Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104228**

ID профиля: **851470**

Вариант 21

Чистовик

№1

$a_1, a_2, \dots, a_7$

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = S;$

$\frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = S;$

$\frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = S;$

$\frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = S;$

$(a_1 + 3d) \cdot 7 = S$

1) $a_8 \cdot a_{17} > S + 27;$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S + 27;$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S + 27$

2) $a_{11} \cdot a_{14} < S + 60;$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60;$

$a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60;$

3) $a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 > a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2;$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 130d^2 - \cancel{a_1^2} - \cancel{23a_1 d} - 112d^2 > 0;$

$8d^2 > 0$

$d > 0$, т.к. арифм. прогр. возраст. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_{11} \cdot a_{14} > a_8 \cdot a_{17}$

4) Пусть $a_8 \cdot a_{17} = S + 27 + m$, где $m \in N$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60;$

$a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 + 8d^2 =$

$= a_8 \cdot a_{17} + 8d^2 = S + 27 + m + 8d^2 < S + 60;$

$S + 27 + m + 8d^2 < S + 60;$

$8d^2 < \cancel{S} + 60 - \cancel{S} - 27 - m = 33 - m;$

$8d^2 < 33 - m$

Чистовик

№1 (Продолжение)

5) $8d^2 < 33 - m$

т.к. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, а $a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$

т.к. $d > 0 \Rightarrow d \in \mathbb{N}$

$8d^2 < 33 - m$

при $d = 1$ сущ. такие m, что $8d^2 < 33 - m$;

$8 < 33 - m$;

при $d \geq 2$

$8d^2 \geq 32$,

т.к. $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \geq 1 \Rightarrow 33 - m \leq 32$

$32 \leq 8d^2 < 33 - m \leq 32$;

$32 < 32 \Rightarrow$ неверно $\Rightarrow$ ед. возм. вариант - это $d = 1$

6) при $d = 1$

$a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60$;

$a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7 \cdot (a_1 + 3d) + 60$;

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7 \cdot (a_1 + 3) + 60$;

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$;

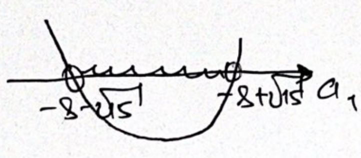
$a_1^2 + 16a_1 + 130 < 81$;

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$;

$D_1 = 64 - 49 = 15$

$a_1 = -8 + \sqrt{15}$

$a_2 = -8 - \sqrt{15}$



$a_1 \in (-8 - \sqrt{15}; -8 + \sqrt{15})$

Чистовик

№1 (Продолжение)

7) при $d=1$

$a_1^2+23a_1d+112d^2>(a_1+3d)\cdot 7+27;$

$a_1^2+23a_1+112>(a_1+3)\cdot 7+27;$

$a_1^2+23a_1+112>7a_1+21+27;$

$a_1^2+16a_1+112-48>0;$

$a_1^2+16a_1+64>0;$

$(a_1+8)^2>0;$

$a_1+8\neq 0;$

$a_1\neq -8;$

8) т.к. $a_1\in(-8-\sqrt{15};-8+\sqrt{15}),\ a\in Z\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_1>-8-\sqrt{15}>-12;$

$-12<-8-\sqrt{15}<-11$

$a_1<-8+\sqrt{15}<-4$

$-5<-8+\sqrt{15}<-4;$

$3<\sqrt{15}<4;$

$\sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}\Rightarrow$

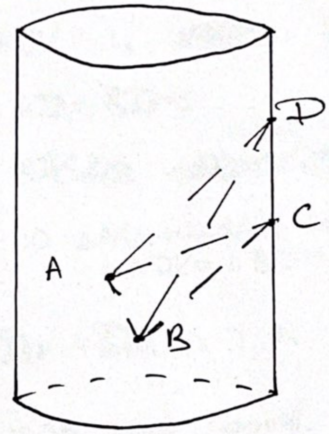
$\Rightarrow\ a_1\in\{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5\}$

с учётом $a_1\neq -8$ получаем, что $a_1\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$

Ответ: $a_1\in\{-11;-10;-9;-7;-6;-5\}$

Чистовик

№2

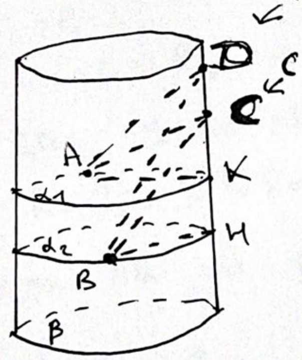


1) Т.к. CD ∥ оси цилиндра, и т.к. т. C, т. D ∈ бок. поверхности цилиндра ⇒ CD – лежит на одной из образующих цилиндра

2) Рассм. △BCD и △ACD:

1. BC = AC = 5
2. BD = AD = 6
3. CD – общ. ⇒ △BCD = △ACD (по 3-ему призн. равенства △-ов) ⇒

⇒ ∠ACD = ∠BCD как соотв. эл-ты равных △-ов
∠ADC = ∠BDC как соотв. эл-ты равных △-ов



3) Проведём 2 пл. α_1 и α_2 через т. A и т. B соотв., $\alpha_1 \parallel \beta$, $\alpha_2 \parallel \beta$, где β – пл. основания цилиндра

4) ~~Рассм.~~ Пусть $CD \cap \alpha_1 =$ т. K
$CD \cap \alpha_2 =$ т. H

5) $CD \perp \beta$, $\alpha_1 \parallel \beta \Rightarrow CD \perp \alpha_1 \Rightarrow$
⇒ т.к. $AK \subset \alpha_1 \Rightarrow AK \perp CD$ (по опред. прямой, ⊥-ой пл.)

6) $CD \perp \beta$, $\alpha_2 \parallel \beta \Rightarrow CD \perp \alpha_2 \Rightarrow BH \subset \alpha_2 \Rightarrow$
⇒ $BH \perp CD$ (по опред. прямой, ⊥-ой пл.)

Чистовик

№2 (Продолжение)

7) Рассм. $\triangle ADK$ и ~~$\triangle ADH$~~ $\triangle BDH$:

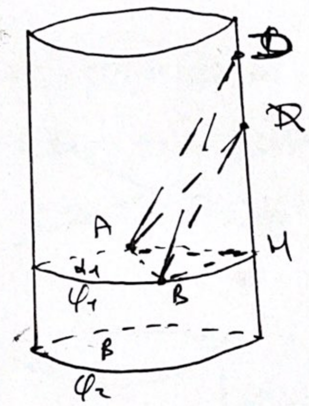
1. $AD = BD = 5$

2. ~~$\angle ACK$~~ ~~$\angle ADK = \angle BDH$~~ $\angle ADK = \angle BDH$ =>

=> ~~$\triangle ACK = \triangle BCH$~~ (по ~~катету~~ гипотенузе и $\triangle ADK = \triangle BDH$ $\angle$-у) =>

=> $DK = DH$ => т. K и т. H совп.

$AK = BH$ как соотв. эл-ты равных $\triangle$ов



8) Если AB диаметр окр. φ_1 (φ_1 лежит в α_1, $\alpha_1 \parallel \beta$, окр. φ_1 явл. проекцией окр. φ_2 на пл. α_1) =>

=> $2R = 4$;
$R = 2$ => $R_{цил.} = 2$

Если AB не явл. диаметром => AB - хорда =>

=> $R > \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ => $R_{цил.} > 2$ => наименьший R дост., когда AB явл. диаметром => $R_{цил.} = 2$

9) $\triangle ABH$ - впис. в окр. φ_1, $\angle AHB$ - впис., AB - диаметр => $\triangle AHB$ - прям. => $AB^2 = AH^2 + BH^2$ (по Т Пифагора);

$2AH^2 = 16$;
$AH^2 = 8$;
$AH = 2\sqrt{2}$

Чистовик

№2 (Продолжение)

10) $\triangle AHD$ - прям. $\Rightarrow DH^2 + AH^2 = AD^2$ (по Т Пифагора);

$$DH^2 + 8 = 36;$$
$$DH^2 = 28;$$
$$DH = 2\sqrt{7};$$

11) $\triangle ACH$ - прям. $\Rightarrow AH^2 + HC^2 = AC^2$ (по Т Пифагора);

$$8 + HC^2 = 25;$$
$$HC^2 = 17;$$
$$HC = \sqrt{17};$$

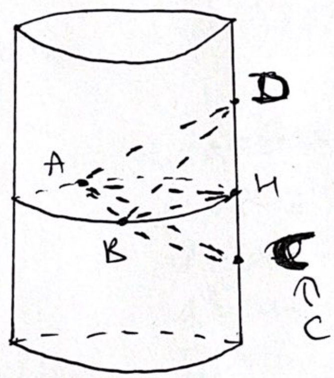
12) $HC + CD = HD$ (по свву сум. отр.);

$\cancel{CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17};}$

$\cancel{CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17};}$

$\sqrt{17} + CD = 2\sqrt{7};$

$CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$



13) Теперь рассм. случай, когда т. A и т. B лежат между т. C и т. D $\Rightarrow$

$\Rightarrow HC = \sqrt{17}$

$HD = 2\sqrt{7};$

14) $CD = CH + HD$ (по свву сум. отр.);

$$CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$$

15) Когда т. A и т. B будут лежать выше CD получим, что $CD = \sqrt{17} - 2\sqrt{7}$, что невозм.

Значит, $CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$ либо $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Ответ: $CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$, $CD = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Чистовик

N3

~~Решение~~

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 \quad (1) \\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20) \quad (2)\end{cases} \Rightarrow \text{вып. сист. нер-в}$$

Ищем все такие x и y, при которых нер-ва (1) и (2) имеют хотя бы 1 реш. $(b;a)$

1) $(a-x)^2+(b-y)^2\le 20 \Rightarrow$ круг. $R=2\sqrt{5}$ с центром в т. $(y;x)$

2) $a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)$

$8a-4b\ge 20$;

$8a\ge 4b+20$;

$a\ge 0{,}5b+2{,}5$

при $a\ge 0{,}5b+2{,}5$ $a^2+b^2\le 20 \Rightarrow$ части круга с центром в т. $(0;0)$ и $R=2\sqrt{5}$

при $a<0{,}5b+2{,}5$

$a^2+b^2\le 8a-4b$;

$a^2-8a+b^2+4b\le 0$;

$a^2-8a+16+b^2+4b+4-16-4\le 0$;

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20 \Rightarrow$ части круга с центром в т. $(-2;4)$ и $R=2\sqrt{5}$

Черновик

№1

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$

$a_1+a_2+\dots+a_7=S$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S+60$

$a_1+a_2+\dots+a_7=S;$

$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=S;$

$\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=S;$

$\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7=S;$

$(a_1+3d)\cdot 7=S;$

$\times\frac{16}{7}$ 112

$a_8 \cdot a_{17} > S+27;$

$(a_1+7d)(a_1+16d) > S+27;$

$a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7(a_1+3d)\cdot 7+27;$

$a_1^2+a_1(23d-7)-21d+112d^2>27;$

$D=\cancel{529}d^2-\cancel{322}d+49+84d-448d^2=$

$=81d^2-238d+49$

23×23: 69, 46, 529

23×14: 92, 23, 322

$52 + 29 = 81$

$\cancel{238}$

$644 - 84 = 560$

$322 - 84 = 238$

$(a_1+10d)(a_1+13d) < S+60;$

$a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60;$

$a_1^2+23a_1d+130d^2-(a_1^2+23a_1d+112d^2)=$

$=\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+130d^2-\cancel{a_1^2}-\cancel{23a_1d}-112d^2=$

$=18d^2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2+23a_1d+130d^2 > a_1^2+23a_1d+112d^2;$

~~$a_1^2+23a_1d$~~

$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > S+27,$ $\quad (a_1+7d)(a_1+16d) > S+27,$

$a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 < S+60,$

$S = (a_1+3d)\cdot 7;$

$8d^2 + \cancel{S} + k < \cancel{S} + 60,$

$8d^2 + k < 60,$

$8d^2 < 60 - k$

$k \geq 27,$

$8d^2 < 60 - 27 - m = 33 - m;$

$8d^2 \leq 33 - m,$

$d = 1,$ при $d=2$

$32 \leq 33 - m$

$m \geq 1$

$32 < 33 - m \leq 32 \rightarrow$ неверно

-910
112
-48
64

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7\cdot(a_1+3) + 27;$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27;$

$a_1^2 + 16a_1 + 112 - 48 = a_1^2 + 16a_1 + 64 > 4$

$(a_1+8)^2 > 4$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 \leq 7(a_1+3) + 60,$

$a_1^2 + 16a_1 + 130 < 21 + 60;$

$a_1^2 + 16a_1 + 130 - 81 = a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0,$

$D_1 = 64 - 49 = 15$

$a_1 = \frac{-8+\sqrt{15}}{1}$

$a_2 = -8 - \sqrt{15}$

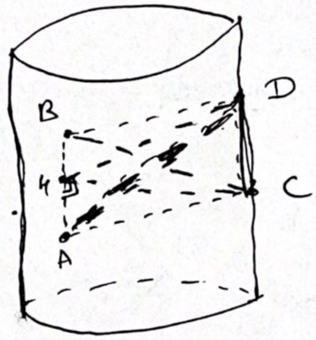
$-8 - \sqrt{15} < a \leq -8 + \sqrt{15};$

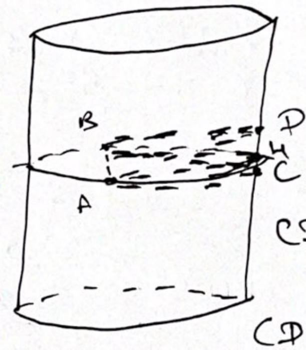
$a \in \{-19; -18; -17; -16; -15; -14; -13\}$

Ответ: $a \in \{-19; -18; -17; -16; -15; -14; -13\}$

№2

Черновик



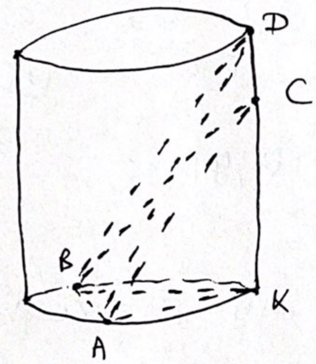


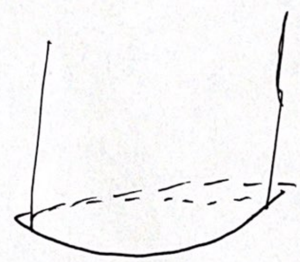
$HD = 2\sqrt{7}$

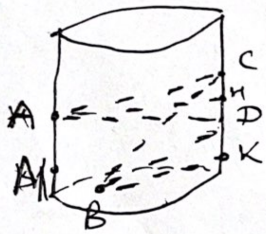
$CH = \sqrt{17}$,

$CD = CH + HD$ (по св-ву отр.);

$CD = \sqrt{17} + 2\sqrt{7}$





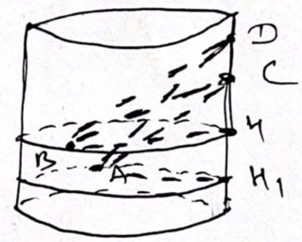


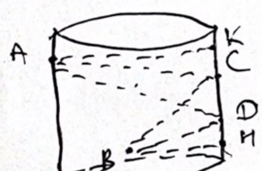
$AK^2 + BK^2 = 16$,

$2AK^2 = 16$,

$AK^2 = 8$,

$AK = 2\sqrt{2}$,





$AK^2 + KC^2 = AC^2$ (по Т Пифагора);

$CK^2 = 25 - 8 = 17$,

$CK = \sqrt{17}$,

$\triangle AKD$ – прям. $\Rightarrow AK^2 + KD^2 = AD^2$ (по Т Пифагора);

$8 + KD^2 = 36$;

$KD^2 = 28$,

$KD = 2\sqrt{7}$

~~CD=~~

$KC + CD = KD$ (по св-ву отр.);

$\sqrt{17} + CD = 2\sqrt{7}$,

$CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$;

Ответ: $CD = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

$8a-4b > 0,$

$8a > 4b,$

$a > 0{,}5b;$

$8a-4b \ge 20,$

$8a \ge 4b+20,$

$a \ge 0{,}5b + \frac{5}{2};$

$a \ge 0{,}5b+2{,}5;$

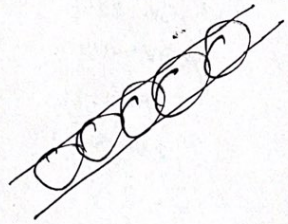
$\min(x;y)$

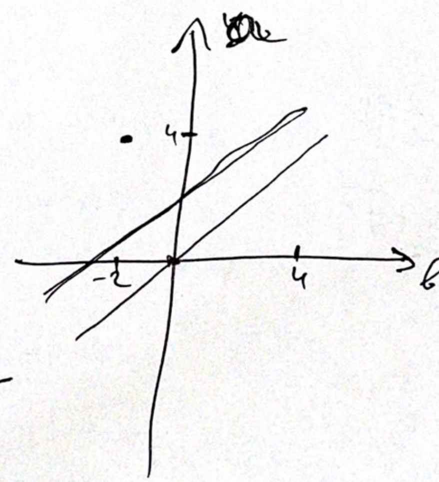
~~0,8~~

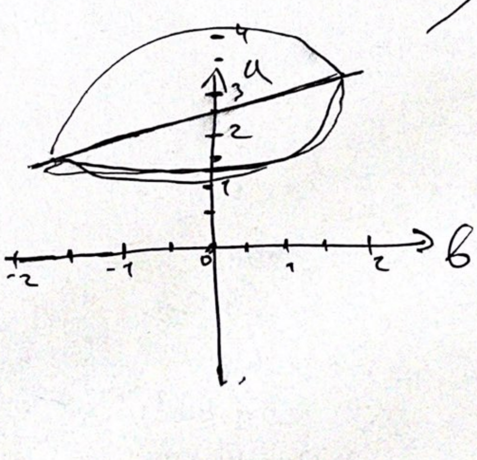
$a^2 - 8a + b^2 + 4b \le 0,$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20;$







Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104228**

ID профиля: **851470**

Вариант 21

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

т.к. $НОД(a;b;c)=5\cdot 7$, а $НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждое из чисел a, b и c можно представить в виде $5^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$

Пусть $a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$

$b=5^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$

$c=5^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

$$НОД(a;b;c)=5^{\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}}\cdot 7^{\min\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}}$$

$\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=1 \Rightarrow$ ~~найдётся~~ найдётся хотя бы 1 число: только 5^1

$\min\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=1$

$$НОК(a;b;c)=5^{\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}}\cdot 7^{\max\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}}$$

$\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=18$

$\max\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=16$

~~Разберём теперь разл. случаи~~

~~1. Пусть~~ $\cancel{a=5^{18}\cdot 7^{16}}$

$\cancel{b=5^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}}$

$\cancel{c=5^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}}$

~~Значит,~~

Чистовик

№4 (Продолжение)

Значит, 2 степени α как существенные — это 1 и 18 ⇒ 3-ья степень может быть любой от 1 до 18 ⇒

⇒ троек α может быть $C_3^1 \cdot 18$

2 степени β как тоже существенные, а 3-ья может быть любой от 1 до 16 ⇒ троек β ~~может~~ может быть $C_3^1 \cdot 16$

Таким образом, общее кол-во способов $= C_3^1 \cdot 18 \cdot C_3^1 \cdot 16 =$

$= 3 \cdot 3 \cdot 18 \cdot 16 = 9 \cdot 16 \cdot 18$

Но, могут попасться повторения.

1) Напр., если в 1-ой тройке мы получили $(5^{18} \cdot 7^{16}; 35; 35)$, где мы выбрали $b = 5^{\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}} \cdot 7^{\min\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}}$, а $c = 35 = 7 \cdot 5$ ⇒

⇒ c мы выбирали самост., и попадётся такая же тройка, но c мы посчитаем как случай минимумов, а b как случай с автономным выбором

2) Или когда у нас 2 числа будут совпадать аналогично, но как максимумы и случай автономного выбора

Пример $(5^{18} \cdot 7^{16}; 35; 5^{18} \cdot 7^{16})$ и $(5^{18} \cdot 7^{16}; 35; 5^{18} \cdot 7^{16})$

случай max; случай авт. выбора; случай авт. выбора; случай max

случаев типа 1 будет 3 $(a = b = 35,\ b = c = 35,\ a = c = 35)$,

а случаев типа 2 тоже будет 3 $\left(C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3\right)$ ⇒

⇒ надо искл. 6 случаев

общ. кол-во $= 9 \cdot 16 \cdot 18 - 6$ троек

Ответ: $9 \cdot 16 \cdot 18 - 6$ троек

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\cancel{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}\cdot\log}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=2\cdot\log_{(2x-3)}(x+1)\cdot2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$=4\cdot\log_{(2x-3)}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)=$

$=4\cdot\log_{(2x-3)}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x-3)=4$

Пусть какие-то 2 числа равны t, тогда 3-е $=t-1$

$t\cdot t\cdot(t-1)=4;$

$t^3-t^2-4=0;$

при $t=2$

$8-4-4=8-8=0\Rightarrow t=2\to$ кор. ур-ия

$$\begin{array}{l|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ \underline{-\ t^3-2t^2} & t^2+t+2 \\ \quad t^2-4 & \\ \quad\underline{-\ t^2-2t} & \\ \quad\quad 2t-4 & \\ \quad\quad\underline{-\ 2t-4} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$(t-2)(t^2+t+2)=0;$

$t^2+t+2=0;$

$D=1-8=-7<0\Rightarrow t\in\varnothing$

Чистовик

№5 (Продолжение)

Значит, какие-то 2 числа = 2, а 3-е равно 1

в 2-ух случаях из 3-ёх $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2;$$
$$x+1=(\sqrt{2x-3})^2;$$
$$x+1=2x-3;$$
$x=4 \Rightarrow$ подх., т.к. $\sqrt{2x-3}=\sqrt{8-3}=\sqrt{5}>0$
$\sqrt{5}\neq 1;$

при $x=4$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{32-12+5}(8-3)^2=\log_{25}(25)=1$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=\log_5 25=2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow$ подх.

Теперь расм. случай, когда $\begin{cases}\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2 \quad (1)\\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2\\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1\end{cases} \Leftrightarrow$

при $x=4$ $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$

~~log x+1~~

при $x=1$ $2x-3=2-3=-1 \Rightarrow \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=1\end{array}\right.\\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2\\ \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

1) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2;$

$2x^2-3x+5=x^2+2x+1;$

$x^2-5x+4=0;$

$x=4,\ x=1$

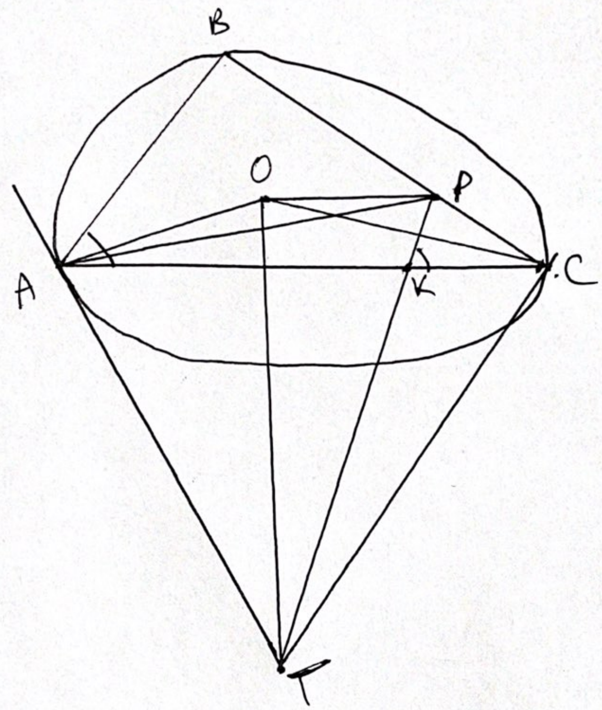
~~[illegible]~~

Значит, ~~[illegible]~~ 2 их этих чисел равны, а 3-е меньше их на 1 при $x=4$

Ответ: $x=4$

Чистовик

N6



1) $TA = TC$ как отр. кас., провед. из одной т. к одной окр.

2) чет. $TAPC$ впис. в окр, опис. около $\triangle AOC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = 0{,}5 \cup AT$

$\angle TPC = 0{,}5 \cup TC$

$AT = TC \Rightarrow \cup AT = \cup TC \Rightarrow \angle APT = \angle TPC \Rightarrow PT$ - бис-са $\angle APC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KPC = 0{,}5 \angle APC$

3) $\angle AOC = 0{,}5 \cup AC = \angle APC \Rightarrow \angle KPC = 0{,}5 \angle AOC$

4) из окр. w $\angle AOC = \cup AC = 2 \cdot 0{,}5 \cup AC = 2\angle B \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KPC = 0{,}5 \angle AOC = 0{,}5 \cdot 2\angle B = \angle B$;

Чистовик

N6

5) Рассм. $\triangle KPC$ и $\triangle ABC$:

1. $\angle KPC = \angle ABC = \angle B$

2. $\angle C$ – общ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle KPC \sim \triangle ABC$ (по 1-ому призн. п-ия $\triangle$ов) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2$

6) $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}} = 1\frac{1}{3}$;

~~AK = 1⅓KC~~ $AK = 1\frac{1}{3}KC$

7) $AC = AK + KC$ (по св-ву изм. отр.);

$AC = 2\frac{1}{3}KC$;

8) $\frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{KC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{KC}^{1}}{\frac{7}{3}\cancel{KC}_{1}}\right)^2 = \frac{9}{49}$;

$S_{ABC} = \frac{49}{9} \cdot S_{KPC} = \frac{49}{\cancel{9}_{1}} \cdot \cancel{9}^{1} = 49$;

$S_{ABC} = 49$;

Ответ: $S_{ABC} = 49$)

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$

$b = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

$35 \cdot 5^{\alpha_1 - 1} \cdot 7^{\beta_1 - 1} \cdot 5^{\alpha_2 - 1} \cdot 7^{\beta_2 - 1} \cdot 5^{\alpha_3 - 1} \cdot 7^{\beta_3 - 1} = 5^{18} \cdot 7^{16}$,

хотя бы 1 число $a = 5 \cdot 7^{\beta_1}$

хотя бы 1 число $= 7 \cdot 5^{\alpha_2}$

~~2е число~~

$35 \cdot 7^{\beta_1 - 1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_3 - 1} \cdot 5^{\alpha_3} = 5^{18} \cdot 7^{16}$,

$7^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\alpha_2 + \alpha_3} = 5^{17} \cdot 7^{15}$,

$\beta_1 + \beta_3 = 15$, $\quad \alpha_2 + \alpha_3 = 17$,

$\beta_1 = 15 - \beta_3$

т.к. все числа $\vdots 5^{\alpha}$, $\vdots 7^{\beta}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow НОК(a;b;c) = 5^{MAX\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}} \cdot 7^{MAX\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}}$

$c = 5^{18} \cdot 7^{16}$,

$a \Rightarrow 18$

$b \Rightarrow 16$

$18 \cdot 16 = 288$

$288 \cdot 3 = 864$

448

$c = 5^{\alpha_3} \cdot 7$, $\quad b = 7^{\beta_3} \cdot 5$,

$\alpha_3 = 18$ $\quad \beta_3 = 15$,

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$

$\alpha_1 \in \{1; \dots ; 18\}$

$\beta_1 \in \{1; \dots ; 16\}$

$188 + 255 = 443$

$18 \cdot 16 = 288$

$16 \cdot 18 = 288$

$17 \cdot 15 = 255$

$a = 35$

$\beta_2 \in \{1;2;\dots;16\}$

$\alpha_3 \in \{1;2;\dots;18\}$

$288 + 255 = 443$

Пусть $a = 5^{\max\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}} \cdot 7^{\beta_1}$

$b = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\max\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}}$

$c = 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

$\beta_1 = 1, \ \alpha_2 = 1$

$\alpha_3 \in \{1; 2; 3; 4; \ldots; 18\}$

$\beta_3 \in \{1; 2; 3, \ldots; 16\}$

$18 \cdot 16$

$\alpha_3 = 1, \ \beta_3 = 1$

$\beta_1 \in \{1; 2; \ldots; 16\}$

$\alpha_2 \in \{1; 2; \ldots; 18\}$

C_3^2 -

$18 \cdot 16 - 1$

(5; 1; 1)

(5; 1; 1)

$\beta_1 = 1, \ \alpha_3 = 1$

$\alpha_2 \in \{1; 2; \ldots; 18\}$

(1; 5; 5)

$\beta_2 \in \{1; 2; \ldots; 16\}$

(1; 5; 5)

$16 \cdot 18 - 1$

$\alpha_2 = 1, \ \beta_3 = 1$

$16 \cdot 18 - 1$

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$;

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$;

$2\cdot\log_{2x-3}(x+1) = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$;

$\log_{2x-3}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$;

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}(2x^2-3x+5) + 1$;

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{x+1}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5) =$

$= \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x-3)^2 = 2\cdot 2\cdot\log_{2x-3}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x-3) =$

$= 4$

$t\cdot t\cdot(t-1) = 4$

$t^3 - t^2 = 4$;

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$t = 2$;

$8 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \to$ подх.

$$\begin{array}{l|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ \hline -\,t^3-2t^2 & t^2+t+2 \\ \quad t^2-4 & \\ -\,t^2-2t & \\ \quad 2t-4 & \\ -\,2t-4 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$t^2+t+2=0$;

$D = 1-8 = -7 < 0 \Rightarrow t \in \varnothing$

$t = 2$;

$\log_{\sqrt{2x+3}}(x+1) = 2$;

$x+1 = 2x+3$;

$x = [illegible]$;

при $x=-2$ $2x+3 = -4+3 = -1 \Rightarrow$ не подх.

$\cancel{\log_{2x^2-3x+5}}$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2$

$2x^2-3x+5 = x^2+2x+1;$

$x^2-5x+4=0;$

$x_1=4,\ x_2=1;$

при $x=4$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_{25} 25 = 1$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

$x=4 \Rightarrow$ подх.

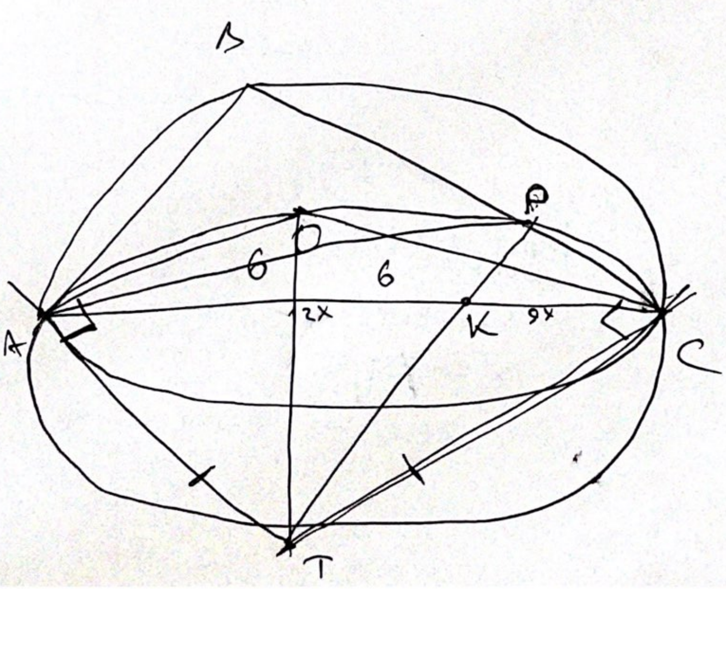
при $x=1$

$2x-3=2-3=-1<0 \Rightarrow$ не подх

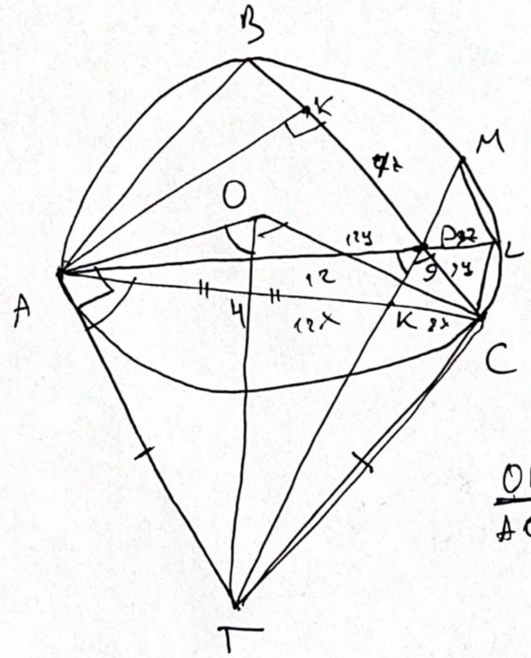
~~при х=2~~

Ответ: $x=4$

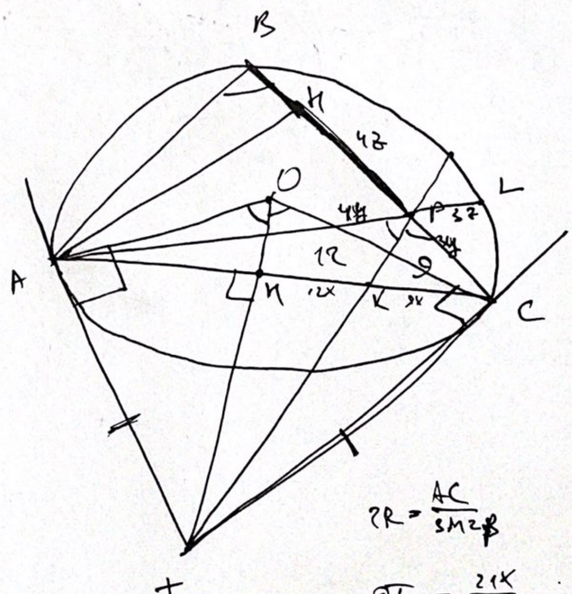
№6



№6



$$\frac{OH}{AO} = \frac{AO}{OT} = \frac{AH}{AT};$$



$$2R = \frac{AC}{\sin 2\beta}$$

$$OT = \frac{21x}{\sin 2\beta};$$

$$AO = \frac{21x}{\sin\beta};$$

$$AT = \frac{21x}{\sin 2\beta} \cdot \sin\beta = \frac{21x}{2\cos\beta};$$