Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104286**

ID профиля: **855961**

Вариант 21

21вариант Пирнович.

$102,5 \cdot 102,5 = 10506,25$

1260,25

$112,5 \cdot 112,5 = 12656,25$

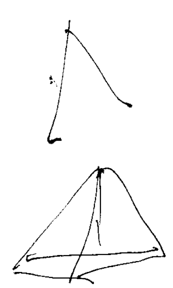
100000.

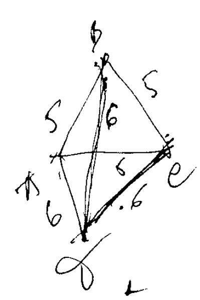
$100,5 \cdot 100,5 = 10100,25$

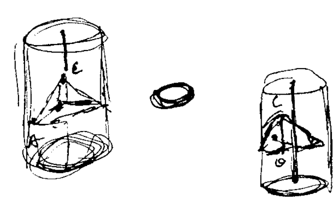
$45,5 \cdot 45,5 = 2070,25$

$15,5 \cdot 15,5 = 240,25$

$35,5 \cdot 35,5 = 1260,25$







Черновик.

① $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7$

$a_8 a_{17} > S+27.$

$a_{11} a_{14} < S+60.$

$S = \frac{(a_7 - a_1)7}{2}$

$a_8 = a_1 \cdot 7$

$a_{17} = a_1 \cdot 16$

$a_1^2 \cdot 112 > \frac{36 a_1 \cdot 7}{2} + 27$

$a_1^2 \cdot 112 - a_1 21 - 27 > 0$

$a_1 = t$

$112t^2 - 21t - 27 > 0$

$a = 112 \quad D = 441 + 12096 = 12137.$

$b = -21$

$c = -27$

$112t^2 - 17{,}5t - 27 > 0$

$a = 112 \quad D = 306{,}25 + 12096 = 12402{,}25$

$b = -17{,}5$

$c = -27$

$a_{11} a_{14} < S+60.$

$a_{11} = a_1 \cdot 10$

$a_{14} = a_1 \cdot 13$

$\frac{a_1 5 \cdot 7}{2} = a_1 \cdot 17{,}5$

$a_1^2 130 < a_1 \cdot 17{,}5 + 60$

$a_1 = t$

$130t^2 - 17{,}5t - 60 < 0. \quad |:5$

$26t^2 - 3{,}5t - 12 < 0$

$a = 26 \quad D = 12{,}25 + 1248 =$

$b = -3{,}5 \quad = 1260{,}25.$

$c = -12$

$\sqrt{2{,}6}$

$100{,}00$

②

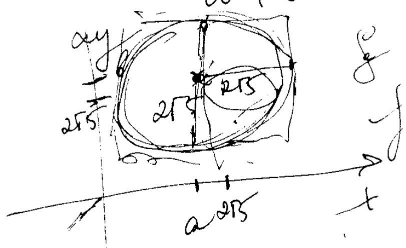
черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$

$\sqrt{20}$

$2\sqrt{5}$



$8a-4b=20$

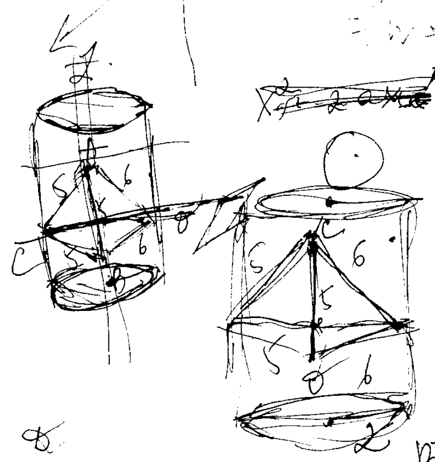
$\cancel{8a}$

$2a-b=5$

$b=2a-5$

$a^2+b^2\le 20$

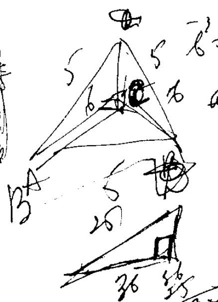
$\min(8a-4b,20)$



$S=\pi R^2$

$S=2\pi\cdot 20=40\pi$

$a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)$



$b=2a-5$

$(2a-5)^2+a^2\le 20$

$4a^2-20a+25+a^2\le 20$

$5a^2-20a+25\le 0$

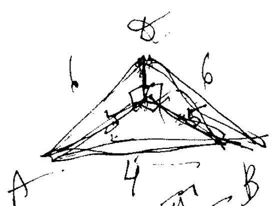
$a^2-4a+5\le 0$

$D=16-20$

$a=1$

$b=-4$

$c=5$



21 вар. Беловик

① Пусть $\{a_n\}$ — возрастающая последовательность с шагом d (т.к. a_n — возрастает, то $d>0$)

Посчитаем сумму последовательности.

$a_1+\ldots+a_7 = 7\cdot\left(\frac{a_1+a_7}{2}\right) = 7\cdot(a_1+3d)$

Запишем имеющееся условие в виде системы уравнений:

① $\begin{cases} a_8 a_{17} > 7\cdot(a_1+3d)+27 \\ a_{11}a_{14} < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$

③ $\begin{cases} a_1^2+23da_1+7\cdot16d > 7(a_1+3d)+27 \\ a_1^2+23da_1+10\cdot13d < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$

② $\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7(a_1+3d)+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7\cdot(a_1+3d)+60 \end{cases}$

④ $\begin{cases} a_1^2+23da_1-7(a_1+3d) > 27-7\cdot16d \\ a_1^2+23da_1-7(a_1+3d) < 60-10\cdot13d \end{cases}$

т.к. левая часть неравенств совпадает, а их знаки отличаются, то сложим их

$60-10\cdot13d > 27-16\cdot7d$

$33 > 18d$, получается, что $\max d = 1$, тогда подставим d в систему неравенств, чтобы найти a_1.

$\begin{cases} a_1^2+23a_1-7(a_1+3) > 27-7\cdot16 \\ a_1^2+23a_1-7(a_1+3) < 60-13\cdot10 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ (a_1+8)^2<15 \end{cases}$

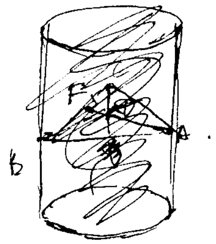
$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1+8 \in (-\sqrt{15}; \sqrt{15}) \end{cases}$

т.к. все элементы последовательности целые, то $a_1+8 \in [-3;3]$.

Ответ: $a_1 \in [-11;-5]$.

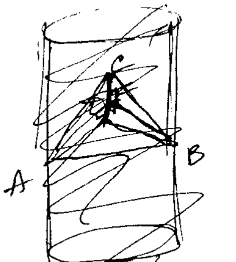
Белевик 21 вар.

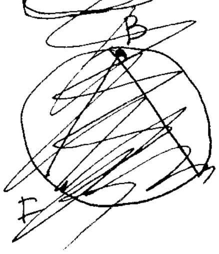
② Дано: AB=4, AC=CB=5, AD=DB=6
ΔBCD-тетраэдр, вписанный в цилиндр
CD-?



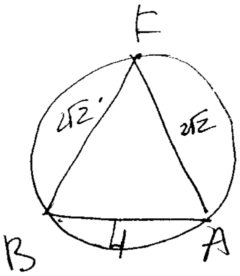
Решение:

т.к. CD || оси цилиндра, то BA в таком случае будет || основанию цилиндра, иначе не было бы 2-ух равнобедренных треугольников. Проведем высоту ΔCBD - BF и высоту ΔCAD - AF. Рассм. ΔBFA





(1)

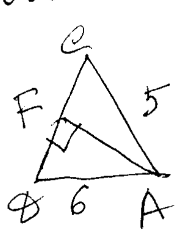


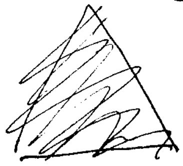
— BA-хорда, значит $\min R \geq 2$.

Рассм. $R=2$, т.к BA-диаметр, то $FA=BF=2\sqrt{2}$.

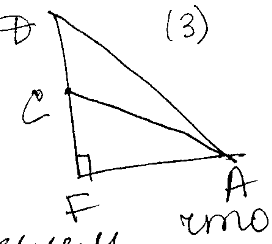
$DF=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}$
$CF=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$
$CD=\sqrt{17}+\sqrt{28}$

(2)





(3)



$DF=\sqrt{28}$
$CF=\sqrt{17}$
$CD=\sqrt{28}-\sqrt{17}$

Проверим, что ~~ΔBFA~~ Δ из рис.(2) и рис (3) - возможны.

Ответ: $CD=\sqrt{28}\pm\sqrt{17}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104286**

ID профиля: **855961**

Вариант 21

21 вар. Балвин

(4) $НОД(a, b, c) = 35$

$НОК(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 7^{b_2} \cdot 5^{b_1}$, $c = 7^{c_2} \cdot 5^{c_1}$, тогда:

$$\begin{cases} \max(a_1, b_1, c_1) = 18 \\ \max(a_2, b_2, c_2) = 16 \\ \min(a_1; b_1, c_1) = 1 \\ \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \end{cases}$$

Рассмотрим варианты:

a_1, b_1, c_1

1.1. a_1, b_1, c_1 — различные., тогда кол-во вариантов будет равно:
одно число равно ~~одному~~ 1,
одно число равно 18,
3-е число от 2 до 17.

$2 \cdot 3 \cdot 16$ вариантов

1.2. Если среди a_1, b_1, c_1 — имеются повторы, то: 2 числа равны 1
другое число — 18
или наоборот

$2 \cdot 3$ вариантов

Итого комбинаций a_1, b_1, c_1:

$2 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 3$

аналогично для a_2, b_2, c_2:

$2 \cdot 3 \cdot 14 + 2 \cdot 3$

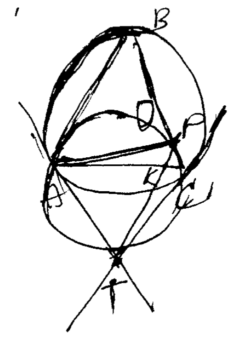
Перемножим:

$(6 \cdot 17) \cdot (6 \cdot 15) = 9180$

Ответ: 9180.

6

Белвил,



Дано:

ω – окр. с ц. в т. O

ABC – остроуг. Δ.

AT, CT – касательные

$S_\Delta APK = 12$

$S_\Delta CPK = 9$

$S\,ABC - ?$

Решение

а) $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle AOC + \angle ATC = \pi \Rightarrow$
$\angle CAT = \angle ACT = \alpha \Rightarrow \angle AOC + \angle ATC$ можем сделать вывод, что таким образом
T лежит на окруж., описанной около APC $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ и $\angle TPC = \alpha \Rightarrow$ PK – биссектриса
$\angle BAP = \angle APC - \angle ABC = \alpha = \angle ABC \Rightarrow \Delta APB$ – равнобедренный (по призн. равнобедр. Δ) $\Rightarrow$

$AP = BP$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_\Delta APK}{S_\Delta CPK}$$

$$\frac{S_\Delta APB}{S_\Delta APC} = \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow$$

$$S_\Delta ABC = S_\Delta APB + S_\Delta APC = S_\Delta APC\left(1 + \frac{AP}{PC}\right) =$$

$$= (S_\Delta APK + S_\Delta CPK)\left(1 + \frac{S_\Delta APK}{S_\Delta CPK}\right) = \frac{(S_\Delta APK + S\,CPK)^2}{S\,CPK} =$$

$= 49$

Ответ: 49.

2

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ Черновик.
$\log_{x+1}(2x^2-3x+5$ $x>1,5$

пусть $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1$

$\sqrt{2x-3}=x+1$

$2x-3=x^2+2x+2$

$x^2+2x+2-2x+3=0$

$x^2+5=0$

$x^2=-5$

$\varnothing$

$2x-3\geq 0$ $2x-3\neq 1$

$2x>3$ $2x\neq 3$

$x>1,5$ $x\neq 1,5$

$2x^2-3x+5\neq 1$

$2x^2-3x+4\neq 0$

$x+1>0$

$x>-1$

$a=2$ $b=$

$b=-3$

$x\neq 0$

$c=4$

~~пусть 2.~~

пусть $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=$

$$-\frac{1}{2}\log_{2x-3}(x+1)=\frac{1}{\log_{(2x-3)^2}2x^2-3x+5}$$

$$-\frac{1}{2}\log_{2x-3}(x+1)=\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{(2x-3)}2x^2-3x+5}$$

$+\log$

$a=2$ $b=9-40$

$b=-3$

$c=5$

$$-\frac{1}{2}\log_{2x-3}(x+1)=\frac{2}{\log_{2x-3}2x^2-3x+5}$$

$$-\frac{1}{2}\log_{2x-3}x+1\cdot\log_{2x-3}2x^2-3x+5=2$$

$$\log_{2x-3}(x+1)\cdot\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)=-4$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$$

$\cancel{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\frac{1}{\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}}$ $\log_a b\cdot\log_a c=$

$\cancel{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{2x^2-3x+5}(x+1)}=1$

$\cancel{\log_{2x^2-3x+5}x+1}$

$2x^2-3x+4$

$(2x^2-3x+4)(4x^2-6x+8)=(x)(2x^2-3x+4)$

$4x^2-6x+8=x$ $4x^2-7x+8=0$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x-5)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) - \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{\cancel{\sqrt{2x-3}}\,2x-3} 2x-3 = 0.$

~~$\log_{2x}$~~

$-\frac{1}{2}\log_{2x-3}(x+1) - \frac{1}{\frac{1}{2}\log_{2x-3}\cdot\log(2x^2-3x+5)} = 1$

~~$\log_{2x-3}$~~ 1

$-\left(\frac{1}{2}\log_{2x-3}\frac{(x+1)}{\cancel{2x}}(2x^2-3x+5)\right) - \frac{1}{\log_{2x-3}}\, 2x^2-3x+\cancel{15} = 0.$

~~$\log$~~ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\log_{2x-3}(x+1)(x^2-3x+5) = \frac{1}{\log_{2x-3}x^2-3x+15} = 0$

$\log_{2x-3}(x^3-3x^2+15x+x^2-3x+5$

x^3-2x^2+1x-5

$НОД(a;b;c) = 35$

$НОК(a;b;c) = 5^{15}\cdot 7^{16}$

$5\cdot 7$

$5^{18}\cdot 7^{16}$

18

1

18

$2\cdot 3\cdot 16$

$5^{15}\cdot 7^{13}$

$15+13 = 28 \mid 4$

7

1

1

1

35. 7 пар. $\cancel{7\cdot 6:5} = 42$

35

2

11 18

18 11

$2\cdot 3!$

$21\cdot 6$

много:

$2\cdot 3\cdot 16+2\cdot 3$

$2\cdot 3\cdot 14+2\cdot 3$

$4x^2-7x+8=0$

$a=4$ $D=49-$ $\frac{32}{128}$

$b=-7$

$c=8$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{(x+1)}2x^2-3x+5$

$\cancel{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=}$

$\frac{1}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}}=\log_{x+1}2x^2-3x+5$

$(\sqrt{2x-3}-1)(x=x\cdot 2x^2-3x+5$

$\sqrt{2x-3}-1=2x^2-3x+5$

Нод $(a;b;c)$ нок $(a\cdot b\cdot c)$

$3,5$

5^2

$\sqrt{2x-3}=2x^2-3x+6$

$2x-3=4x^4+9x^2+36-12x^3+24x^2-36x$

$4x^4+33x^2-12x^3-38x+39=0$

$x^2(4x^2+3-12x+33)-38x+39$

$a\cdot b\cdot c=35$

112 - разные

211

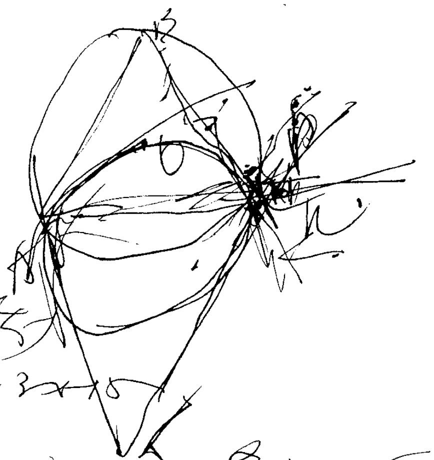
$\frac{1}{2}\log_{2x-3}x+1-\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$\frac{\frac{1}{2}\log_{2x-3}x+1\cdot\frac{1}{2}\log_{2x-3}2x^2-3x+5}{\frac{1}{2}\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\cancel{2x-3}$ $\cancel{(x+1)}$

5



$\log_{2x-3}(x+1) = \log$ $+ 1 / 2x^2 - 3x + 5$

$\log_{x+1} 2x-3 = \log_{x+1} 2x^2-3x+5$

$\log_{x+1} 2x-3$ $= \log_{x+1} 2x^2-3x+5$

$\cancel{(x+1)}$ $2x^2-3x+5$

$$\begin{cases} 2x^2-3x+5 = x+1 \\ (2x-3)^2 = 2x^2-3x+5 \end{cases}$$

$(2x^2-3x+5)^2 = 2x$

$a = b$

$a - c = 1$

$a = c + 1$

$$\begin{cases} 2x^2-3x+5-x+1 = 0 \\ 4x^2-12x+9-2x^2+3x-5=0 \end{cases}$$

$x^2-3x+5=1$

$2x^2-4x+6=0$

$2x^2-3x+4=0$

$2x^2-3x+4$

$a=2$, $b=-3$

$a=1$, $b=-3$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_{\sqrt{2x-3}} (x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$-1 \log_{2x-3} x+1 = \log$ $2x-3$

5

x^2

$\sqrt{2x-3} = x+1$

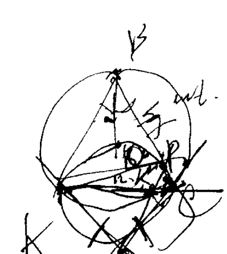
$2x^2-3x+5 = x+1$

$\cancel{2x-3}$ $\cancel{x^2+2x+1}$

$2x+1$ $= x+1$

$\sqrt{2x-3}$

$2x^2-3x+5$



$$\begin{cases} 2x^2-4x+1=0 \\ x^2-3x \end{cases}$$

$2x-3 = x^2+2x+1$

$2x^2-3x+5-x+1=0$ $-2x+3$

x^2+2x+1

$2x^2-4x+6=0$

4