Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104436**

ID профиля: **372830**

Вариант 21

Чистовик Задача 1. Вариант 21

$S = 7a_1 + 21d$

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60 \quad \Big| \cdot(-1) \end{cases}$$

$a_8 = a_1 + 7d;\ a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d;\ a_{14} = a_1 + 13d$

$$\begin{cases} a^2 + 23a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ -a^2 - 23a_1d - 130d^2 > -7a_1 - 21d - 60 \end{cases}$$

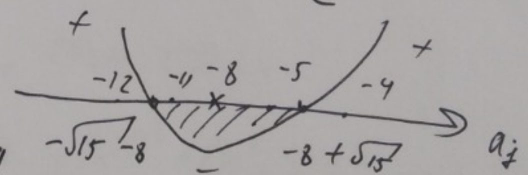
т.к посл состоит из целых чисел и она возрастающая, то $d \geqslant 0$, $d \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} -18d^2 > -33 \Rightarrow d^2 < \frac{33}{18} \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60. \end{cases}$$

т.к $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$, то $d = 1$, подставим его в изнач. систему

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \Rightarrow \boxed{a_1 \neq -8} \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0. \end{cases} \quad D = 60 \Rightarrow a_1 = \frac{\pm 2\sqrt{15} - 16}{2}$$



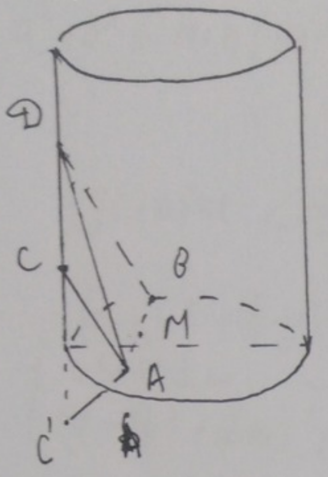
Нам подходят ~~Z~~ целые числа из этого промежутка: $3 < \sqrt{15} < 4$, значит

$$\begin{cases} -12 \leq -\sqrt{15} - 8 \leq -11 \\ -5 < -8 + \sqrt{15} \leq -4 \end{cases}$$

эти числа: ~~Это~~ $-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5$, но при $a_1 = -8$ $(a_1+8)^2 = 0$, что не подх. ~~нам~~ в первое условие $((a_1+8)^2 > 0)$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5$.

Чистовик   Задача 2. Вариант 21



Дано $ABCD \to$ тетраэдр; $AB=4$.

$AC=CB=5$; $AD=DB=6$.

$ABCD \to$ вписан в цилиндр т.ч все вершины $\in$ б. п-ти

$CD \parallel$ оси цилиндра

$R_{цилиндра} \to min$.

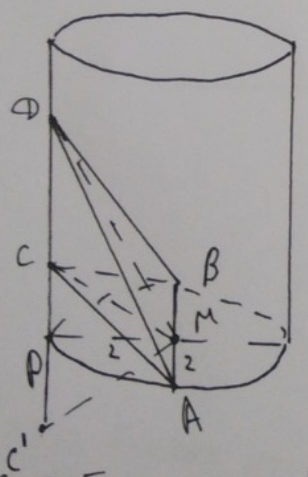
$CD=?$

1) $M \to$ середина AB; тогда ② $DM \perp AB$, $CM \perp AB$ | т.к $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ – равнобедренные.

из ② $\Rightarrow$ что $AB \perp (CDM) \Rightarrow AB \parallel$ диаметру основания $\Rightarrow AB \leq 2R$

$\Rightarrow 2R \geq 4 \Rightarrow$ $R_{наим.}=2$ и достигается тогда когда $AB \Rightarrow$ диаметр.

~~Возь~~ Пусть $CD \cap$ (~~AMB~~ пл-ю осн-я) $= P$; ~~CP=x~~ $CD=x$.



тогда $\begin{cases} DP^2+PA^2=DA^2 & \text{по т. Пифагора для } \triangle DPA \\ CP^2+PA^2=CA^2 & \text{по т. Пифагора для } \triangle CPA \end{cases}$

$\begin{cases} (DC+CP)^2+PA^2=DA^2 \\ CP^2+PA^2=CA^2 \end{cases}$

$PA=\sqrt{8}$ по т. Пифагора в $\triangle PMA$. $PM=R=2$; $MA=R=2$

$DA=6$

$CA=5$.

$CD=x$

$\begin{cases} x^2+2CPx+CP^2+8=36 \\ CP^2=25-8 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+2\sqrt{17}x+25=36 \\ |CP|=\sqrt{17} \end{cases}$

$x=\pm 2\sqrt{7}-\sqrt{17}$!

$x>0$ по логике $\Rightarrow x=2\sqrt{7}-\sqrt{17}$

есть второй случай расп-я точки C'; в нем $DC-CP=DP$) но такое DC будет равно DC из случая 1 $+ 2CP$

Возможные зн-я CD это $2\sqrt{7}-\sqrt{17}$ и $2\sqrt{7}+\sqrt{17}$!

Ответ: $2\sqrt{7}-\sqrt{17}$; $2\sqrt{7}+\sqrt{17}$!

21104436 (U372830 M1298325)

Задача 3. Вариант 21. Чистовик.

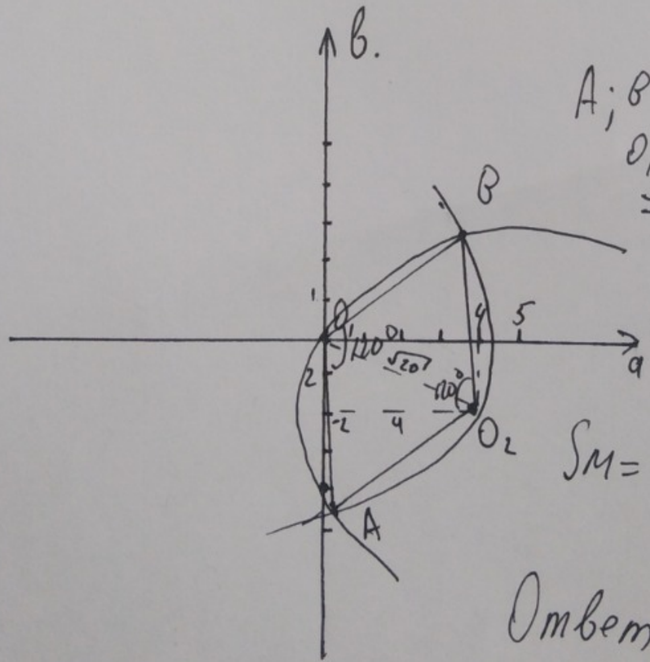
$a^2+b^2 \le \min(8a-4b;20) \iff \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b. \end{cases}$

$\Downarrow$

условие $\iff \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b. \end{cases}$

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 20 - \text{I} \\ a^2+b^2 \le 20 \quad - \text{II} \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 - \text{III} \end{cases}$ | пусть X точка с координатами ~~с коорди натами~~ $(x;y)$ в системе координат $(a;b)$

тогда I это все точки лежащие внутри кругов с радиусом 20 и центрами $(x;y)$ $\Rightarrow$ не влияет на фигуру M^* $\Rightarrow$ фигура M это пересечение двух кругов с радиусом $\sqrt{20}$ и центрами $(0;0)$ и $(4;-2)$ соответсвенно.



$A;B \to$ точки пер-я. окружностей.

$O_1B = BO_2 = O_1O_2 = O_1A = O_2A = \sqrt{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BO_1A = \angle BO_2A = 120°$, а значит

$S_M = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 - S(O_1BO_2A)$

т.к мы посчитаем S ромба дважды

$S_M = \frac{2}{3}\pi \cdot 20 - 2 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{4} = 20\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ответ $\boxed{20 \cdot \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 22{,}4.$

* не влияет на фигуру M т.к это все точки плоскости; но из них нам подходят только те что удовлетворяют $\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20. \end{cases}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104436**

ID профиля: **372830**

Вариант 21

Черновик

1) $\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=35 \\ \text{НОК}(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$ $\Rightarrow$ все числа делятся на 35 $\Rightarrow$ все числа соответственно $5^{*}7^{*}$

35

$abc = 5\ 7$

$\text{НОК}=5^{18}7^{16}$, НОД.

2)

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\quad 5^{18}7^{16}$ a $\quad x>1{,}5$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\quad$ c $\quad$ b $\quad$ и при этом

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2x^2-3x+5>0$

$2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-1)$

$(2x-3)(x+1) \ne 2x^2-3x+5$

I

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2-1 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \end{cases}$

II

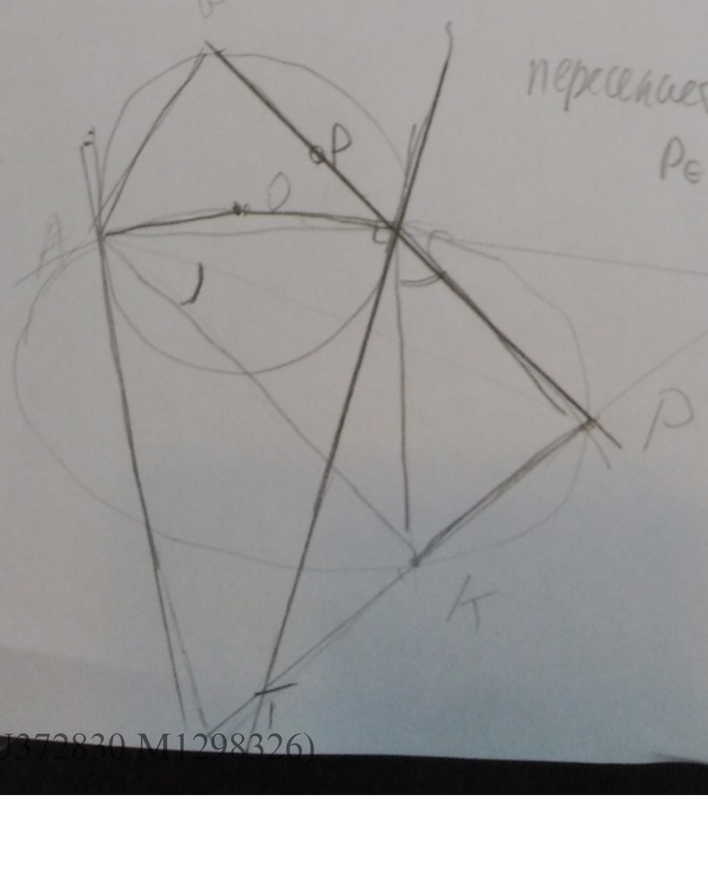
$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2-1 \end{cases}$

III

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{x+1}(2x^2-3x+5) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2-1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)=\log^2_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$

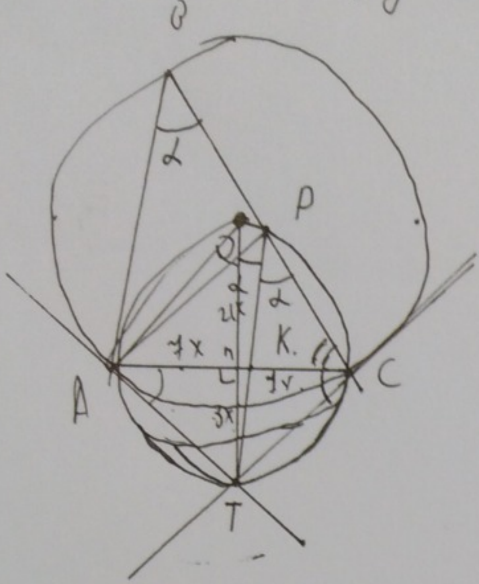
$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=$



пересекает отрезок $\Rightarrow$

$P\in[BC]$

Задача 6 Чистовик.



Дано △ABC.

окр $(O; r)$ ω описана около △ABC

TA и TC ⇒ кас-е к ω.

окр описанная около $AOC \cap BC = P$

$P \in [BC]$; $TP \cap AC = K$.

$S_{\triangle APK} = 12$

$S_{\triangle CPK} = 9$

Найти $S(ABC)$

AC при $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$.

1) $TA = TC$; как отрезки кас-х ⇒ $\angle TAC = \angle ACT = \alpha$.

2) $\angle TAC = \angle ABC$, как угол между касательной и хордой ⇒ $\angle ACT = \angle ABC$

3) APCT → вписанный т.к $\angle ATC = 180 - 2\alpha$; $\angle AOC = 2\alpha = \angle APC$;

$\angle PAT = \angle PCT =$ $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ ⇒ T ∈ окр описанной около AOC ⇒

⇒ APCT ∋ вписанный ⇒ $\angle APT = \angle ACT$; $\angle TPC = \angle TAC = \alpha$

4) $\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{AK}{KC}$ т.к у них общая высота. ⇒ $\frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$.

5) △CPK ∼ △CBA по трем углам $\angle CPK = \angle CBA$. $\angle BCA$ → общий ⇒ $\frac{S(ABC)}{S(KPC)} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \frac{49}{9}$

⇒ $S(ABC) = 49$.

$\boxed{\text{а) Ответ: 49}}$

б) ~~$TC \perp BC$, $TP \parallel AB$~~ } ⇒ из △PCT получим, что ∠α

Пусть $AC = 14x$.

M - середина AC ⇒ $\frac{TM}{MA} = \frac{3}{7}$ ⇒ $TM = 3x$.

$\frac{AM}{OM} = \frac{3}{7}$ ⇒ $OM = 21x$ ⇒ $AO^2 = \sqrt{441 + 49} = 490x^2$

⇒ $AO = 7\sqrt{10}\,x$

$AO = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 - \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$ ⇒ $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$7\sqrt{10}\,x = \frac{14x}{2\sin\alpha}$

$\frac{21x \cdot 7x}{2} = 12$ ⇒ $84x = 12$

$x = \frac{12}{84}$

$7\sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{58}} x = 14x$.

~~$x = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{58}}$~~

$AC = \frac{12 \cdot 14}{84}$.

Задача 5 Чистовик.

У нас три случая

I $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1 \end{cases}$

II $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 1 \end{cases}$

III $\begin{cases} \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5) - \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 1. \end{cases}$

I $\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) + \log_{x+1}(2x^2-3x+5) \cdot \log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = 4\log_{2x^2-3x+5}(x+1) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\ 4 - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1. \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)(2x^2-3x+5) = 4\log_{2x^2-3x+5}(x+1) \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \dfrac{\log_{\sqrt{2x-3}} x+1}{} \end{cases}$

$\begin{cases} \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) + \log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5) = \dfrac{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2}{\log^2_{\sqrt{2x-3}}(x+1)} \\ \end{cases}$

21104436 (U372830 M1298326)

Чистовик.

Задача 4. Чистовик.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \Rightarrow \text{все числа представимо в виде } 35\cdot5^x\cdot7^x \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16} \Rightarrow \text{у какого-то из чисел степень при } 5=18 \text{ и у какого-то степень при } 7=16 \end{cases}$$

~~но если~~ (в разложении на простые)

Пусть

$a=35\cdot5^m\cdot7^n$

$b=35\cdot5^p\cdot7^q$

$c=35\cdot5^t\cdot7^r$

если у всех трех ~~н~~ ва степени ≥ 1, то НОД $\neq 35$ => хоть у одного какая-то степень $=0$; если у всех трех степень при пятерке ≥ 2 или при семерке ≥ 1, то НОД $\neq 35$, т.к. $49>35$ $(125>35)$

Значит у одного из чисел при 7 степень (в нашем разложении) 0.

при этом $\left[\begin{array}{l} m=18-1 \\ p=18-1 \\ t=18-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n=16-1 \\ q=16-1 \\ r=16-1 \end{array}\right.$

т.е Нам нужно что одно из чисел при $7=0$ ($n;q$ или r) другое 15 третье меньше или равно 15. при 5 одно 17, одно 1 или 0. оставшееся ≤ 17.

Значит всего вариантов.

$3\cdot 1\cdot 15!\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 17! = \boxed{6\cdot 15!\cdot 17!}$