# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104209**

ID профиля: **873598**

Вариант 21

Задание 1 Чистовик

Дано:

$a_1; a_2; a_3 \ldots \in Z$

$a_8 a_{17} > S + 27$

$a_{11} a_{14} < S + 60$

~~Найти:~~

все возможные $a_1$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Шаг последовательности $d$, где $d$ – все целые числа

для расчета формулу арифм. прогрессии

$a_1 + \ldots a_7 = 7 \frac{a_1 + a_7}{2} = 7(a_1 + 3d)$

Из условия составим систему

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > 7(a_1+3d)+27 \\ a_{11} a_{14} < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (a_1+7d)\cdot(a_1+16d) > 7(a_1+3d)+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23d \cdot a_1 + 7 \cdot 16d > 7(a_1+3d)+27 \\ a_1^2 + 23d \cdot a_1 + 10 \cdot 13d < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23d \cdot a_1 - 7(a_1+3d) > \cancel{27} 27 - 7 \cdot 16d \\ a_1^2 + 23d \cdot a_1 - 7(a_1+3d) < 60 - 10 \cdot 13d. \end{cases} \quad +$$

$60 - 10 \cdot 13d > 27 - \cancel{7} \cdot 16d$

$60 - 130d > 27 - 112d$

$18d < 33$

Заметим, что максимально $d$, которое удовл. условие – равно 1

Решим систему при $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23 \cdot a_1 - 7 \cdot (a_1+3) > 27 - 7 \cdot 16 \\ a_1^2 + 23 \cdot a_1 \cancel{-} + 7 \cdot (a_1+3) < 60 - 10 \cdot 13 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16 \cdot a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + \cancel{16a_1} + 49 < 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \\ (a_1+8)^2 \cancel{<} 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -8 \\ a_1 + 8 \in (-\sqrt{15}; +\sqrt{15}) \end{cases}$$

Заметим, что все элементы целые и последовательны, $\Rightarrow a_1 + 8 \in [-3; 3]$ ~~$a_1$~~.

Ответ: ~~$a_1 \ldots [-3; 3]$~~ и $a_1$ может все целые значения от $[-11; -5]$, включая сами числа

~~Ответ: $[-11; -5]$ – целые числа, а также сами числа~~

21104209 (U873598 M1295897)

Пусть $a_1 = -4$ $\quad a_7 = -4 + 2(7-1) = -4 + 12 = 8$

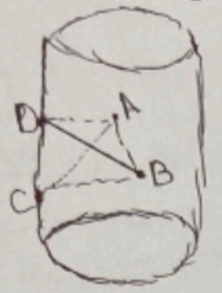
$d = 2$

$S_7 = \cancel{8}\,\frac{-4+8}{2} \cdot 7 = \cancel{2}\ 14$

$a_8 = -4 + 2(8-1) = -4 + 14 = 10$

$\cancel{a_9 =}\ a_{17} = -4 + 2(17-1) = -4 + 32 = 28$

Задание 2 Чистовик




$AB = 4$

$AC = CB = 5$

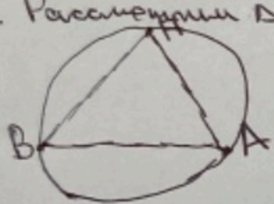
$AD = DB = 6$

$CD - ?$

1. Заметим $CB \parallel$ оси цилиндра, это значит $BA \parallel$ основанию цилиндра, иначе бы не было двух равн/б треугольников.
2. Заметим, что $\triangle CBD = \triangle CAD$, значит высоты $CBD$ и $CAD$ – равны (высота – $F$)

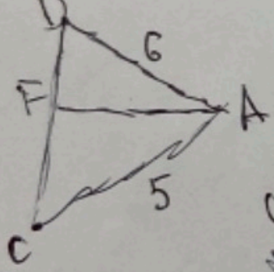
$BF = FA$

3. Рассмотрим $\triangle BFA$




$BA$ – хорда, $\Rightarrow R \geq 2$

4. Пусть $R = 2$



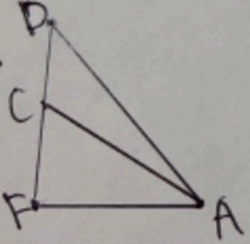

Заметим, что $BA$ – диаметр, $\Rightarrow FA = BF = 2\sqrt{2}$

$\overset{BF}{\cancel{DF}} = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

$CF = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$

$CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

5.




$DF = \sqrt{28}$

$CF = \sqrt{17}$

$CD = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

6. Заметим, что $\triangle$ из пунктов 4 и 5 возможны, соответственно, можно сказать, что $CD = \sqrt{28} \pm \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{28} \pm \sqrt{17}$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$ $\quad d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ Черновик

$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\quad a_1 - ?$

$a_8 a_{17} > S + 27$, $a_{11} a_{14} < S + 60$

$S_7 \in Z$.

Пусть $a_1 = 3$, ~~тогда, если это~~ $\quad a_7 = 3 + 3(7-1)$

$a_2 = 6$

$\cancel{S_7 = 3+3(7-1) = 21}$ $S_7 = \frac{3+21}{2} \cdot 7 = \frac{24}{2} \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84$

$\cancel{a_8 = 3+3(8}$ $a_8 = 3 + 3(8-1) = 24$ $\quad a_{17} = 3 + 3(17-1) = 3 + 48 = 51$

$24 \cdot 51 > 84 + 27$ – подходит

$\cancel{a_{11} = 3 + 3(11-1) = 33}$

$a_{14} = \cancel{3+3}(14-1) = 3 + 39 = 42$

Пусть $a_1 = 1$ $\quad a_7 = 1 + 3(7-1) = 1 + 18 = 19$

$d = 3$

$\cancel{S_7 = \frac{1+19}{2} \cdot 7 = 10 \cdot 7}$

$a_8 = 1 + 3(8-1) = 1 + 21 = 22$

Пусть $a_1 = -3$

$d = 2$

$a_7 = -3 + 2(7-1) = -3 + 12 = 9$

$\cancel{S_7 = 3}$

$\cancel{S_7 = \frac{-3+9}{2} \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21}$

Пусть $a_1 = -2$ $\quad \cancel{a_1 = -2 + 1(1-1)}$

$d = 1$

$S_7 = \frac{-2+4}{2} \cdot 7 = 7$ $\quad a_7 = -2 + 1(7-1) = -2 + 6 = 4$

$a_8 = -2 + 1(8-1) = -2 + 7 = 5$ $\quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$

$a_9 \quad a_{10} \quad 11 \quad a_{12} \quad a_{13}$

$a_{17} = -2 + 1(17-1) = -2 + 16 = 14$

$5 \cdot 14 = 70 \quad 7 + 27$

Пусть $a_1 = -4$

$d = 1$ $\quad a_7 = -4 + 1(7-1) = -4 + 6 = 2$

$S_7 = \frac{-4+2}{2} \cdot 7 = -7$ $\quad a_8 = -4 + 1(8-1) = -4 + 7 = 3$

$a_{17} = -4 + 1(17-1) = -4 + 16 = 12$

$-7 + 27 = 20$ $\quad a_{11} = -4 + 1(11-1) = -4 + 10 = 6$

$3 \cdot 12 = 36 > 20$

$a_{14} = -4 + 1(14-1) = -4 + 13 = 9$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104209**

ID профиля: **873598**

Вариант 21

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=$

$2x^2-3x+5>0$

$2x^2-3x+5=0$

$D=9-40$ – при любом значении $x>0$

$2x^2-3x+5=1$ $\quad (x-1,5)^2+2,75=1$

$2x^2-3x+4=0$

$D=9-32$

$(2x-3)^2>0$

$2x-3\neq 0$

$2x\neq 3 \Rightarrow x\neq \frac{3}{2}$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=$

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x>-1 \\ x\neq 0 \end{array}$$

$2x^2-3x+5>0$

$2x^2-3x+5=0$

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

Получаем, что:

$Max(a_1;b_1;c_1) = 18$

$Max(a_2;b_2;c_2) = 16$

$Min(a_1;b_1;c_1) = 1$

$Min(a_2;b_2;c_2) = 1$

1. Рассмотрим все возможные варианты $a_1; b_1; c_1$

Пункт 1.1

$a_1; b_1; c_1$ – разные

Посчитаем общее кол-во вар-тов:

Пусть одно из чисел равно $\underline{1}$,

Другое число равно 18

В таком случае третье число должно быть от 2 до ~~18~~ 17.

Всего имеем $2 \cdot 3 \cdot 16$ вар-тов (96 вар-тов)

Пункт 1.2

Пусть среди $a_1; b_1; c_1$ числа повторяются

В таком случае: одно число равно 18, а два оставшихся равны $\underline{1}$

Два числа равны 18, а другое равно $\underline{1}$

Всего для данного случая имеем $2 \cdot 3 = 6$ вар-тов

Посчитаем общее кол-во комбинаций для $a_1; b_1; c_1$: $2 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 3 = \cancel{104}$ 102

Аналогично посчитаем для $a_2; b_2; c_2$ ($2 \cdot 3 \cdot 14 + 2 \cdot 3$)

Пункт 2. Перемножим полученные ранее значения: $102 \cdot 90 = \cancel{90}$ 9180 кол-во троек натуральных чисел

Ответ: 9180 – кол-во троек натуральных чисел