Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104358**

ID профиля: **855905**

Вариант 21

Чистовик

Вариант №21

1. $S=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)\cdot 7$

$a_8\cdot a_{17}=(a_1+7d)(a_1+16d)$

$a_{11}\cdot a_{14}=(a_1+10d)(a_1+13d)$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+7a_1d+16a_1d+112d^2>(a_1+3d)\cdot 7+27 \\ a_1^2+10a_1d+13a_1d+130d^2<(a_1+3d)\cdot 7+60 \end{cases}$

$+\begin{cases} a_1^2+7a_1d+16a_1d+112d^2>(a_1+3d)\cdot 7+27 \\ (a_1+3d)\cdot 7+60>a_1^2+23a_1d+130d^2 \end{cases}$

$(a_1+3d)\cdot 7+a_1^2+7a_1d+16a_1d+112d^2+60>(a_1+3d)\cdot 7+a_1^2+23a_1d+130d^2+27$

$112d^2+60>130d^2+27$

$0<18d^2<33$

т.к. $d>0 \Rightarrow$ d - целое

$\exists d=1$ $18d^2<33$

$18<33$ - Истина $\Rightarrow$ $0<d<2$

$\Downarrow$

$d=1$

$\exists d=2$ $18d^2<33$

$18\cdot 4<33$ - Ложно

$112-48=64$

$S=(a_1+3)\cdot 7$

$a_8\cdot a_{17}=(a_1+7)(a_1+16)$

$a_{11}\cdot a_{14}=(a_1+10)(a_1+13)$ $\Rightarrow$

1) $27+21+7a_1<a_1^2+23a_1+112$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0$ $\boxed{a_1\neq -8}$

2) $60+21+7a_1>a_1^2+23a_1+130$

$a_1^2+16a_1+130-81<0$

$a_1^2+16a_1+49<0$

$D=256-4\cdot 49=60$

$\frac{-16-\sqrt{60}}{2}<a_1<\frac{-16+\sqrt{60}}{2}$ т.к. a_1 - целое

$-8-\sqrt{15}<a_1<-8+\sqrt{15}$ $\Rightarrow$ $\boxed{-11\leq a_1\leq -5}$

$-12 < -8-\sqrt{15}$, $-8+\sqrt{15} < -4$

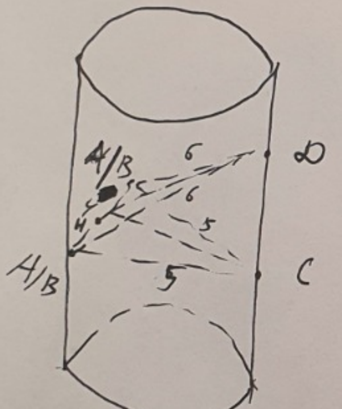
$a_1\neq -8$

Ответ: $-11\leq a_1\leq -5$; $a_1\neq -8$

Чистовик Вариант №21

② Заметим, что т.к. $CD \parallel$ оси $\Rightarrow$ ~~min R достигается~~ ~~тогда, когда плоскость одного из △ ABC или ABD с~~

Если рассмотреть плоскости $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, то та из них, которая составляет меньший $\angle$ с плоскостью ближайшего основания, ~~то~~ будет содержать $\triangle$ влияющий на R основания (чем меньше R опис. окр. $\triangle$, тем меньше R цил.) $\Rightarrow$ для $\min R$ плоскость $\triangle ABC$ должна составлять с плоск. ближайшего основания $\angle$ меньше, чем $\angle$ между плоскостью $\triangle ABD$ и плоскостью её ближайшего основания.



Заметим, что дальше чертежи будут одинаковыми с точностью до симметрии и расположение A и B ни на что не влияет.

1) H – сер. $AB \Rightarrow DH$ и CH – высоты и медианы в $\triangle ABD$ и $\triangle ACB$ по св-ву р/б $\triangle$

По т. Пифагора в $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$

2) $DH = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$; $CH = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

Заметим, что $\angle DHC$ может принимать любые значения $> 0°$ и $< 180°$

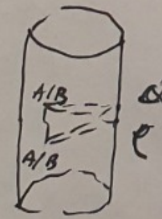
Распишем нер-во ~~правило~~ $\triangle$!

$DC + 4\sqrt{2} > \sqrt{21}$ – и ($\sqrt{21} < 4\sqrt{2}$) $\quad \sqrt{21} < 4\sqrt{2} \ |^2 \Leftrightarrow 21 < 32$

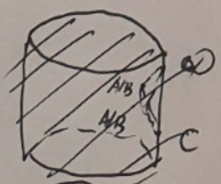
$DC + \sqrt{21} > 4\sqrt{2}$

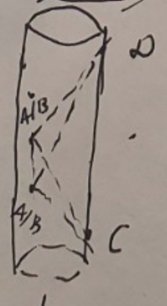
$DC < 4\sqrt{2} + \sqrt{21}$

$4\sqrt{2} - \sqrt{21} < DC < 4\sqrt{2} + \sqrt{21}$



$\angle DHC$ – острый





$\angle DHC$ – тупой

Ответ: ~~$4\sqrt{2}-\sqrt{21} < DC < 4\sqrt{2}+\sqrt{21}$~~

$4\sqrt{2} - \sqrt{21} < CD < 4\sqrt{2} + \sqrt{21}$

21104358 (U855905 M1301668)

(3)

Чистовик

Вариант №21

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20) \quad (2) \end{cases}$$

Нарисуем область удовлетворяющую второму ~~ур-в~~ нер-ву

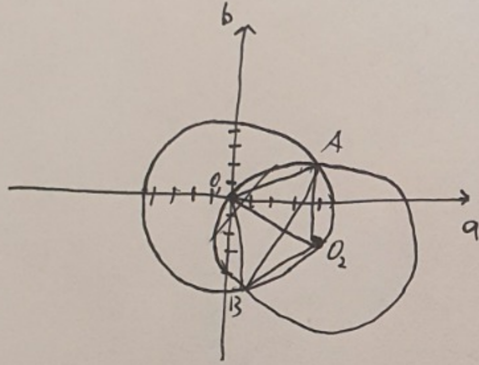
(2):

$a^2+b^2 \le 20$ $\quad$ $a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

— Это 2 окружности с $R_1=\sqrt{20}=R_2$ и центрами в (·) $\{0;0\}$ и $\{4;-2\}$



С уч. условия задачи ($a^2+b^2 \le \min(8a-4b;20)$)

Нам подходит только область пересечения этих окружностей

1) проведём AB и O_1O_2 ~~[illegible]~~ ; $O_1O_2 \perp AB$

более того $O_1O_2 = O_1A = O_2A = O_1B = O_2B = \sqrt{20} \Rightarrow O_1AO_2B$ - ромб с острым $\angle = 60° \Rightarrow AB$ выразим из т. cos в $\triangle$ O_1AB

$AB^2 = (\sqrt{20})^2+(\sqrt{20})^2 - 2\cdot(\sqrt{20})^2\cdot\underbrace{(-\tfrac{1}{2})}_{\cos 120°} \Rightarrow AB^2 = 60$

$AB = \sqrt{60}$

2) Заметим, что все (·) лежащие на пересечении исходных окружностей (O_1 с $R_1=\sqrt{20}$ и O_2 с $R_2=\sqrt{20}$) ~~[illegible]~~ будут центрами окружностей для первого уравнения $\Rightarrow$ для всех этих a и b у нас получится эллипс с параметрами $AB + 2\sqrt{20}$ и $O_1O_2 + 2\sqrt{20}$ $\Rightarrow$ Высота и ширина эллипса равны $\sqrt{60}+2\sqrt{20}$ ~~и~~ и $\sqrt{20}+2\sqrt{20}$ или $\sqrt{20}(\sqrt{3}+2)$ и $3\sqrt{20}$

Осталось только найти S этого эллипса

Ответ: ~~[illegible]~~ не вспомнил формулу S эллипса.

Черновик

$$\begin{cases} 4\sqrt{2}+\sqrt{21} > x \\ 4\sqrt{2}+x > \sqrt{21} \\ \sqrt{21}+x > 4\sqrt{2} \end{cases}$$!

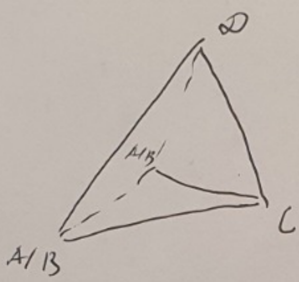
$\sqrt{21} < 4\sqrt{2}$

$21 < 32$

$\sqrt{32}$ $\sqrt{21}$

$4\sqrt{2}$ $\sqrt{21}$

$4\sqrt{2}+\sqrt{21} > x > 4\sqrt{2}-\sqrt{21}$



22
·4,5
4,5
225
180
20,25

16
·7
112

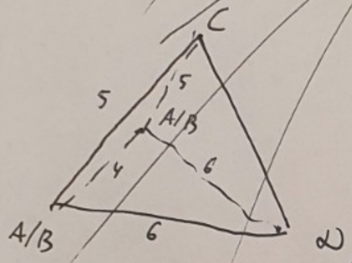
-8 >

(4)

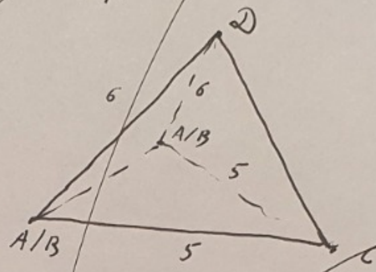
② Черновик

Заметим, что т.к. CD || оси => у нас есть 2 принципиально разных расположения тетраэдра: когда C ближе к вершине конуса(1) и когда D ближе к вершине конуса(2).

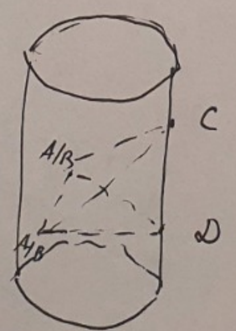
(1):



(2):



Очевидно, что надо рассмотреть Δ, которые лежат как можно ближе к основанию (1 из Δ ABC и Δ ABD). Чем меньше радиус описанной около этого Δ окружности, тем меньше будет радиус



Черновик

$$\frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7$$

$$(a_1+3d)\cdot 7 + 27 < (a_1+7d)(a_1+16d)$$

$$(a_1+3d)\cdot 7 + 60 > (a_1+10d)(a_1+13d)$$

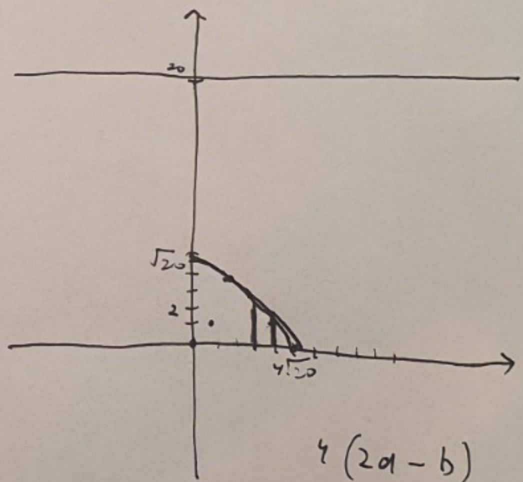
$$7a_1 + 21d + 27 < a_1^2 + 16a_1d + 7a_1d + 112d^2$$

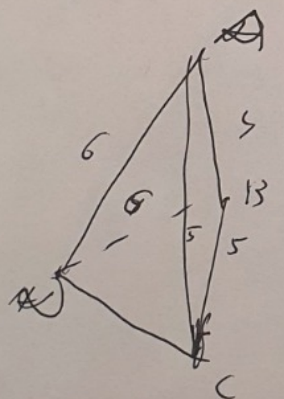
$$7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 13a_1d + 10a_1d + 130d^2$$

$$27 + 130d^2 < 60 + 112d^2$$

$$28d^2 < 33$$

$$\boxed{d = 1 \quad !}$$





$4(2a-b)$

$b \geq 2a$

0 0, 1 1, 2, 3, 4 — 1: 1, 2, 3, 4, 5 — 2: 1, 2, 3, 4, 5

3 2: 0 0, 0 1, 1 0, 1 1

$a^2 + b^2 \leq 8a - 4b$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \leq 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \leq 20$

3: 0, 1, 2, 3, 4, 5 — 4: 0, 1, 2, 3, 4, 5 — 5: 0, 1, 2, 3, 4, 5

$2a - b = 5 \quad b = 2a - 5$

$a^2 + b^2 = 20$

$a^2 + 4a^2 - 20a + 25 = 20$

$5a^2 - 20a + 5 = 0$

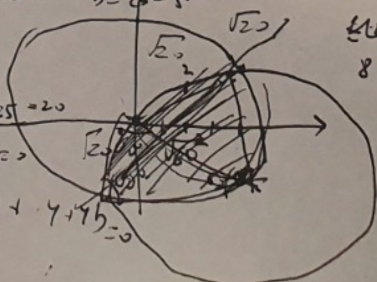
$a^2 - 4a + 1 = 0$

$16 - 8a + 4 + 4b = 0$

$8 \leq 8$

$\sqrt{60} + 2\sqrt{20}$

$3\sqrt{20}$



$x^2 = 20 + 20 + 2\cdot 20 \cdot \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{60}$

6

21104358 (U855905 M1301668)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104358**

ID профиля: **855905**

Вариант 21

Чистовик Вариант №21

4

$НОД(a;b;c)=35 \Rightarrow a=35\cdot a_1 \quad b=35\cdot b_1 \quad c=35\cdot c_1$, где $НОД(a_1;b_1;c_1)=1$

$НОК(a;b;c)=35\cdot a_1\cdot b_1\cdot c_1=5^{18}\cdot 7^{16}$

$a_1\cdot b_1\cdot c_1=5^{17}\cdot 7^{15}$

Заметим, что $a_1;b_1;c_1$ не могут одновременно делиться на 7 или на 5 $\Rightarrow$ всегда только 2 из этих чисел $\vdots 7$ и только 2 $\vdots 5$

$\exists\ a_1$ и $b_1 \vdots 7$ и $\vdots 5$

Кол-во вариантов:

18 вариантов распределить 5 между a_1 и b_1 и 16 вар-тов для семёрок.

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 & b_1 \\ 5^{17}7^{15} & 5^0 7^0 \\ 5^{16}7^{15} & 5^1 7^0 \\ \dots & \\ 5^0 7^0 & 5^{17}7^{15} \end{array}\right\} 18\cdot 16 \text{ вариантов } (1)$$

$\exists\ a_1$ и $b_1 \vdots 7 \quad a_1$ и $c_1 \vdots 5$

Гомутрая ан-но получим $18\cdot 16$ вариантов (2)

$\exists\ a_1$ и $b_1 \vdots 7 \quad b_1$ и $c_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (3)

$\exists\ a_1$ и $c_1 \vdots 7 \quad a_1$ и $b_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (4)

$\exists\ a_1$ и $c_1 \vdots 7 \quad a_1$ и $c_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (5)

$\exists\ a_1$ и $c_1 \vdots 7 \quad b_1$ и $c_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (6)

$\exists\ b_1$ и $c_1 \vdots 7 \quad a_1$ и $b_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (7)

$\exists\ b_1$ и $c_1 \vdots 7 \quad a_1$ и $c_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (8)

$\exists\ b_1$ и $c_1 \vdots 7 \quad b_1$ и $c_1 \vdots 5$

$18\cdot 16$ вар-тов (9)

Сложим (1); (2); ... (9).

Всего вариантов: $9\cdot 18\cdot 16=2592$

Ответ: 2592 ~~вар~~ тройки

1

21104358 (U855905 M1301669)

(5) Чистовик Вариант №21

Симметрия 3 возможных равенства логарифмов

$\exists\ 2x-3=a;\ x+1=b;\ 2x^2-3x+5=c$

$\log_{\sqrt{a}} b;\ \log_c a^2\ \ \log_b c$

ОДЗ
$\begin{cases} x>-1 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$

$2x^2-3x+5>0$
$D=9-40<0$
$a=2$; всегда выполняется

$\boxed{\begin{matrix} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{matrix}}$ $\Leftarrow$

ОДЗ
$\boxed{\begin{matrix} x>\frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{matrix}}$

1) $\exists\ \log_{\sqrt{a}} b=\log_c a^2 \Rightarrow 2\log_c a-1=\log_b c\ (1)$

$2\log_a b=2\log_c a$

$b=a^{\log_c a}\rightarrow(1)$

$2\log_c a-1=\frac{1}{\log_c a}\cdot\log_a c \,\Big|\cdot\log_c^2 a$, $\log_a c=\frac{1}{\log_c a}$

$2\log_c^3 a-\log_c^2 a=1$

$\exists\ \log_c a=u$

$2u^3-u^2-1=0$

$2u^3-2u^2+u^2-1=0$

$(u-1)(2u^2+u+1)=0$

$u=1$ $\quad$ $D<0$, $a=2$ р. нет

$\log_c a=1$

$a=c$

$2x-3=2x^2-3x+5$

$2x^2-5x+8=0$

$D<0$, $a=2$ | р. нет

~~2) $\exists\ \log_{\sqrt{a}} b=\log_b c\Rightarrow\log_b c=\log_c a^2+1\ (2)$~~

~~$2\log_a b=\log_b c$~~

2) $\exists\ \log_{\sqrt{a}} b=\log_b c\Rightarrow\log_{\sqrt{a}} b-1=2\log_c a\ (2)$

$2\log_a b=\log_b c$

$c=b^{2\log_a b}\rightarrow(2)$

$2\log_a b-1=2\log_b^{2\log_a b}$

$2\log_a b-1=\frac{2}{2\log_a b}\log_b a\ (*)$, $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$

$\exists\ \log_a b=u$

$(*)\,|\cdot u^2$

$2u^3-u^2=1$

$2u^3-2u^2+u^2-1=0$

$(u-1)(2u^2+u+1)=0$

$u=1$ $\quad$ $D<0$, $a=2$ | р. нет

$\log_a b=1$

$a=b$

$2x-3=x+1$

$\boxed{x=4}$

3) ~~$2\log_c a$~~ $\log_c a^2 = \log_b c \Rightarrow \log_b c - 1 = \log_{\sqrt{a}} b$ (3)

$2\log_c a = \log_b c$

$\log_{c^{\frac{1}{2}}} a = \log_b c$

$a = c^{\frac{\log_b c}{2}} \to (3)$

$\log_b c - 1 = \log_{c^{\frac{\log_b c}{4}}} b$

$\log_b c - 1 = \frac{4}{\log_b c} \cdot \log_c b$

$\log_b c - 1 = \frac{4}{\log_b c} \cdot \frac{1}{\log_b c} \quad \Big| \cdot \log_b^2 c$

$]\ \log_b c = u$

$u^3 - u^2 = 4$

$u^3 - 2u^2 + u^2 - 4 = 0$

$(u-2)(u^2+u+2) = 0$

$u = 2 \qquad \begin{matrix} D<0 \\ a=1 \end{matrix}$ п.нет

$\log_b c = 2$

$c = b^2$

$2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-4)(x-1) = 0$

$\boxed{x=4}$ $x=1$ – не ~~уд~~ ОДЗ

Ответ: $x=4$

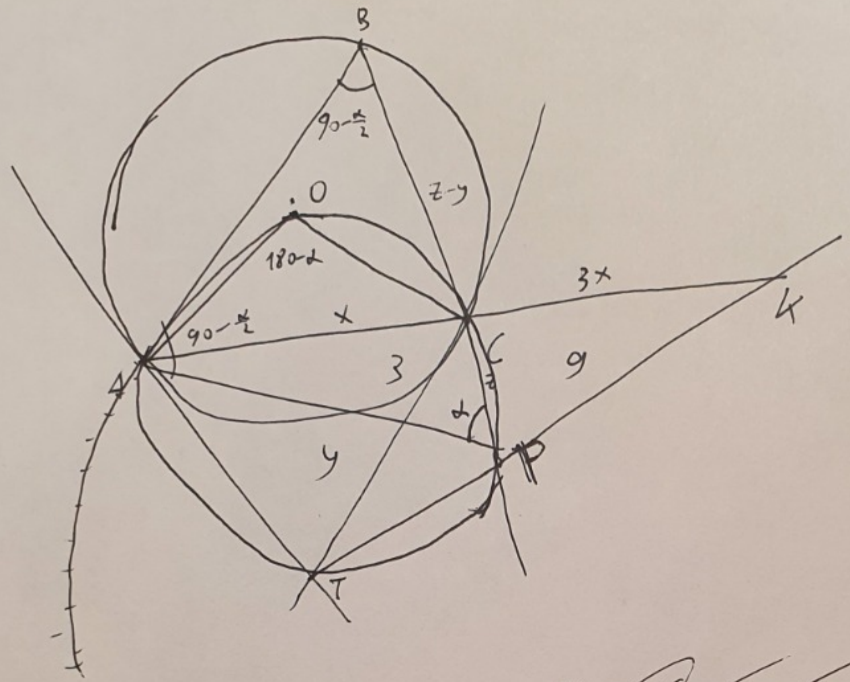
$]\ x = 4$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2;\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 1 \quad \Big| - u$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2$

Чистовик Вариант №21

6



~~1) По~~ ~~…~~ ~~Т. об отношении~~ ~~хорд~~ ~~отрезков секущих~~

~~KC·KA=~~

1) $S_{\triangle KPC} = \frac{1}{2} KP\cdot CK \cdot \sin\angle AKP = 9$

$S_{\triangle AKP} = \frac{1}{2}\cdot KP\cdot AK\cdot \sin\angle AKP = 12$ $\Bigg| \Rightarrow AC = x; CK = 3x$

2) $\angle BPA = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - \alpha$ (опир. на одну дугу с разных сторон)

$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\angle BAP = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \triangle APB$ – р/б

3)

$a = a_1 \cdot 35 \qquad b = b_1 \cdot 35 \qquad c = c_1 \cdot 35$

$$\frac{2}{\log_b c}$$

$$5^{18} \cdot 7^{16} = a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot (35)^3$$

$$c = b^{2\log_a b}$$

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 5^{15} \cdot 7^{13}$$

a_1	b_1
15	0
14	1
13	2
12	3
...	

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$$

$$2\log_{2x-3}(x+1) = \frac{2}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5}$$

$$\log_{2x-3}(x+1) \cdot \log_{2x-3}(2x^2-2x+5) = 1$$

$$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) - 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$$2\log_{2x-3}(x+1) - 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$\log_{\sqrt{a}} b \qquad \log_c a^2 \qquad \log_b c$

$2\log_a b \qquad 2\log_c a \qquad \log_b c$

$$2\log_a b = 2\log_c a$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_a c}$$

$$2\log_c a - 1 = \log_b c$$

$$2\log_a b - 1 = \log_b c$$

$$2\log_a b = \log_b c \cdot b$$

$$2\log_c a = \log_b(c \cdot b)$$

$$\frac{\log_b b^2}{\log_b a} = \log_b c \cdot b$$

21104358 (U855905 M1301669)

$2x^2 - 5x + 2x + 5 = 0$ $\quad$ $2x^2 - 3x + 5$

$9 - 40$

$4x^2 - 12x + 9$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 9 \\ \hline 162 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 162 \\ \times\ 16 \\ \hline 972 \\ +\ 162 \\ \hline 2592 \end{array}$$

$2\log_a b \quad 2\log_c a \quad \log_b c$

3	14
2	15
1	16
0	17

17	0
16	1
15	2
14	3
13	4
12	5
11	6
10	7
9	8
8	9
7	10
6	11
5	12
4	13

$a \quad b \quad c$

$7^{13} \quad 9 \quad 7^0$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 16 \\ \hline 486 \\ +\ 81 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$\log_a b + \log_c a - \log_b c = 1$

$\log_a b + \dfrac{1}{\log_a c} = \log_b c \cdot b$

$b = a^{\log_c a}$

$\log_a b = \log_c a$

$b = a^{\log_c a}$ $\qquad$ $\log_b c = 2\log_c a - 1$

$\log_{a^{\log_c a}} c = 2\log_c a - 1$

$\dfrac{1}{\log_c a} \cdot \log_a c = 2\log_c a - 1$

$\dfrac{1}{\log_c^2 a} = 2\log_c a - 1$

$1 = 2\log_c^3 a - \log_c^2 a$

$2u^3 - u^2 - 1 = 0$

$2u^3 - 2u^2 + u^2 - 1 = 0$

$2u^2(u-1) + (u-1)(u+1) = 0$

$(u-1)(2u^2 + u + 1) = 0$

$D = 1 - 8 < 0$

25-

$2\log_a b = \log_b c$; $2\log_a b - 1 = 2\log_c a$

$c = b^{2\log_a b}$ $\qquad 2\log_a b - 1 = 2\log_{b^{2\log_a b}} a$

$2\log_a b - 1 = \frac{1}{\log_a b}\log_b a$

a	b	c
4	2	4
25	5	25

$\log_a b = 1$

$a = b$ $\qquad b = c$

$2x-3 = x+1$ $\qquad 2x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = 4$ $\qquad x^2 - 2x + 2 = 0$

$\log_{25} 5 \qquad \log_{25} 25 \qquad \log_5 25$

$2\log_c a = \log_b c$ $\qquad 2\log_a b = \log_b c - 1$

$a^2 = c^{\frac{\log_b c}{2}}$

$a = c^{\log_{b^2} c}$

$2\log_{c^{\frac{\log_b c}{2}}} b = \log_b c - 1$

$\frac{4}{\log_b c} \cdot \log_c b = \log_b c - 1 \quad | \cdot \log_b^2 c$ $\qquad \frac{2}{\log_b^2 c} = \log_b c - 1$

$4 = u^3 - u^2$

$u^3 - u^2 - 4 = 0$

$u^3 - 2u^2 + u^2 - 4 = 0$

$(u-2)(u^2 + u + 2) = 0$

$\log_b c = 2$

$c = b^2$

$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 3x + 5$

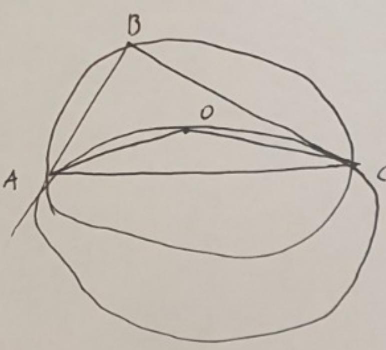
$x^2 - 5x + 4 = 0$

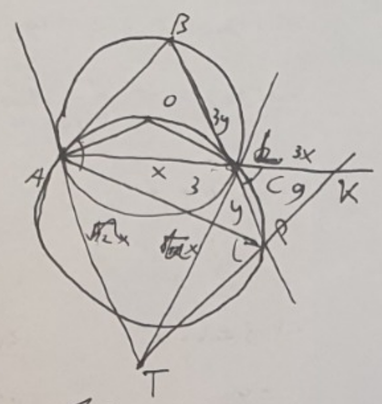
$(x-1)(x-4) = 0$

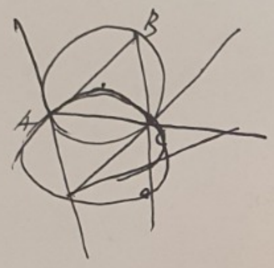
$x = 1$

7

21104358 (U855905 M1301669)







~~[illegible]~~

$$\frac{KC}{KA} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$KC = \frac{3}{4} KA$$

$$PK \cdot KT = 12x^2$$

~~[illegible]~~

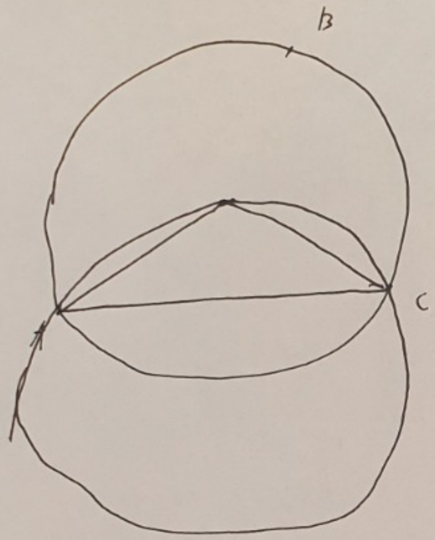
Зоvg $\angle AOC$

$4 \angle ACD$

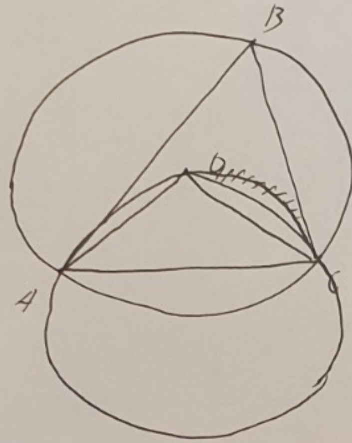
2α $180 - 2\alpha$

α

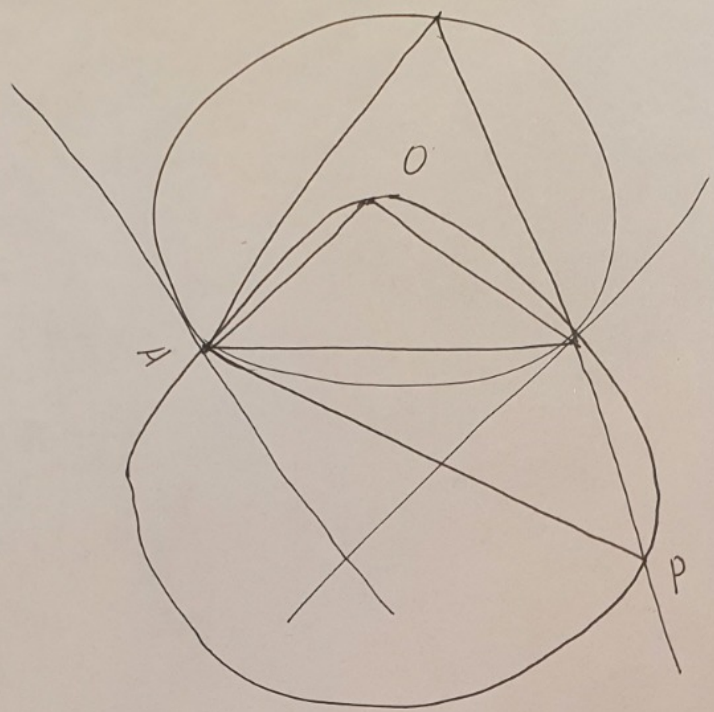
(6)



(6)



21104358 (U855905 M1301669)


O
A
P