Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104312**

ID профиля: **844927**

Вариант 21

(1) Чистовик.

№1 $a_1, a_2 \dots a_n \in Z$; a_1 - ?

пусть: d - разность ; $d > 0$

$a_1 = a$

$$\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$$

1) $a_8 = a_1 + (a+d) + (a+2d) \dots (a+7d) = 8a + (d + 2d + \dots + 7d) = 8a + \frac{d+7d}{2} \cdot 7 = 8a + 28d$

$1+2+3+4+5+6+7 = 28$.

2) $a_{17} = 17a + (d + 2d + \dots + 16d) = 17a + \frac{d+16d}{2} \cdot 16 = 17a + 17d \cdot 8$

3) $a_{11} = 11a + (d + 2d + \dots + 10d) = 11a + \frac{d+10d}{2} \cdot 10 = 11a + 11d \cdot 5$

4) $a_{14} = 14a + (d + 2d + \dots + 13d) = 14a + \frac{d+13d}{2} \cdot 13 = 14a + 7d \cdot 13$.

1) $S = S_7 = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+6d) = 7a + \frac{d+6d}{2} \cdot 6 = 7a + 7d \cdot 3$.

2) $a_8 = a + d + d + d + d + d \dots + d = a + 7d$

$a_{17} = a + 16d$ $\quad a_{14} = a + 13d$

$a_{11} = a + 10d$

3) $$\begin{cases} (a+7d) \cdot (a+16d) > 7a + 21d + 27 \quad (1) \\ (a+10d)(a+13d) < 7a + 21d + 60 \quad (2) \end{cases}$$

$a^2 + 16 \cdot 7d^2 + 23da > 7a + 21d + 27$

$a^2 + a(23d - 7) + 16 \cdot 7d^2 - 21 - 27 > 0$

$16 \cdot 7d^2 + d(23a - 21) + a^2 - 7a - 27 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D < 0$

$(23a - 21)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 7(a^2 - 7a - 27) < 0$

Продолжение →

№1 продолжение: (2) Чистовик

$(23a-21)^2-4\cdot16\cdot7\cdot(a^2-7a-27)<0$

$\underline{23^2a^2}-\underline{2\cdot23\cdot21a}+21^2-\underline{4^3\cdot7\cdot a^2}+\underline{4^3\cdot7^2a}-4^3\cdot7\cdot27<0$

$a^2(23^2-4^3\cdot7)-a(2\cdot23\cdot21-4^3\cdot7^2)+21^2-4^3\cdot7\cdot27<0$

(2) $(a+10d)(a+13d)<(7a+21d)+60$

4) $\begin{cases} a^2+10\cdot13d^2+23ad<7a+21d+60 \\ a^2+16\cdot7d^2+23da>7a+21d+27 \mid\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow$ $\quad 4\cdot16\cdot7=112$

~~a^2+112d^2+23da~~

$\Rightarrow\begin{cases} a^2+130d^2+23ad<7a+21d+60 \\ -a^2-112d^2-23ad<-7a-21d-27 \end{cases}$ (+)

$\Rightarrow 18d^2<63-27=36\Rightarrow d<\sqrt{2}.$ $\quad 63-27=36$

$-\sqrt{2}\quad 0\quad \sqrt{2}\quad d$

~~$7d^2<8\Rightarrow d^2<\frac{8}{7}$~~ $\quad -\sqrt{\frac{8}{7}}\quad \sqrt{\frac{8}{7}}\quad d$

$d^2<2\Rightarrow d<\sqrt{2}$, т.к

~~но т.к прогрессия возрастающая, то~~

~~$d\in\left[0;\sqrt{\frac{8}{7}}\right]$, т.к $a_1=a\in Z\Rightarrow d\in Z$, т.к все остальные члены также $\in Z$.~~

~~$\left[\begin{array}{l} d=0 \\ d=1 \end{array}\right.$, но $d\neq0$, тогда прогрессия не возрастает.~~

Продолжение →

21104312 (U844927 M1303510)

№1 продолжение

(3) чистовик

~~5) Получаем что $d = 1$, тогда.~~

$$\begin{cases}(a+7)(a+16) > 7a+21+27 \ (1)' \\ (a+10)(a+13) < 7a+21+60 \ (2)'\end{cases}$$

$(1)'$: $a^2 + 23a + 7\cdot16 > 7a + \cancel{21}\ 48$

$a^2 + 16a + 16(7-3) > 0$

$D = 16^2 - 4\cdot16\cdot4 = 0$

$(a-8)^2 > 0$

5) Получаем что $d^2 < 2$; $0 < d < \sqrt{2}$, получ.

но т.к $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$

$$\begin{cases}(a+7)(a+16) > 7a+21+27 = 7a+48 & (1)' \\ (a+10)(a+13) < 7a+21+60 = 7a+81 & (2)'\end{cases}$$

$(1)'$: $a^2 + 23a + 7\cdot16 > 7a+48$

$a^2 + 16a + 7\cdot4^2 - 4^2\cdot3 > 0$

$(a+8)^2 > 0 \Rightarrow \cancel{a \in}\ a \in R / \{-8\}$

$(2)'$; $a^2 + 23a + 130 < 7a + 81$

$a^2 + 16a + \cancel{7}\ 49 < 0 \Rightarrow D = 4^4 - 4\cdot7^2 =$

$= 256 - 196 = 60$

$\cancel{4}\ 49 \times 4 = 196$

$a = \dfrac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} \Rightarrow a \in \left(\dfrac{-16-\sqrt{60}}{2}; \dfrac{-16+\sqrt{60}}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-16-\sqrt{60}}{2} > -12. \\ \dfrac{-16+\sqrt{60}}{2} < -4\end{array}\right\} \Rightarrow a = \{-\cancel{12}; -11; -10; -9; -7; -6; -5\}$$

-8 - не подходит; ~~из по~~ 1 уравнения

Ответ: $a \in \{\cancel{-12}; -11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

21104312 (U844927 M1303510)

(4) Чистовик.

№2.

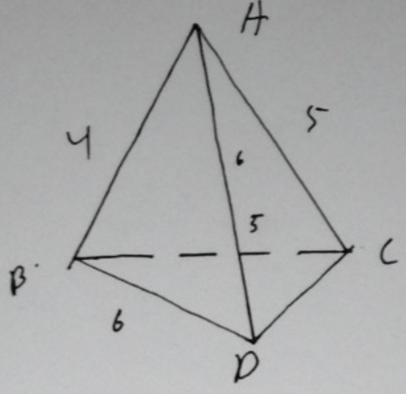
$AB=4$

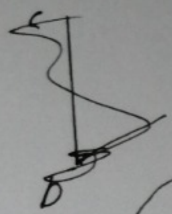
$AC=CB=5$

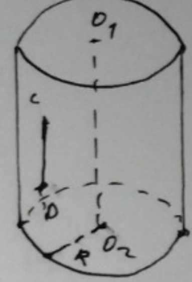
$AD=DB=6$

$CD \parallel$ оси ц.

CD - ?

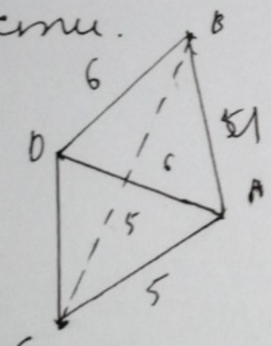






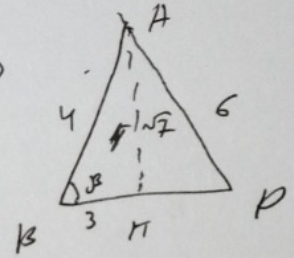
1) Т.к $CD \parallel O_1O_2 \Rightarrow CD$ и $O_1O_2 \in$ одной плоскости $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD$ целиком принадлежит боковой поверхности.



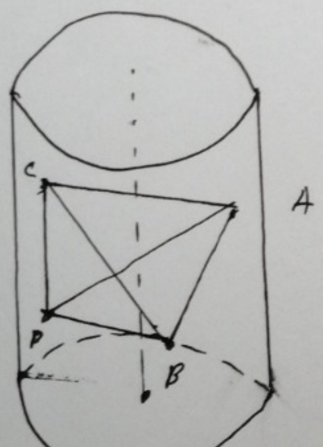
$AB=4$; $AP=6$; $BD=6 \Rightarrow$

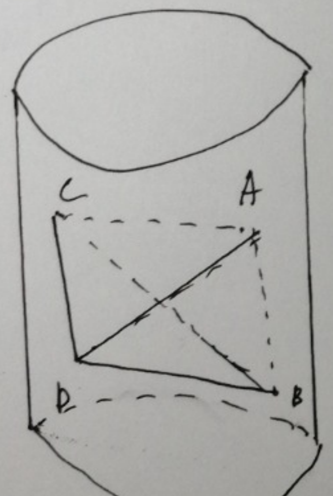
$\Rightarrow$



$AH = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$





$CD \leq 5+6$

Ответ: $CD = 10$

21104312 (U844927 M1303510)

чистовик. 5

№3 ~~про~~

$S - ?$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

– ~~окр~~ круг с центром в т. $(0;0)$ и $R=\sqrt{20}$

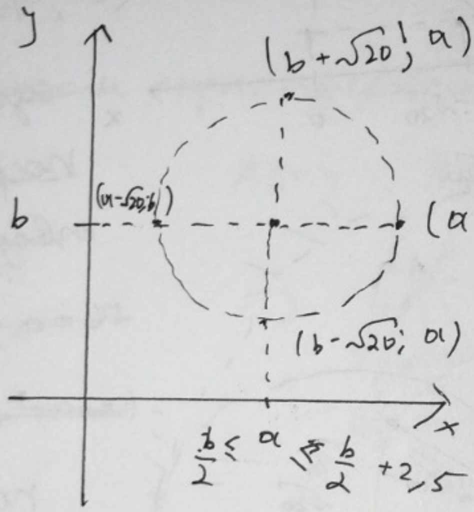
1) Если $8a-4b \le 20 \Rightarrow a^2+b^2 \le 8a-4b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a-4b \ge 0 \Rightarrow a \ge \frac{b}{2} \\ 8a-4b \le 20 \Rightarrow a \le \frac{b+5}{2} = \frac{b}{2}+2,5. \end{cases}$$

$2a - b \le 5$

$a \in \left[\frac{b}{2} ; \frac{b}{2}+2,5\right]$

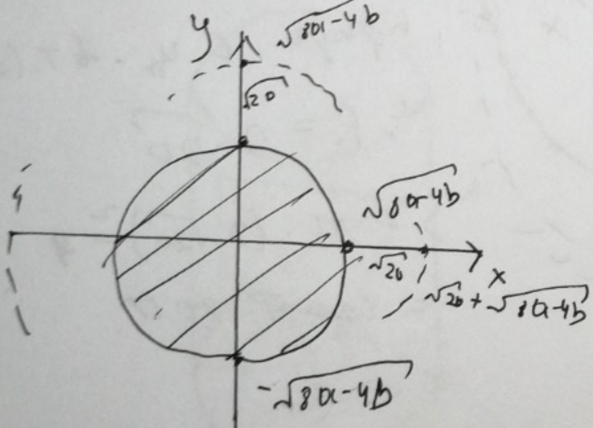
a^2+b^2 – кв. раст. от т. $(0;0)$ до т. $(a;b)$



$a^2-8a+b^2+4b \le 0$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le \sqrt{20}$

• значит центр окружности (круга) в $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ бегает по кругу с $R=\sqrt{8a-4b}$



$\Rightarrow$ получается в (1) и (2) $\Rightarrow$ круг с $R=\sqrt{20}+\sqrt{8a-4b}$

$$S = \pi \cdot \left(\sqrt{20}+\sqrt{8a-4b}\right)^2$$

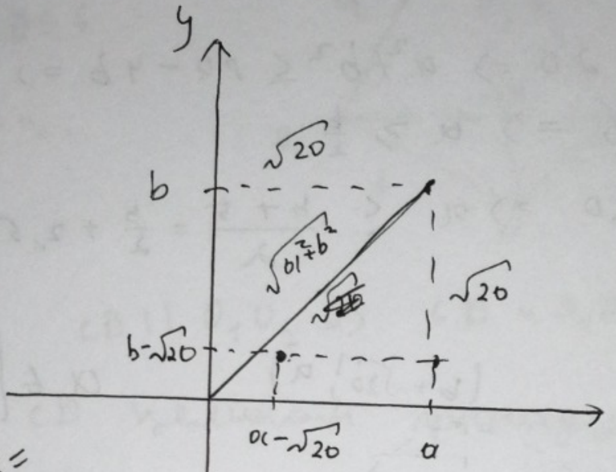
$$S = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}+2,5} \pi\left(\sqrt{20}+\sqrt{8a-4b}\right) \cdot da$$

Продолжение: →

№3 продолжение. Чистовик (6)

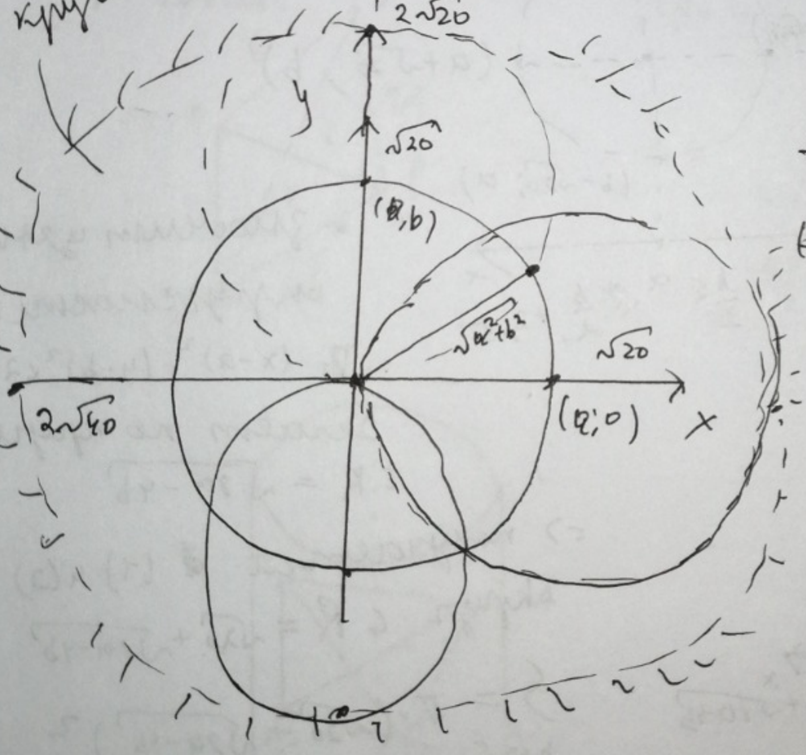
2) Если $8a-4b \geq 20 \Rightarrow 2a \geq 5-b$

$a^2+b^2 \leq 20 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{20}$ значит центр окружности $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20$ бегает по кругу с $R=\sqrt{20}$



если ~~x~~ $a=b$ то $b \leq \sqrt{20}$, но т.к $R_{(1)}=\sqrt{20}$, ~~то~~ ~~сущ. единств. пара (a; b) удовлетвор. условию~~ ~~a=0; b=0, иначе~~ ~~$(x-a)^2+$~~

круг с R =



получается круг с ц. в т. (0;0) и $R=2\sqrt{20}$

$S=\pi\cdot(2\sqrt{20})^2 =$ ~~3~~ $=$ ~~100π~~ 80π.

Ответ: 80π.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104312**

ID профиля: **844927**

Вариант 21

① чистовик:

№5 $\overset{(1)}{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)}$, $\overset{(2)}{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2}$, $\overset{(3)}{\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)}$

При каких x; два из них "=", а 3 < 1 и 2 на 1?

1) $\begin{cases} 2x-3>0 \quad : \neq 1 \Rightarrow x>\frac{3}{2} \text{ и } x\neq 2. \\ x+1>0 \quad : \neq 1 \Rightarrow x>-1 \text{ и } x\neq 0 \\ 2x^2-3x+5>0 \quad : \neq 1 \Rightarrow \quad x\in R \end{cases}$

2) Перемножим: (1)·(2)·(3) и перейдем к осн e

$\cancel{\log}\ \dfrac{\ln(x+1)}{\ln\sqrt{2x-3}}\cdot\dfrac{\ln(2x-3)^2}{\ln(2x^2-3x+5)}\cdot\dfrac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)}=$

$=\dfrac{2\ln(2x-3)}{\frac{1}{2}\ln(2x-3)}=4$ т.е. ~~a·a·b=4.~~

$a\cdot a\cdot(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$

$a^2\cdot(a-1)=4$

~~3) Если: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$~~ $2x^2-3x+5=$ $=(\sqrt{2}x-\frac{9}{2})^2+$

~~$\log_{2x-3}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^{2}$~~

~~$\log_{2x-3}(x+1)-\dfrac{1}{\log_{(2x-3)}(2x^2-3x+5)}=0$~~

3) У нас есть $f(a)=a\cdot a(a-1)\ \cancel{=4}\ =a^3-a^2$

$f'(a)=3a^2-2a \Rightarrow f'(a)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

↗ ↘ ↗ $f(a)$

$+\quad 0\quad -\quad \frac{2}{3}\quad +\quad f'(a)$

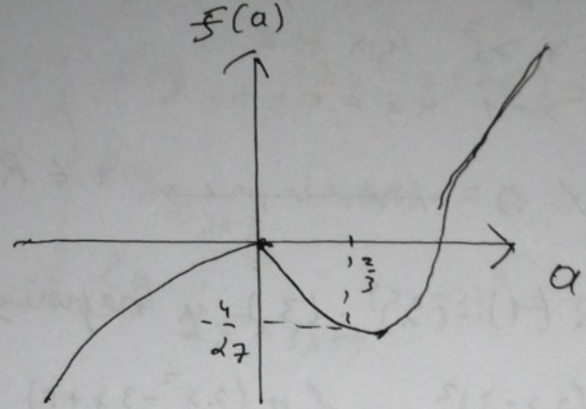
Продолжение →

№5 продолжение. (2) Чистовик.

Построим схематично график функции $f(a)=a^3-a^2$.

$a(0)=0$ — т max

$a\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$ — т min.



Получается что при $a \geq \frac{2}{3}$ $f(a)$ монотонно возраст и до $a=\frac{2}{3}$ $f(a)<4$

$\Rightarrow$ $f(a)=4$ имеет решение при единственном $a=2$ $\quad 2^3-2^2=4$

$\Rightarrow$ 4) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2 \Rightarrow x+1=2x-3$

$1x=4 \Rightarrow x=4$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1 \Rightarrow$ $x+1=\sqrt{2x-3} \Rightarrow x^2+2x+1=2x-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=-4$ — $\varnothing$ значит: $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2.$

5) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 \Rightarrow 2x^2-3x+5=x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$, ~~не это ном~~

~~не подходит т.к~~ (1) = 2 при $x=2$

$\cancel{\Rightarrow \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1 \Rightarrow 2x^2-3x+5=x+1 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow 2x^2-4x+4=0 \Rightarrow}$

$\cancel{x^2-5x}$

Продолжение: →

(3) Чистовик.

№5 продолжение

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1 \Rightarrow 2x^2-3x+5=x+1 \Rightarrow \varnothing$

т.к $D=4^2-4\cdot2\cdot4<0$

значит: $\begin{cases} \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 & \Rightarrow x=4 \\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2 & \Rightarrow x=4 \\ \lg_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1 \end{cases}$

$2x^2-3x+5=4x^2-12x+9 \Rightarrow 2x^2-9x+4=0$

При $x=4$ $\quad 2\cdot16-9\cdot4+4=0$

и также $x=4$ подходит под ОДЗ.

Ответ: $x=4$.

④ Чистовик.

№4: $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 = 5\cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$

1) т.к $НОД = 5\cdot 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{одно из чисел} = 5\cdot 7^k \\ \text{одно из чисел} = 7\cdot 5^n \end{array}\right.$

Пусть: $a = 5\cdot 7^k$

$b = 7\cdot 5^l$ $\Rightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ n \geq 1 \\ k \geq 1 \\ l \geq 1 \end{cases}$ $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$

$c = 5^m\cdot 7^n$

$\begin{cases} m \leq 18 \\ l \leq 18 \\ n \leq 16 \\ k \leq 16 \end{cases}$

~~т.к НОК $= 5^{18}\cdot 7^{16} \Rightarrow$ либо $7^k = 7^{16}$~~

~~· либо $7^n = 16$~~

~~· либо $5^l = 5^{18}$~~

~~· либо $5^m = 5^{18}$~~

· ~~Если $7^k = 7^{16} \Rightarrow k = 16 \Rightarrow n \leq 16 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \left[\text{если } 5^l = 5^{18} \Rightarrow l = 18 \Rightarrow m \leq 18 \right.$~~

~~если $5^m = 5^{18} \Rightarrow m = 18,\ k \leq 18$~~

· ~~Если $7^n = 7^{16} \Rightarrow n = 16 \Rightarrow k \leq 16$~~

~~$\Rightarrow$~~

~~2) Если k~~ ~~m = l~~ ~~Но либо~~

2) · либо m или l должно = 18

· либо k или n должно = 16.

3) Если $m = 18 \Rightarrow l \in [1; 18] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Если } k = 16 \Rightarrow n \in [1; 16] \\ \text{Если } n = 16 \Rightarrow k \in [1; 16] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во $\Rightarrow 18\cdot 16 + 18\cdot 16 = 2\cdot 18\cdot 16.$

21104312 (U844927 M1303511) Продолжение: →

⑤ Чистовик.

№4 продолжение.

4) Если $l = 18 \Rightarrow m \in [1; 18] \Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 16 \Rightarrow n \in [1; 16] \\ n = 16 \Rightarrow k \in [1; 16] \end{array}\right.$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во вариантов $= 18 \cdot 16 + 18 \cdot 16 =$
$= 2 \cdot 18 \cdot 16$

~~5.) Но если $k = l = 1 \Rightarrow a = b \Rightarrow$ мы два раза посчитали когда $k = 16$ и $l = 16$ в пункте 3.~~

~~6) Но если в пункте 3~~

5) Получаем что кол-во вариантов $= 2 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 16$, но нужно еще умножить на $3!$, т.к в начале мы однозначно написали $a, b, c \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~в~~ $2 \cdot 2 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 3 = 3456$.

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 16 \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline 288 \\ \times 4 \\ \hline 1152 \\ \times 3 \\ \hline 3456 \end{array}$$

но случай: $\begin{cases} m = 1 \\ k = n = 16 \end{cases}$ мы посчит. 2 раза.

$\left.\begin{array}{l} n = 1 \\ m = l \\ k = 16 \end{array}\right\}$ мы посчит 2 раза

Значит нужно из $3456 - 3 \cdot 2 =$
$= 3450$

Ответ: 3450

(б) Чистовик.

№6.

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9.$

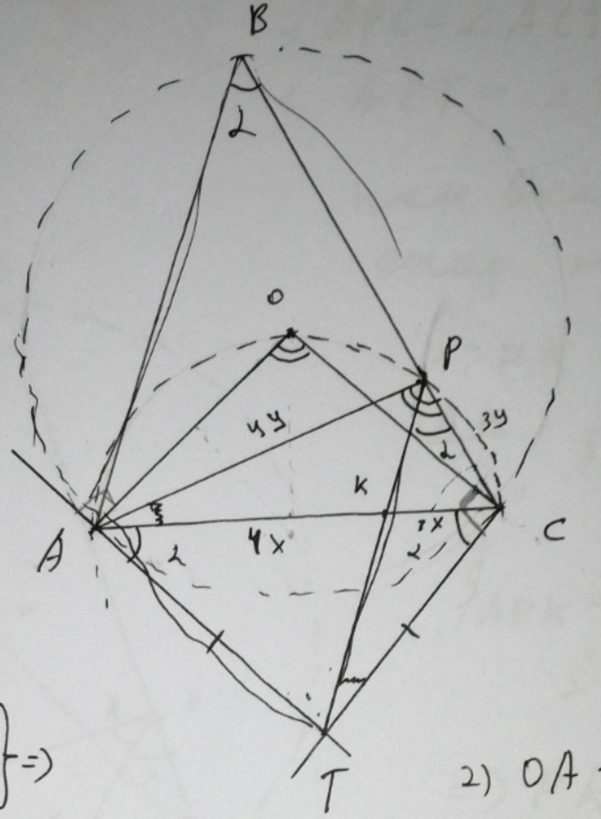
1) S_{ABC} - ?

2) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

AC - ?

$S_{PCK} = PK \cdot PC \cdot \frac{1}{2} \sin\alpha$

$S_{APK} =$



1) ~~Т.к.~~ $\left.\begin{aligned} S_{APK} &= \frac{1}{2} h \cdot AK \\ S_{CPK} &= \frac{1}{2} h \cdot CK \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

2) $\left.\begin{aligned} &OA = OC \\ &OT \text{ - общая} \\ &\angle OAT = 90^\circ \\ &\angle OCT = 90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle AOT = \triangle OCT \Rightarrow$

$\Rightarrow AT = CT$

3) $\angle AOC = \angle APC$ т.к опир на одну дугу. $\Rightarrow$

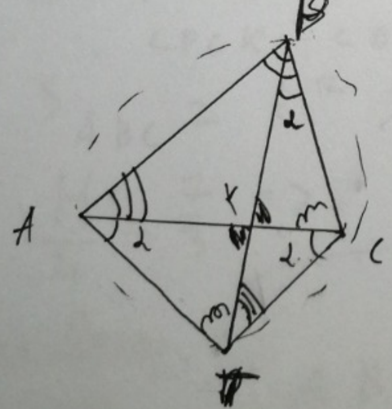
$\Rightarrow APTC$ – вписанный т.к $\angle ATC = 180 - \angle AOC$

$\angle PAC = \angle PTC$

$\angle AKT = \angle TPC = \alpha.$

$AK \cdot KC = PK \cdot KT.$

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$



Продолжение →

⑦ Чистовик.

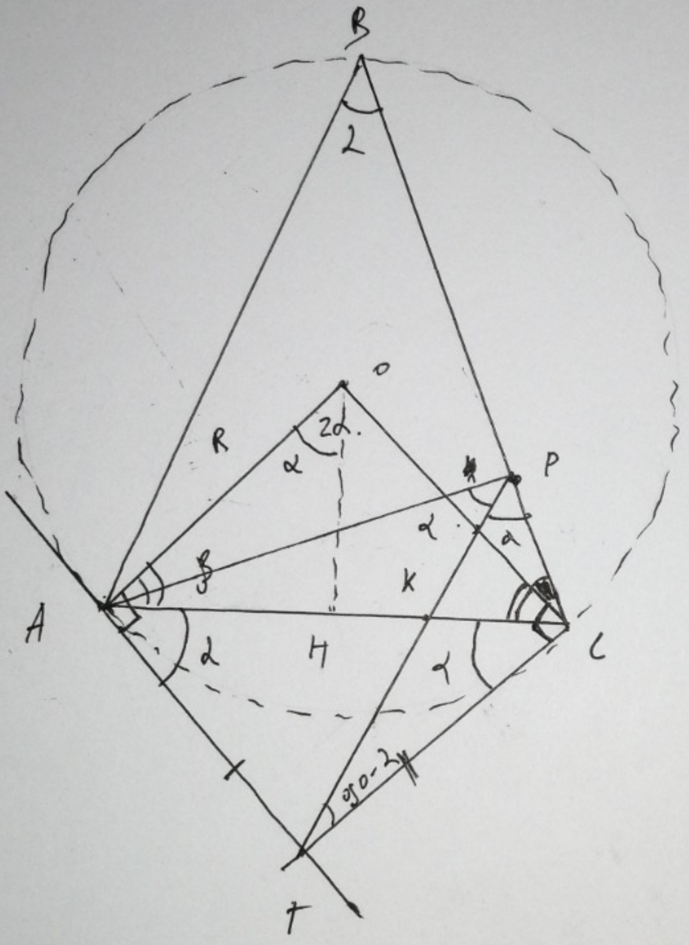
№6 продолжение.

△ ~~IPC - прямоуг.~~

$BH = R + R\cos\alpha$.

$\left.\begin{array}{l}\angle APC = \angle ACT = \alpha \\ \angle ACT = \angle TPC = \alpha\end{array}\right\}$

как вписанные и опир. на одну дугу



$\Rightarrow PK$ - биссектриса

$\frac{AK}{CK} = \frac{4}{3} = \frac{AP}{PC} = \frac{4y}{3y}$

$S_{APK} = \cancel{4y \cdot 4x \cdot \sin}$

$\frac{1}{2} 4y \cdot PK \cdot \sin\alpha$.

$\Rightarrow PK \parallel BA$

$PT \parallel AB$

$ATPB$ - параллелограмм

$AT = BP$

$k = \frac{KC}{AC} = \frac{3x}{7x} = \frac{3}{7}$

$\triangle PKC \sim \triangle ABC$, т.к. $\angle PCK = \angle BCK$ (по 2 углам).

$S_{ABC} = k^2 S_{PKC} = \frac{49}{9} S_{PKC} = \frac{49}{9} \cdot 9 = 49$

$\frac{H}{h} = \frac{7}{3} \Rightarrow$

Ответ: $S_{ABC} = 49$

21104312 (U844927 M1303511)

Черновик:

$$a^3 - a^2 = 4$$

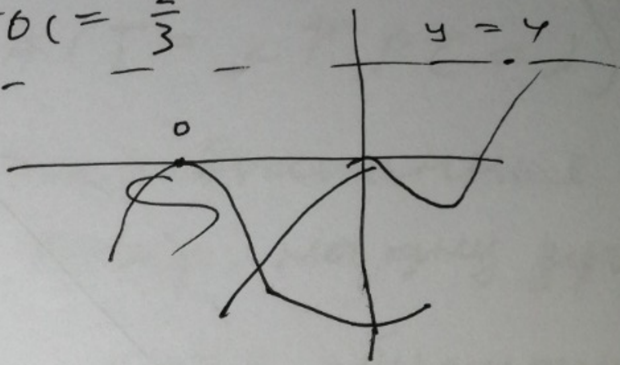
$$f'(x) = 3a^2 - 2a = 0$$

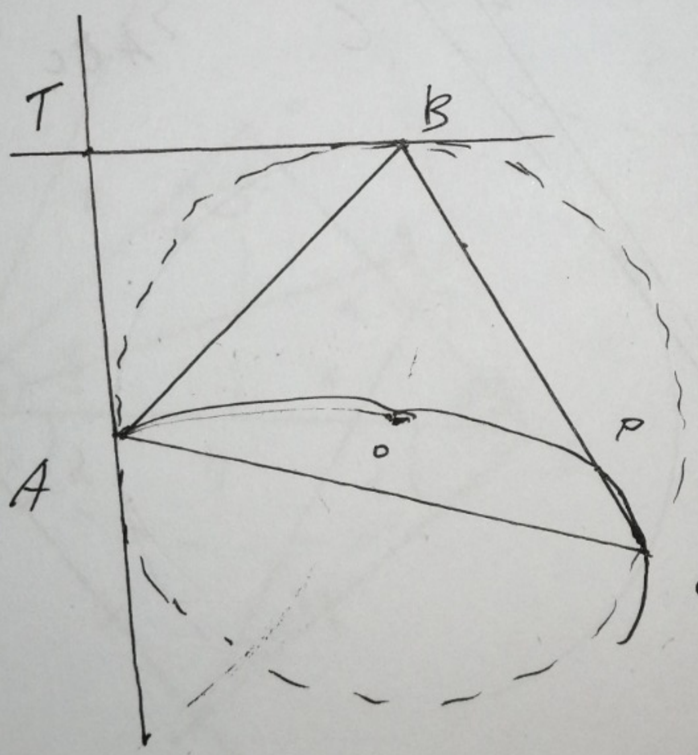
$a = 0$ либо $3a - 2 = 0$

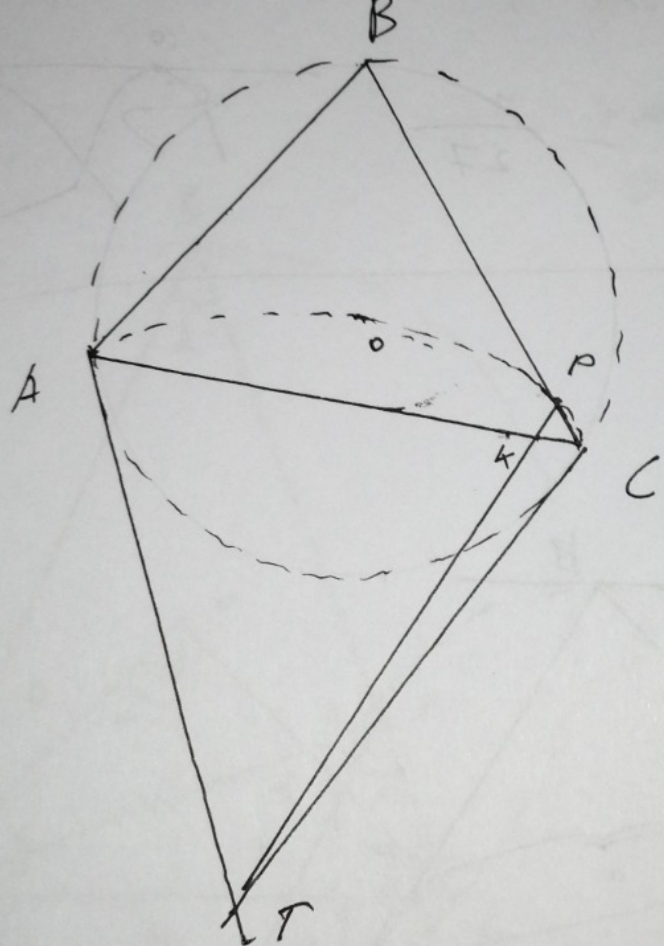
$a = \frac{2}{3}$

При ~~а~~. $\nearrow$ 0 $\searrow$ $\frac{2}{3}$ $\nearrow$

$$a\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$$







$12 = S_{APK} + S_{CPK} = 9$

S_{ABC} -?