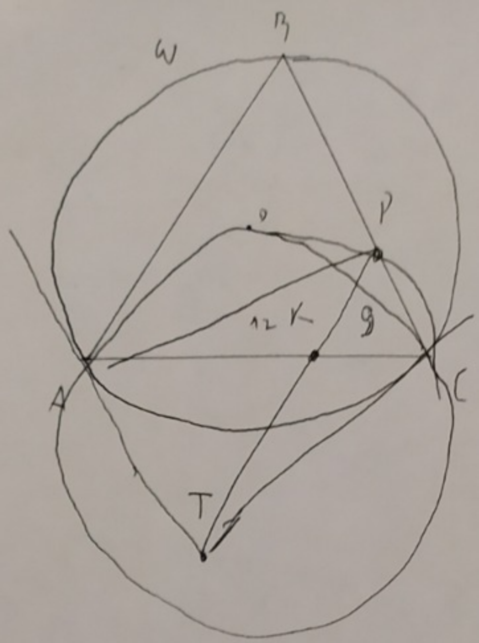
$AC = \frac{14}{3} TH$

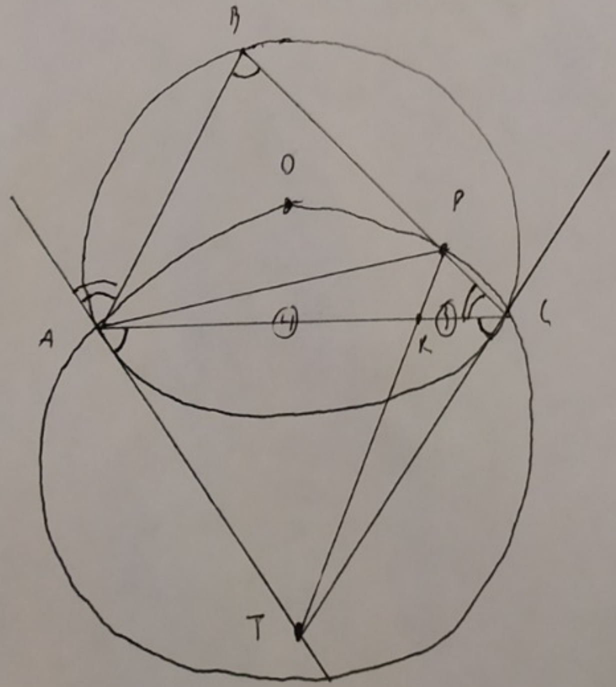
$\frac{AC}{2\sin(\pi - 2\alpha)} = R$

№6 чистовик

8

черновик





5

(10) $2\log_a(x+1)$ $\quad 2\log_{a^2x+5} a$ $\quad \log_{x+1}(a^2x+5)$

A $\qquad$ B

$A = B$

$\log_a(x+1) = \log_{a^2x+5} a$

$x+1 = a^{\log_{a^2x+5} a}$

$\frac{5 \pm 3}{2}$

$a = a^2x+5$

$\log_a(x+1) = \frac{1}{\log_a a^2x+5}$

$\log_a(x+1)$

$\frac{5 \pm 7}{4}$

$\begin{array}{r} 81 \\ -32 \\ \hline 49 \end{array}$

$4\log_a(x+1)$ $\quad \log_{a^2x+5}(x)$ $\quad \log_{(x+1)}(a^2x+5) =$

$a^2(a+1) = 4$

$a^3 + a^2 - 4 = 0$

$8 - 4$

$8 + 4 - 4$ $\quad 1 + 1 - 4$

-2 $\quad -8 + 4 - 4$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

17

ЧЕРНОВИК

Пусть $\sqrt{2x-3} = a$ $\quad a \geq 0$ $\quad x \neq \frac{3}{2}$ $\quad x > \frac{3}{2}$

$x > -1$

$\log_a (x+1)$ $\quad \log_{a^2 x+5} (a^4)$ $\quad \log_{x+1} (a^2 x + 5)$

$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$2x^2 - 3x + 5 = 0$

$2x^2 - 3x + 5 \neq 1$

$\frac{3}{4}$

$x > \frac{3}{2}$

$x \neq 2$

$\cancel{2x^2 - 3x + 4} \neq 0$

$\sqrt{2x-3} \neq 1$

$2x - 3 \neq 1$

$2x \neq 4$

$x \neq 2$

$\log_{x \neq}$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 12x + 9 \\ - \; 2x^2 - 3x + 5 \\ \hline 2x^2 - 9x + 4 \end{array}$$

$\frac{4}{3}$

13

10 $\quad$ 11

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 34 \end{array}$$

Никола 31,

(12)

$35 = 5 \cdot 7$

НОК

5^{18}

$5^{0}\ 7^{16}$

5^{1}

5^{18}

7^{0}

7^{1}

$5^{11}\ 7^{7}$

0	0
0	1
1	0
1	1

521
1843
6
11.058
12
11.070

16
6
4
$2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

3
16
6
96

11
1085
2
2170
− 323
1847

z = 1

18

x = 1 =

1
35
31
35
105
1085

6
18
18
144
18
324

1085
33
154
35
37

$5^{18}\ 7^{1}$
$5\ 7^{16}$
$5\ 7^{16}$

$5^{18}\ 7$
$5^{18}\ 7$
$5\ 7^{16}$

$5^{18}\ 7$
$5 \cdot 7^{16}$

ЧЕРНОВИК