Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104399**

ID профиля: **372097**

Вариант 21

Чистовик

1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

d - разность

a_1 - первый член

$a_1, d \in \mathbb{Z}$.

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$S = 7a_1 + (1+2+3+\ldots+6)d = 7a_1 + \frac{1+6}{2} \cdot 6 \cdot d = 7a_1 + 21d$.

$16 \cdot 7 = 70 + 42 = 112$.

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$.

$a_1^2 + (23d - 7)a_1 + 112d^2 - 21d - 27 > 0$

$D = 529d^2 - 322d + 49 - \cancel{448}d^2 + 84d + 27 \cdot 4 =$

$= \cancel{81d^2 + 406d} + 81d^2 - 238d + \cancel{49} + 157$.

$23 \cdot 23 = 529$, $529 - 448 = 81$

$23 \cdot 14 = 322$, $322 + 84 = \cancel{406}$

$322 - 84 = 238$

$49 + 80 + 28 =$

$108 + 49 = 157$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$+$ $S + 60 > a_{11} \cdot a_{14}$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) + \cancel{S} + 60 > \cancel{S} + 27 + (a_1 + 10d)(a_1 + 13d)$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{23d}\ 112d^2 + 60 > 27 + \cancel{a_1^2} + \cancel{23d}a_1 + 130d^2$

$\cancel{-da_1 > 27 - 60 + 140d^2 - 112d^2}$

$\cancel{-da_1 > -33 + 28d^2}$.

$\cancel{28d^2 + da_1 - 33 < 0}$.

$\cancel{D = a_1^2 + 4 \cdot 33 \cdot 28}$

$\cancel{da_1 < 33 - 28d^2}$.

$60 - 27 > (130 - 112)d^2$.

$d^2 < \frac{33}{18}$, т.к. прогрессия возрастающая, то $d > 0 \Rightarrow d < \sqrt{\frac{33}{18}} = \sqrt{\frac{11}{6}}$, а т.к. $d \in \mathbb{Z}$, то $d = 1$, т.к. $\sqrt{\frac{11}{6}} < 2$.

1 ур.: $(a_1 + 7)(a_1 + 16) > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 112 - 48 > 0$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$.

$(a_1 + 8)^2 > 0$ ~~не вып~~ $\Rightarrow a_1 \neq -8$.

2 ур.: $(a_1 + 10)(a_1 + 13) < 7a_1 + 81$

$a_1^2 + 16a_1 + 130 - 81 < 0$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$.

1

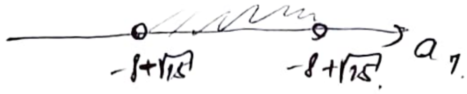
Чистовик.

1) $D = 256 - 49 \cdot 4 = 256 - 196 = 60.$

$$\begin{array}{r} -\,256 \\ 196 \\ \hline 60 \end{array}$$

$a_1 = \dfrac{-16 \pm \sqrt{60}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} a_1 = -8 + \sqrt{15} \\ a_1 = -8 - \sqrt{15} \end{array}\right.$



$-11 = -8 - \sqrt{9} > -8 - \sqrt{15} > -8 - 4 = -12$

2) ~~$a_1 = 11, 10, 9, 8$~~ $\varnothing$

$a_1 = -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5.$

$-5 < -8 + \sqrt{15}$ $\quad -4 > -8 + \sqrt{15}$

$3 < \sqrt{15}$ $\quad 4 > \sqrt{15}$

Ответ: $a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5.$

Чимович

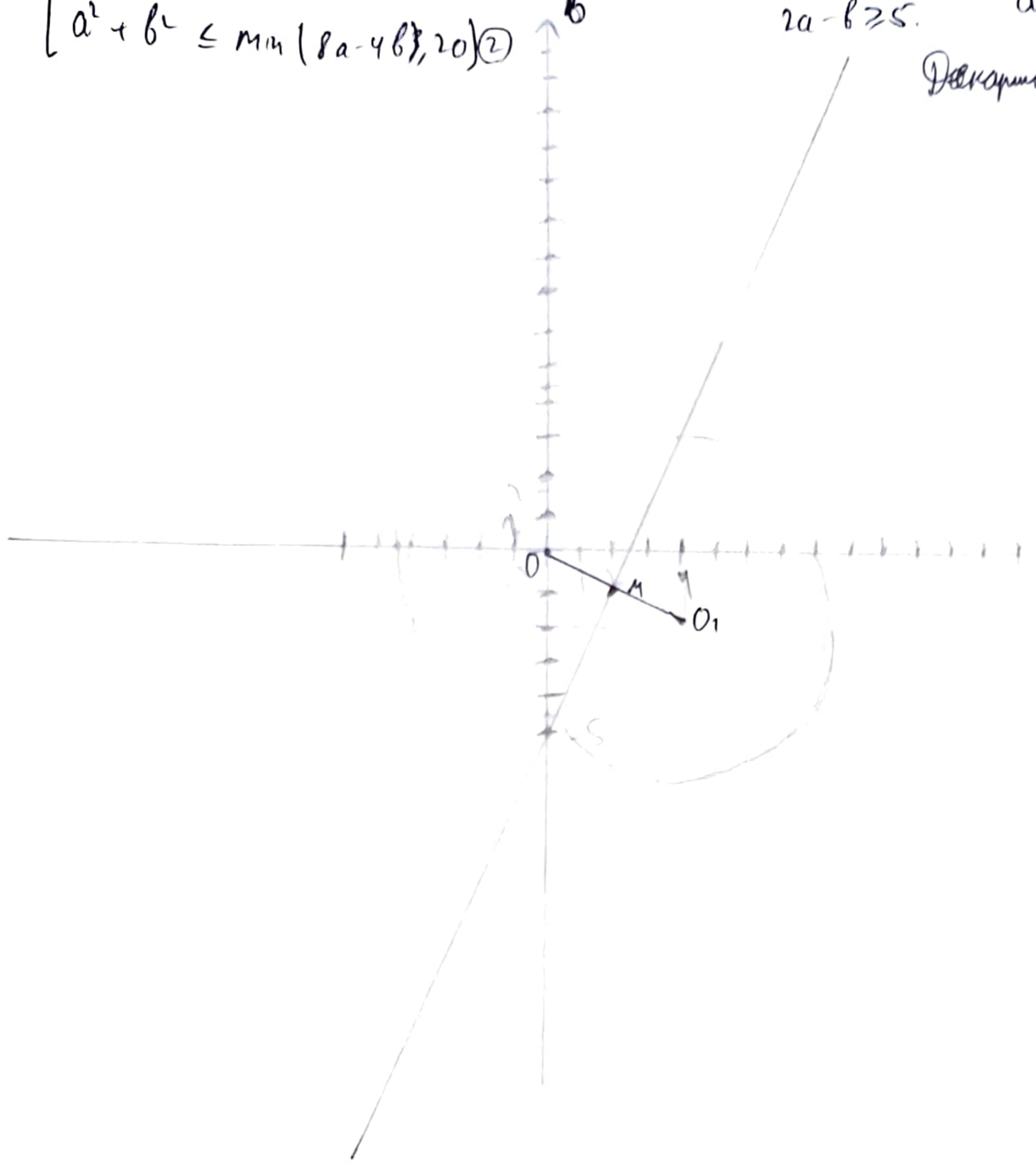
3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \quad (1)\\ a^2+b^2\le \min\{8a-4b;20\} \quad (2)\end{cases}$

$b\le 2a-5$

I сл. $8a-4b\ge 20$

$2a-b\ge 5$. $a^2+b^2\le 20$

Декартовые координаты аОв.



II сл.: $8a-4b\le 20$

$a^2+b^2\le 8a-4b$.

$a^2-8a+16-16+b^2+4b+4-4\le 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

окр-ть с центром в т. (4;-2).

Если мы проведём ~~отрезок~~ вектор OO_1 то его координаты $\{4;-2\}$ => координаты середины ~~этого~~ отрезка $(2;-1)$ подставляем в прямую $b=2a-5$. $-1=4-5$ $-1=-1$ - верно => середина отрезка OO_1 ~~а~~ лежит на прямой $b=2a-5$. Посчитаем скалярное произв-е ~~отрезк~~ векторов $\vec{AB}\{3;6\}$ и $\vec{OM}\{+2;-1\}$ $=3\cdot 2-1\cdot 6=0$ => $\vec{AB}\perp\vec{OM}$ => $OO_1\perp AB$ => окр-ти O и O_1 симметричны относительно прямой $b=2a-5$.

3

$(x-a)^2=(a-x)^2$ Переформулируем задачу. Нам нужно найти все пары чисел

$(y-b)^2=(b-y)^2$ x и y, такие, что $(a-x)^2+(b-y)^2\le 20$ (1) имело с графиком (2) хотя бы одно решен

~~Найдём все пары числа x, y такие, что ① касается ②. Если~~

Нам нужны все такие x, y, что:

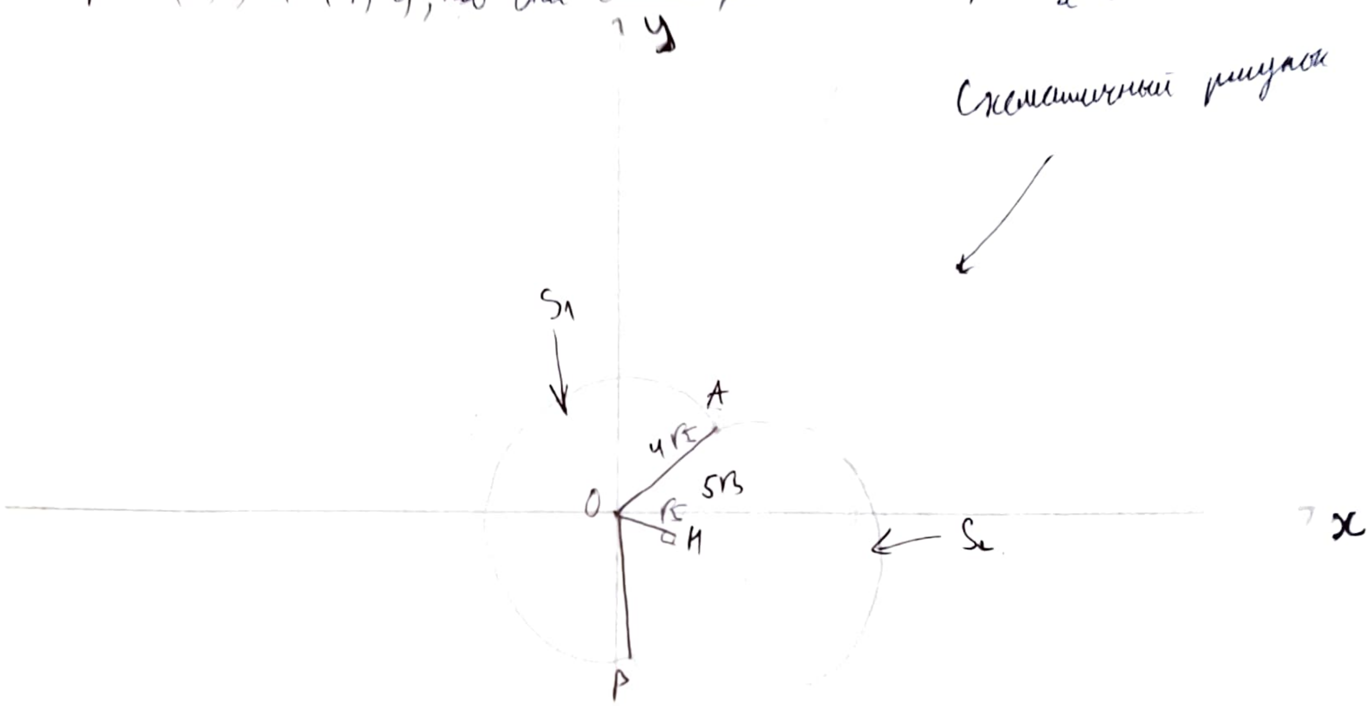
$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 80 \\ (x-4)^2+(y+2)^2 \le 80 = (2\sqrt{20})^2 \end{cases}$$

— это условие для всех чисел x и y, при которых график ① имеет хотя бы одну общую точку с $a^2+b^2 \le 20$. (т.к. макс. расст. от точки (x,y) до центра корд. $\le 2\sqrt{5}$)

Аналогичное условие для ① и $(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$.

Как мы ранее доказывали, если две окр-ти с одинаковым радиусом имеют центры $(0;0)$ и $(4;-2)$, то они симметричны относ. прямой $y = 2x-5$.

Схематичный рисунок



S всей фигуры $= S_1 + S_2$, причём $S_1 = S_2$

$\Rightarrow$ Нужно найти S_1.

$y - 2x + 5 = 0$

расст. от $(0;0)$ до прямой $y = 2x-5$: $\rho = \dfrac{|-2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 5|}{\sqrt{1+2^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, а

R окр-ти $= 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$. $AH = \sqrt{80-5} = 5\sqrt{3} \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$.

по Т. Cos: $\cos\angle AOB = \dfrac{2\cdot 80 - 300}{2\cdot 80} = -\dfrac{140}{160} = -\dfrac{7}{8}$. S сектора $AOB = \dfrac{\arccos(-\frac{7}{8})}{2\pi}\cdot \pi \cdot 80 = 40\cdot\arccos(-\frac{7}{8})$

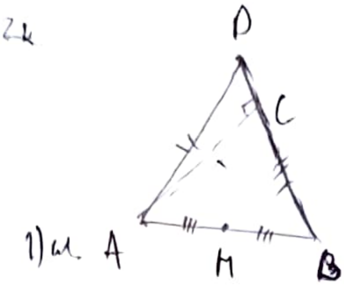
Посчитаем $S_{\triangle AOB} = \sqrt{5}\cdot 10\sqrt{3}\cdot \frac{1}{2} = 5\sqrt{15}$.

Ответ: 4

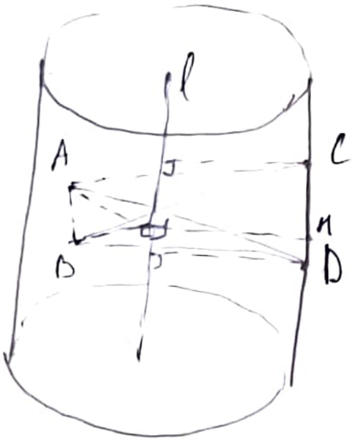
$S = 2\cdot S_1 = 2(\pi R^2 - (S_{сект} - S_{\triangle AOB})) = 2(\pi\cdot 80 - 40\cdot\arccos(-\frac{7}{8}) + 5\sqrt{15}) = \boxed{10(16\pi - 8\arccos(-\frac{7}{8}) + \sqrt{15})}$.

Чистовик

2)



$AB = 4$
$AC = BC = 5$
$AD = BD = 6$ } $\Rightarrow$ DCH лежат в одной плоскости $\perp$ прямой AB.



$CD \parallel l$.

Если провести плоск. α ч/з т. AB, такую, что $\alpha \perp l \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha \perp CD$, то l будет проходить ч/з центр опис. окр-ти $\triangle ABH$

$$2R = \frac{AB - const}{\sin\angle AHB}$$, R - наименьший $\Rightarrow$ $\sin\angle AHB$ - наиб.

Пусть $\angle AHB = \beta$ и $\sin\beta = 1 \Rightarrow$ R - наим. Найдём такое CD, при котором $\angle AHB = 90°$.

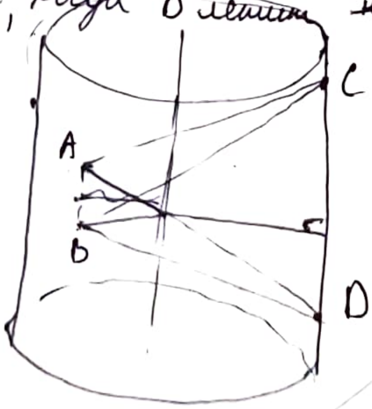
т.к. $AH = HB$ $(\triangle ACD = \triangle BCD)$, то $AH = HB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Найдём CD : CH + HD

$$CH = \sqrt{25-8} + \sqrt{36-8} = \sqrt{17} + \sqrt{28}.$$

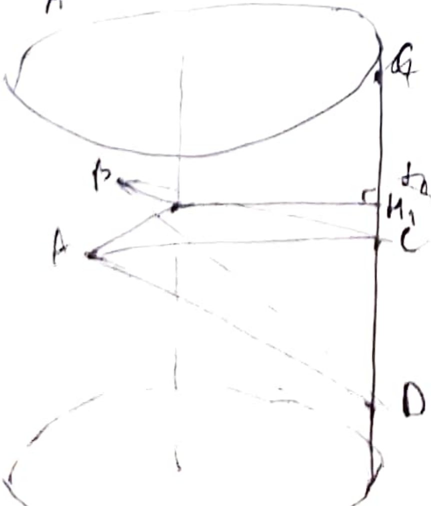
Теперь рассм. случай, когда проекция D лежит ~~не на $\triangle ABC$~~ дальше точки C на $\triangle ABC$ (все прочие т. D лежат на сер. пер. $\triangle ABC$ и ABD) также проводим плоск. $\alpha_1 \perp l$ ч/з т. A и B.

2 сл.



1 сл.: D' лежит ближе к AB, чем C.

2 сл.: D' - ~~дальше~~ дальше, чем C.



R наим. при $\angle AH_1B = 90° \Rightarrow BH_1 = AH_1 = 2\sqrt{2}$

Находим $CD = DH_1 - CH_1 = \sqrt{36-8} - \sqrt{25-8} = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$; $\sqrt{28} - \sqrt{17}$

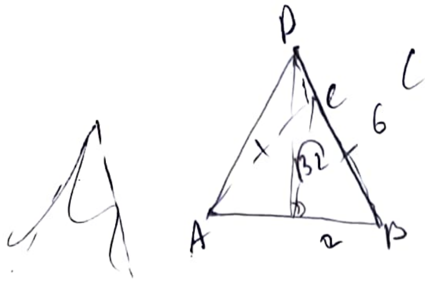
5.

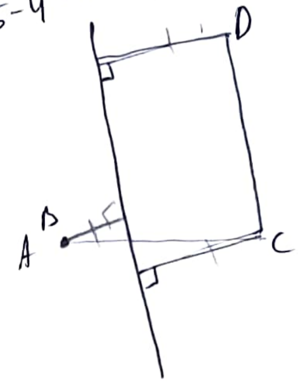
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 = 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20). \end{cases}$$

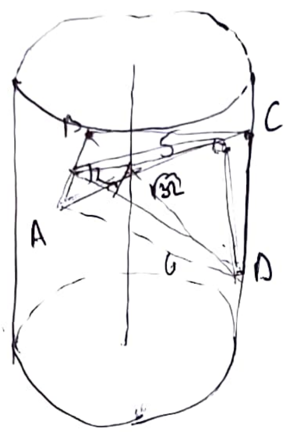
$$d = \frac{-a_1 \pm 4\sqrt{a_1^2+4\cdot 337}}{56}.$$

$$p = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{0+0+2}{1} = 2.$$

$CH = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$. $\cos L =$



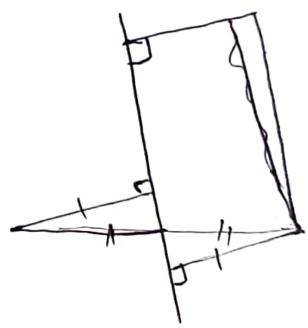




$$\frac{h}{\sqrt{32}} = \sin L$$

$$\sin L = \frac{h'}{\text{ик}}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{\sqrt{32}}{\text{ик.}}$$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104399**

ID профиля: **372097**

Вариант 21

Чистовик

4) $a, b, c \vdots 35$

$НОК(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$ т.к. НОК этих чисел не содержит других множит., кроме 5 и 7, то числа a, b, c можно представить как $\begin{cases} a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2} \\ b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2} \\ c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2} \end{cases}$, т.

т.к. $НОД(a,b,c) = 35$, то $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 1$. Если $a_2, b_2, c_2 \geq 2$, то

(или два)

$НОД(a,b,c) \vdots 49$ - неверно $\Rightarrow$ одно из чисел a_2 или b_2 или $c_2 = 1$. аналогично одно из $a_1, b_1, c_1 = 1$.

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ Переформулируем задачу: нужно найти кол-во наборов
$b = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$ $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \beta_1; \beta_2; \beta_3)$, таких, что $\exists$ один из $\alpha_i = 1$, другой
$c = 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$ $\alpha_j^2 = 18$. Аналогично один из $\beta_i = 1$, другой $\beta_j = 16$.

Посчитаем для α 1) Пусть $\alpha_1 = 1$, а $\alpha_2 = 18$. Тогда кол-во способов выбрать $\alpha_3 = 18$. 2) Теперь пусть $\alpha_3 = 18$, тогда как выбрать α_2 можно 18 спос. $18 + 18 = 36$
Вычитаем одну пару $(1; 18; 18)$ = 35 спос - при $\alpha_1 = 1$.

3) При $\alpha_2 = 1$ $\alpha_1 = 18$ - 18 спос. ~~вычитаем~~ вычит. $(1; 1; 18)$

?
1
18

4) при $\alpha_3 = 18$ - 18 спос - вычитаем $(1; 1; 18)$. $35 + 35 = 70$

?
1
18

5) При $\alpha_3 = 1$ $\alpha_1 = 18$ - вычит. $(18; 1; 1)$

18
?
1

6) При $\alpha_3 = 1$
$\alpha_2 = 18$ - 18 спос - вычит. $(1; 18; 1)$ и $(18; 18; 1)$

1
18
1

Всего пар, состоящих только из 18 и 1 = 3 + 3 = 6.
В каждом случае мы считаем по 2 такие пары $\Rightarrow$ всего мы посчитали 12 $\Rightarrow$ из общего кол-ва нужно вычесть 6.

Общее кол-во = 18 · 6 = 108.
108 − 6 = 102

18 · кол-во случаев
а кол-во случ. = 3 · 2 = 6.

1

Чистовик

4) Аналогичные рассуждения для β: Общее кол-во $= 16 \cdot 6$.

Вычитаем 6 $\Rightarrow 16 \cdot 6 - 6 = 15 \cdot 6 = 90$.

Если мы возьмём любую тройку из α и любую тройку из β, то получим удовл. условию числа a, в, с. $\Rightarrow$ Всего случаев $102 \cdot 90 = 9180$.

~~Вкаждом из пар α~~ случаев для ~~мы считали две особые~~

Ответ: 9180.

Чистовик.

5) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$.

все x, при кот. некоторые 2 числа равны, а другое меньше на 1.

$x > \frac{3}{2}$

$2x-3>0$

$x \neq 2$

$x > -1$

$2x^2-3x+4 \neq 0$

$2x^2-3x+5>0$

$(x+1)(x+\frac{5}{2})>0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>-1 \\ x<-2{,}5 \end{array}\right. \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x>-1 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{3}{2},\ x \neq 2$$

$D = 9-4\cdot 8<0$

① $= 2\log_{2x-3}(x+1)$

② $= 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_t(x+1) = \dfrac{1}{\log_t 2x^2-3x+5}$

т.к. $2x^2-3x+5 \neq 1$

$\log_t(x+1)\cdot(\log_t(x+1)+\log_t(2x+5)) = 1$

$a^2+ab-1=0$

②·①: $4(\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\cdot\log_{(2x-3)}(x+1)) = \dfrac{4\log_{2x-3}(x+1)}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)} =$

$= 4\cdot\log_{2x^2-3x+5}(x+1) = \dfrac{4}{③}$

① $= a$

② $= b$

③ $= c$.

$a\cdot b = \dfrac{4}{c}$

Если $a=c$ или $b=c$, то

$b = \dfrac{4}{a^2}$ или $a = \dfrac{4}{b^2}$.

$a=c$

$b=\frac{4}{a^2}$

$b=a-1$

$\frac{4}{a^2}=a-1$

$a^3-a^2-4=0$

$a=2$:

$8-4-4=0$

$(a-2)(\underbrace{a^2+a+2}_{\neq 0})=0$

$\Rightarrow a=2$

$x=4$

$b=c$

$a=\frac{4}{b^2}$

$a=b-1$

$\frac{4}{b^2}=b-1$

$b^3-b^2-4=0$

$b=2$

$(b-2)(\underbrace{b^2+b+2}_{\neq 0})=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=2$

③

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$

$x+1=2x-3$

$x=4$

③ $=2$

$2x^2-3x+5 = x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0$ $(x-1)(x-4)=0$

Чистовик.

Если $b=c=2$: как мы знаем, $c=2$, при $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\log_{2x^2-3x+5}(7x-3)^2 = (2x^2-3x+5)^2$

$4x^4$ Подходит ли $x=4$?:

$\log_{25} 5^2 = 1$ - нет. ⊗

Подходит ли $x=1$?: нет т.к. $1<\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ случай $b=c=2$ - невозможен

$\log_4 1^2 = 0$ ⊗.

Если $a=b$:

$a^2 = \frac{4}{c}$ $\quad c = \frac{4}{a^2}$ $\left.\begin{array}{l} \\ \\ c=a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2$, но если $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$, то $x=4$, но при $x=4$ $b = \log_{32-12+5}(8-3)^2 = \log_{25} 25 = 1 \neq 2. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ случ. $a=b$ - невозможен $\Rightarrow$ единств. возм. случай: $x=4$

Ответ: $x=4$

Получается, что в случае $\left[\begin{array}{l} a=c \\ b=c \end{array}\right.$ $c=2$ - это возможно при $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$, но $x=1$ - не подх., т.к. $x>\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ только при $x=4$.

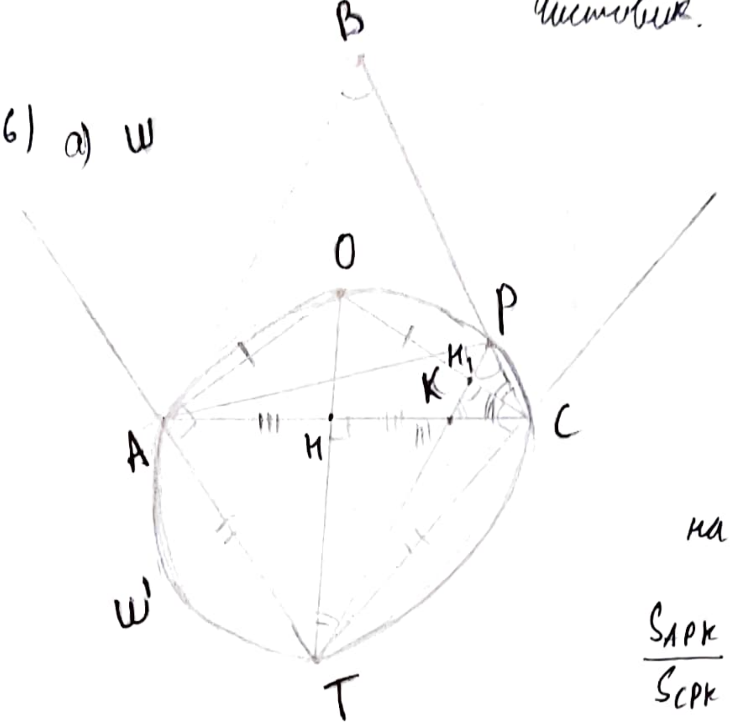
при $x=4$ $\quad a=2$, $b=1$ $\Rightarrow$ подх. случай $a=c$, а сл. $b=c$ - не подх.

Во сл. случае $a=b$ получается $c=\frac{4}{a^2}$ $c=a-1$ $\Rightarrow$ $a=2$, но $a=2$ только при $x=4$, при котором $b=1$ $\Rightarrow$ не подх. Итого возможен лишь случай $a=c$, лишь при $x=4$

Ответ: $x=4$

Чистовик.

6) а) ω



$S_{\triangle APK} = 12$

$S_{\triangle CPK} = 9$

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

т.к. AT, CT – касат. к ω, то $AO \perp AT$, и $CO \perp CT \Rightarrow AOCT$ – впис. $\Rightarrow$ т. T лежит на окр-ти ω'

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h\cdot AK}{\frac{1}{2}\cdot h\cdot CK} = \frac{12}{9} \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{4}{3}.$$

$AK = 4x$

$CK = 3x$.

~~По Th об отрезках пересек. хорд: $PK\cdot TK = AK\cdot CK = 12x^2$.~~

Пусть $\angle APC = 2\alpha = \angle AOC$. Тогда $\angle ABC = \alpha$, т.к. он впис. в ω.

$AT = CT$ как касат. из одной точки $\Rightarrow \angle APT = \angle CPT$, как впис. углы, опир. на равные хорды $\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \angle ABC = \alpha \Rightarrow PT \parallel AB$. $\boxed{\triangle AOT = \triangle COT \Rightarrow AHC \text{ – симметр. относ. } OT \Rightarrow AC \perp OT}$

Заметим, что $AO = CO$ как радиусы $\Rightarrow \angle ACO = \angle OCP$, но $\angle OTP = \angle OCP$ как впис. на одной хорде. В $\triangle THK$: $\angle TKH = 90^\circ - \angle HTP = 90^\circ - \angle OCH$, но $\angle TKH = \angle CKP$ ~~как верт~~ $\Rightarrow CO$ – бис-са и высота $\Rightarrow \triangle CKP$ – р/б $\Rightarrow CK = CP$. А т.к. $TP \parallel AB$, то $\triangle ACB$ – р/б $AC = CB$. $CK = CP = 3x$. $AC = 7x$.

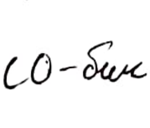
$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}\cdot \sin\angle ACP \cdot 7x \cdot 3x = 21$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot \sin\angle ACP \cdot 7x \cdot 7x = y$$

$\frac{y}{21} = \frac{7}{3}$

$y = 49$. Ответ: 49

в) $\angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7} = \alpha$



$49 + 9 = 58$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$, $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$ $\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\cdot\frac{3\cdot 7}{58} = \frac{3\cdot 7}{29} = \frac{21}{29}$.

$S_{\triangle CPK} = \cancel{\frac{1}{2}\cdot CH_1\cdot PK}\ \frac{1}{2}\cdot \sin(180 - 2\alpha)\cdot CP^2 = \frac{9x^2}{2}\cdot \sin 2\alpha = \frac{21\cdot 9}{29\cdot 2}\cdot x^2 = 9$

$x^2 = \frac{2\cdot 29}{21} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{58}{21}}$ $AC = 7\cdot x = 7\sqrt{\frac{58}{21}} = \sqrt{\frac{58\cdot 7}{3}} = \sqrt{\frac{406}{3}}$

$58 \times 7 = 406$

Ответ: $\sqrt{\frac{406}{3}}$

Черновик.

a, b, c

$$a \cdot b = \frac{2\log_{2x-5}(x+1)}{\frac{1}{2}\log_{2x-5}(2x^2-3x+5)} = 4 \cdot \log_{(2x^2-3x+5)}(x+1) = \frac{4}{c}$$

$$a \cdot b = \frac{4}{c}$$

$$b = \frac{4}{c^2}$$

$$b = c-1$$

$$c^3 - c^2 - 4 = 0.$$

$$(c-2)(c^2+c+2) = 0$$

$$1-8<0.$$

$c=2$ — когда $c \overset{?}{=} 2$?

~~когда $a=2$?~~

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2.$$

$$2x^2-3x+5 = x^2+2x+1.$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0.$$

при $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4, \end{array}\right.$ но $x > \frac{3}{2} \Rightarrow$ только при $x=4$

$a = 5 \cdot 7^{\alpha}$

$b = 5 \cdot 7^{\beta}$

$c = 5 \cdot 7^{\gamma}$

$- 18^3 \cdot 17^3 - 16^3 \cdot 19^3 +$