Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104076**

ID профиля: **337737**

Вариант 21

Черновик

a_1, d

$$S = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1 + 21d$$

$a_8 = a_1 + 7d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{14} = a_1 + 13d$

$a_8 a_{17} = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 \geqslant 7a_1 + 21d + 27$

$a_{11}a_{14} = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48$

$-a_1^2$

$60 - 27 = 33$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1+8)^2 > 0$

$0 + 0 - 18d^2 > -33$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{33}{18} < 2$

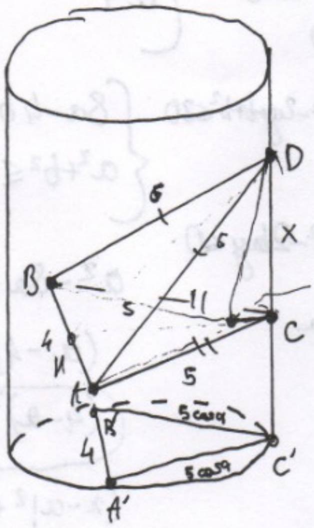
$d = 1$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$(a_1+8)^2 < 15$

$\frac{\times 16 \cdot 7}{112}$ $\frac{112 - 48}{64}$ $\frac{130 - 81}{49}$



α – угол между (ABC) и основанием

$$DH = \sqrt{BD^2 - (AB/2)^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

$$CH = \sqrt{CB^2 - (AB/2)^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$$

$\cos A'C'B' = \frac{}{\sin A'B'}$

$$\cos HCD = \frac{HC^2 + CD^2 - HD^2}{2HC\cdot CD} = \frac{21 + x^2 - 32}{2\sqrt{21}\cdot x} = \frac{x^2-11}{2\sqrt{21}x}$$

$$\cos A'B'C' = \frac{2}{5\cos\alpha}$$

$$\sin A'B'C' = \frac{\sqrt{25\cos^2\alpha - 4}}{5\cos\alpha}$$

$$r = \frac{5\cos\alpha}{2\sin A'B'C'} = \frac{1}{\sqrt{25\cos^2\alpha-4}}$$

$D \geqslant 4$

$r \geqslant 2$

$r = 2$

sin

$$\left[\begin{aligned} HCD &= 90^\circ - \alpha \\ HCD &= 90^\circ + \alpha \end{aligned}\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{25\cos^2\alpha - 4}} = 2$$

$$\sqrt{25\cos^2\alpha - 4} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{x^2-11}{2\sqrt{21}x} &= \sin\alpha \\ \frac{x^2-11}{2\sqrt{21}x} &= -\sin\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\frac{x^2-11}{2\sqrt{21}x} = \frac{\sqrt{83}}{10}$$

$10x^2 - 110 =$

$25\cos^2\alpha - 4 = \frac{1}{4}$

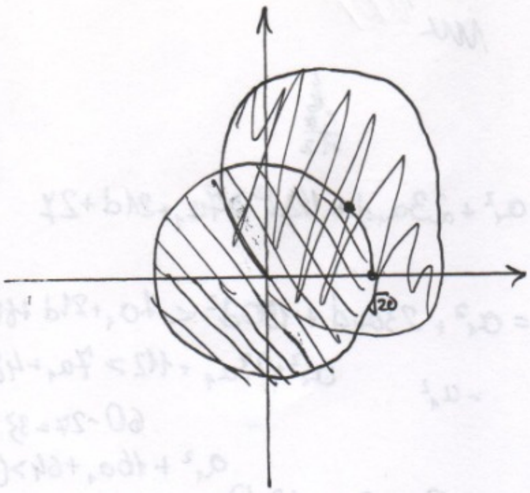
$25\cos^2\alpha = \frac{17}{4}$

$\cos^2\alpha = \frac{17}{100}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{10}$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{17}{100} = \frac{83}{100} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{83}}{10}$

21104076 (U337737 M1298969)



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ – нет решений?

всегда найдётся

$(10000-a)+(1$

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$

1) $8a-4b<20$

$8a < 4b+20$

$a < \frac{b+5}{2}$

$8a-4b<20$

$-4b<20-8a$

$4b>8a-20$

$b>2a-5$

Всегда гарантированно $a=x$, $b=y$ удовлетворяет условию (1)

2) $8a-4b \ge 20$

$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$

$\begin{cases} b>2a-5 \\ a^2 \end{cases}$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le 20$

$x^2-2ax+y^2-2by \le 0$

$x^2+y^2 \le 2a.$

$\begin{cases} 8a-4b<20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b \end{cases}$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$

$(4-a)^2+(-2-b)^2 \le 20$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

При $x=4$ $y=-2$ найдётся

$a=x-t \quad b=y-k$

$(x-x-t)^2+(y-b)^2 \le 20$

$t^2+k^2 \le 20$

$k=\sqrt{20-t^2}$

И вообще $a=x-t$ и $b=y-\sqrt{20-t^2}$

Для $x^2+y^2 \le 20$ всегда подойдёт $(0;0)$

$x^2+y^2 \le \min(8x-4y, 20)$

1) $8x-4y<20$

$\Rightarrow x^2+y^2 \le 8x-4y$

$x^2-8x+y^2+4y \le 0$

$x^2-8x+16+y^2+4y+4 \le 20$

$(x-4)^2+(y+2)^2 \le 20$

21104076 (U337737 M1298969)

Чистовик

№1. Пусть d – знаменатель арифметической прогрессии (т.е. $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$)

Тогда $S = \frac{a_1 + a_1 + (7-1)d}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$, $a_8 = a_1 + 7d$, $a_{17} = a_1 + 16d$, $a_{11} = a_1 + 10d$, $a_{14} = a_1 + 13d$

$$a_8 a_{17} > S + 27$$

$$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$$

$$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$$

$$-a_1^2 - 23a_1d - 112d^2 < -7a_1 - 21d - 27 \quad (1)$$

$$a_{11}a_{14} < S + 60$$

$$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$$

$$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \quad (2)$$

Сложим (1) и (2) и получим $(130 - 112)d^2 < 60 - 27 \Leftrightarrow 18d^2 < 33 \Leftrightarrow d^2 < \frac{33}{18} < \frac{36}{18} < 2$

Т.к. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, то $d \in \mathbb{Z}$, а т.к. $d^2 < 2$, то $\left[\begin{array}{l} d = -1 \\ d = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$, но т.к. прогрессия возрастающая, то $d = 1$. Подставим $d = 1$ в оба неравенства и получим:

$$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \quad \text{и} \quad a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$$

$$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$$

$$(a_1 + 8)^2 > 0$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} (3)$$

$$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$$

$$a_1^2 + 16a_1 + 64 - 15 < 0$$

$$(a_1 + 8)^2 < 15$$

$$\begin{cases} -\sqrt{15} < a_1 + 8 < \sqrt{15} \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

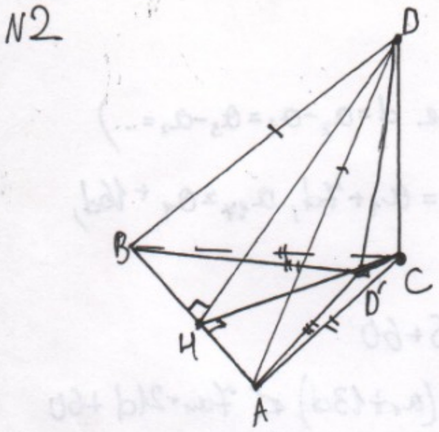
$$\begin{cases} a_1 + 8 \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \\ a_1 \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5\} \end{cases} (4)$$

Объединив (3) и (4) получим, что $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Ответ: $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

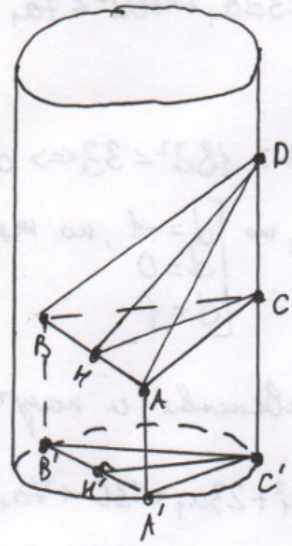
21104076 (U337737 M1298969)

№2

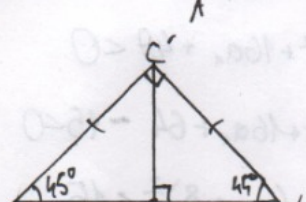


1) Докажем, что $AB \perp CD$. Опустим перпендикуляр из точки D на плоскость (ABC). Пусть он пересечёт плоскость в точке D'. Тогда BD' - проекция BD, а AD' - проекция $AD \Rightarrow BD' = AD'$, т.к. $BD = AD \to D' \in CH$, CH - высота $ABC \Rightarrow CD' \perp AB$. По теореме о трёх перпендикулярах, т.к. $D'C$ - проекция DC и $D'C \perp AB$, то и $DC \perp AB$

2) Впишем тетраэдр в цилиндр. Т.к. $CD \parallel$ оси; то $CD \in$ образующей, т.к. $C, D \in$ боковой поверхности. ~~Т.к.~~ Отсюда $AB \perp$ образующей, а т.к. образующая перпендикулярна плоскости основания, то $AB \parallel$ плоскости основания. Спроецируем (ABC) на плоскость основания. Пусть A' - проекция A, B' - проекция B, C' - проекция C. Т.к. $AB \parallel$ основанию, то $A'B' = AB = 4 \Rightarrow$ радиус основания $r \geq 2$ (т.к. иначе $A'B'$ будет больше диаметра основания). Значит $r_{min} = 2 \Rightarrow A'B'$ - диаметр $\Rightarrow$ $\angle B'C'A' = 90^\circ$. $B'C' = A'C'$, т.к. $BC = AC$, значит $\Delta A'B'C'$ - прямоугольный равнобедренный $\Rightarrow \angle B'A'C' = \angle C'B'A' = 45^\circ$,



$A'C' = B'C' = A'B' \cdot \sin 45^\circ = A'B' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.



Пусть H' - проекция H на основание, тогда $C'H'$ - высота $A'B'C'$; $C'H' = A'C' \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

Угол между (ABC) и $(A'B'C')$ пусть равен α. Тогда если провести через H' прямую параллельную CH, то получится угол, равный $\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{C'H'}{CH}$.

Из равнобедренного ΔABC по т-ме Пифагора $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$. Угол между DC и (ABC) пусть будет равен β. Тогда $\left[\begin{array}{l}\beta = \angle DCH \\ \beta = 180^\circ - \angle DCH\end{array}\right.$. При этом, т.к. $CD \perp (A'B'C')$, то $\alpha + \beta = 90^\circ \to \beta = 90^\circ - \alpha$

$\left[\begin{array}{l}90^\circ - \alpha = \angle DCH \\ 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \angle DCH\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\angle DCH = 90^\circ - \alpha \\ \angle DCH = 90^\circ + \alpha\end{array}\right.$

Найдём DH. Т.к. $BH = HA$ (из ΔABC), а ΔBDA - равнобедренный, то DH - высота $\Delta BDA \Rightarrow DH = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{DB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} =$
$= \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. По теореме косинусов $\cos DCH = \frac{HC^2 + DC^2 - DH^2}{2HC \cdot DC} =$
$= \frac{21 + DC^2 - 32}{2\sqrt{21} \cdot DC} = \frac{DC^2 - 11}{2DC\sqrt{21}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{DC^2-11}{2DC\sqrt{21}} \\ \cos(90^\circ + \alpha) = \frac{DC^2-11}{2DC\sqrt{21}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = \frac{DC^2-11}{2DC\sqrt{21}} \\ \sin\alpha = \frac{11-DC^2}{2DC\sqrt{21}}\end{array}\right.$. Пусть $DC = x$,

а $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{21}} = \sqrt{\frac{17}{21}}$

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} = \dfrac{x^2-11}{2x\sqrt{21}} \quad (1) \\ \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} = \dfrac{11-x^2}{2x\sqrt{21}} \quad (2) \end{array}\right.$$

1) $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} = \dfrac{x^2-11}{2x\sqrt{21}}$

$\sqrt{17} = \dfrac{x^2-11}{2x}$

$2x\sqrt{17} = x^2-11$

$x^2-11-2x\sqrt{17}=0$

$\dfrac{D}{4} = 17+11=28$

$x_1 = \sqrt{17} - \sqrt{28} < 0$

$x_2 = \sqrt{17}+\sqrt{28}$

2) $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}} = \dfrac{11-x^2}{2x\sqrt{21}}$

$\sqrt{17} = \dfrac{11-x^2}{2x}$

$2x\sqrt{17} = 11-x^2$

$x^2+2x\sqrt{17}-11=0$

$\dfrac{D}{4} = 17+11=28$

$x_1 = -\sqrt{17}+\sqrt{28}$

$x_2 = -\sqrt{17}-\sqrt{28}<0$

Итого подходят значения x, то есть DC: $\left[\begin{array}{l} DC=\sqrt{17}+\sqrt{28} \\ DC=\sqrt{28}-\sqrt{17} \end{array}\right.$

Ответ: $\sqrt{28}-\sqrt{17}$; $\sqrt{28}+\sqrt{17}$

N3 Заметим, что для первого неравенства всегда будет подходить пара $(a;b)=(x;y)$. Чтобы второе условие выполнялось, нужно чтобы

$$x^2+y^2 \leq \min(8x-4y;20)$$

1) $8x-4y \leq 20 \iff 4y \geq 8x-20$

$y \geq 2x-5$

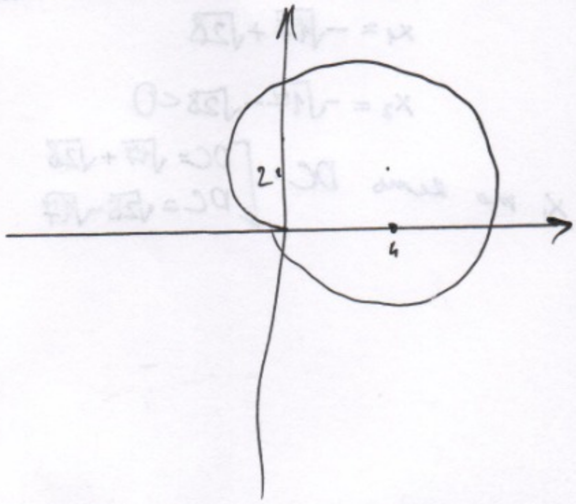
Тогда

$x^2+y^2 \leq 8x-4y$

$x^2-8x+16+y^2+4y+4 \leq 20$

$(x-4)^2+(y+2)^2 \leq 20$

На декартовой плоскости множество отобразится так:



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104076**

ID профиля: **337737**

Вариант 21

Черновик

$НОД(a;b;c)=35$

$НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot7^{16}$

$a\cdot b\cdot c=5^{19}\cdot7^{17}$

$НОД(2;12;8)=2$

$НОК=(2;12;8)=24$

$35\,a^*$

$5^{18}\cdot7^{16}$

$1,2,3,\dots,18$ $\quad 18\cdot16$

$1,2,3,\dots,16$

$5^n\cdot7^k$

5^1

$5^1,5^2,5^3,\dots,5^{18}$

5^{18}

$18n$ $\quad 16\cdot3!=16\cdot6=96$

$$\begin{array}{r}\times\ 102\\ 9\\ \hline 918\end{array}$$

$2x^2-3x+5$

$D=9-40$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$$

$$2\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x-3)}=2\frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)}$$

$$\ln(x+1)\ln(2x^2-3x+5)=\ln^2(2x-3)$$

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2\log_{2x-3}(x+1)$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$$

$a=2x-3$

$b=x+1$

$c=2x^2-3x+5$

$$2\log_a b\cdot2\log_c a\cdot\log_b c=4$$

$y^3+py+q=0$

$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}$

$t^3-t-4=0$

$3t^2-1=0$

$t=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

$t\cdot t(t-1)$

$t^2(t-1)$

$t^3-t=4$

$2^2(2-1)=$

$4\cdot1=4$

2^3-2

$-1+1-4$

$1-1-4$

$8-2-4$

$-8+2-4$

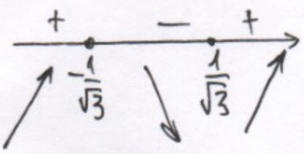
$64-4-4$

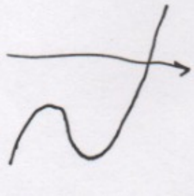
$\frac{27}{8}-\frac{3}{2}-4$

$27-12$ $\quad \frac{15}{8}$

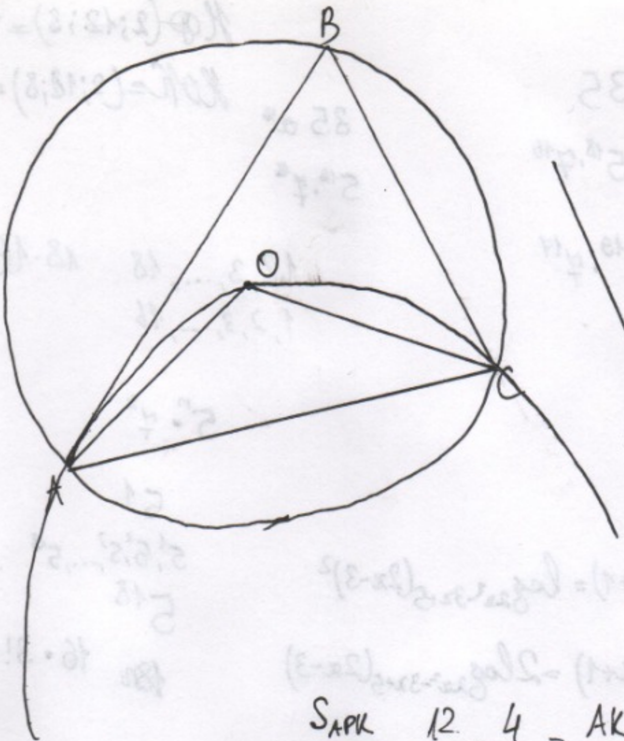
$$\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)^3+\frac{1}{\sqrt3}-4=\frac{1}{3\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}-4<0$$

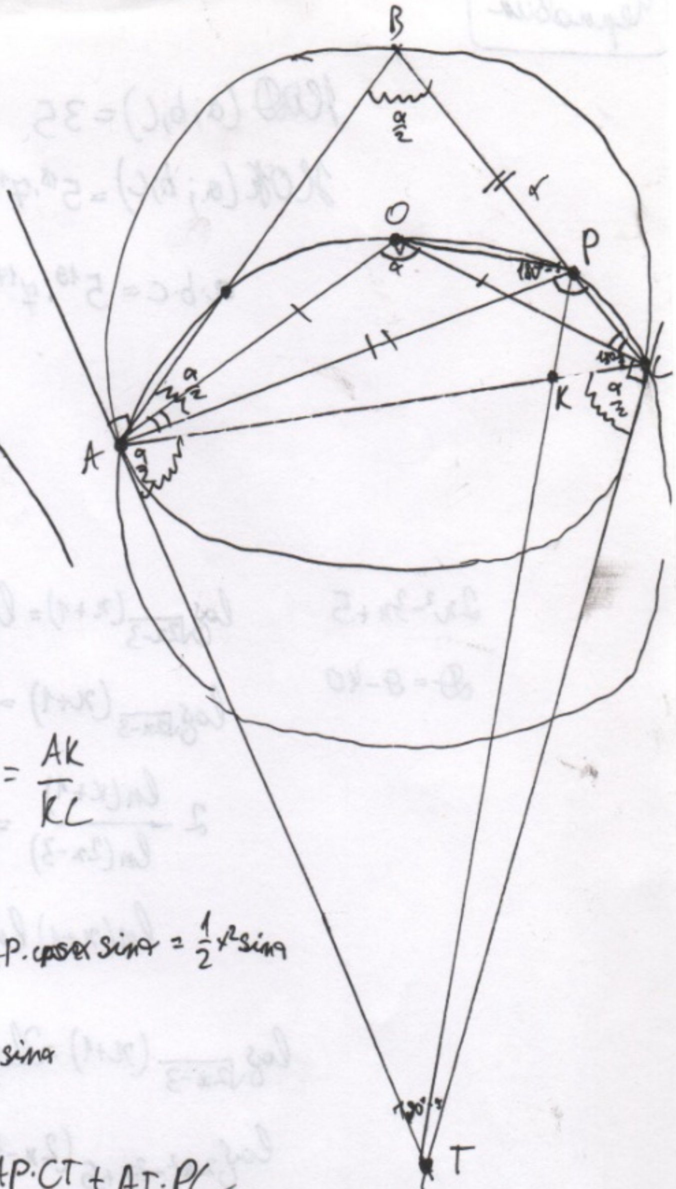
$$\begin{array}{l|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ \underline{-\,t^3-2t^2} & \overline{t^2-t+2} \\ \quad t^2 & \\ \underline{-\,t^2-2t} & \\ \quad 2t-4 & \end{array}$$





21104076 (U337737 M1298970)





$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = \frac{AK}{KC}$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} BP \cdot AP \cdot \cancel{\cos\alpha} \sin\alpha = \frac{1}{2} x^2 \sin\alpha$$

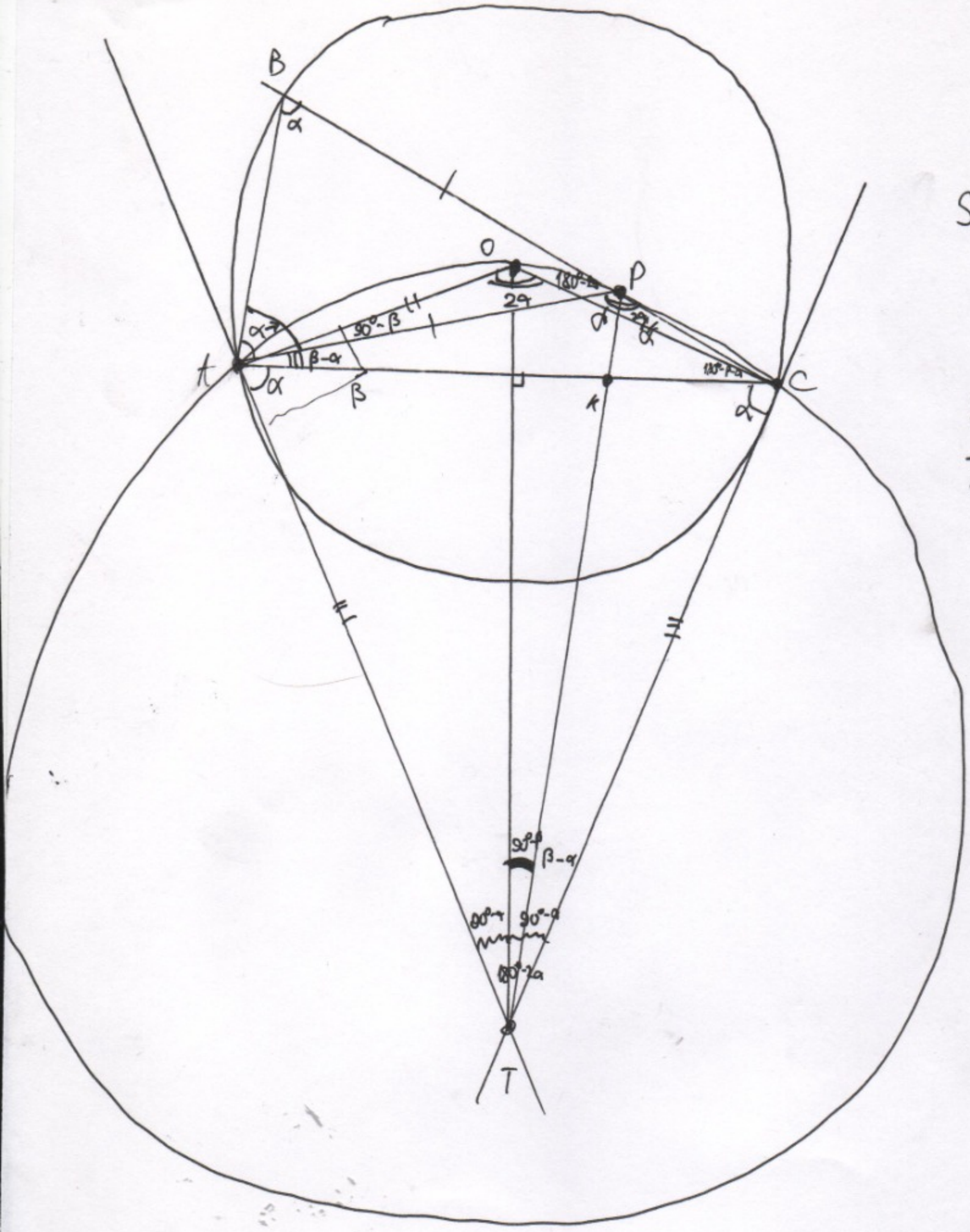
$$S_{APC} = \frac{1}{2} x \cdot PC \cdot \sin\alpha$$

$OC \cdot PA = OA \cdot PC + OP \cdot AC$ $\qquad$ $PT \cdot CA = AP \cdot \underline{CT} + \underline{AT} \cdot PC$

$OA \cdot (PA - PC) = OP \cdot AC$ $\qquad$ $PT \cdot CA = (AP + PC) \cdot AT$

$$\frac{PT}{OP} = \frac{OA}{AT} \cdot \cancel{\frac{AP+PC}{AP-PC}} \; \frac{AP-PC}{AP+BC}$$

$$\frac{PT \cdot AT}{OA \cdot OP} = \frac{AP-PC}{AP+PC} = \frac{BP-PC}{BP+PC} = \frac{BP-PC}{BC}$$



$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = BP \cdot BC \cdot \sin\alpha\cos\alpha$
$= \frac{1}{2} BP \cdot BC \cdot \sin 2\alpha$

$AB = 2BP\cos\alpha$ $\quad \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha$
$=$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{AB \cdot BP \sin\alpha}{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}$$

$$= \frac{AB \cdot BP}{AP \cdot PC}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$\cancel{3AP = 4}$

$AP = \frac{4}{3} PC$

$$\frac{PT \cdot AT}{OA \cdot OP} = \frac{\frac{1}{3} PC}{\frac{7}{3} PC}$$

$$\frac{PT \cdot AT}{OA \cdot OP} = \frac{1}{7}$$

Чистовик

Вариант XXI

№4. Т.к. НОК(a, b, c) делится только на степени 5 и 7, то и a, b, c делятся только на степени 5 и 7. При этом НОД(a;b;c) = 35 = 5·7 ⇒ a, b, c делятся и на 5 и на 7. Значит a, b, c можно представить в виде $a=5^{n_a}\cdot7^{m_a}$; $b=5^{n_b}\cdot7^{m_b}$; $c=5^{n_c}\cdot7^{m_c}$, где $n_a, n_b, n_c, m_a, m_b, m_c \in N$

Т.к. НОД(a;b;c) $=5^1\cdot7^1$, то $\min(n_a, n_b, n_c)=\min(m_a, m_b, m_c)=1$, т.к. НОК(a,b,c) $=5^{18}\cdot7^{16}$, то $\max(n_a, n_b, n_c)=18$ и $\max(m_a, m_b, m_c)=16$. Посчитаем количество комбинаций из $n_a, n_b, n_c, m_a, m_b, m_c$. Для этого отдельно посчитаем количество троек (n_a, n_b, n_c) и (m_a, m_b, m_c). Они независят друг от друга, поэтому общее количество троек (a,b,c) равно произведению кол-во троек (n_a, n_b, n_c) и (m_a, m_b, m_c).

Количество троек (m_a, n_b, n_c): Одно как минимум число из них равно 1, и одно как ~~минимум~~ минимум число равно 18. ~~Разобьём~~ Рассмотрим три случая:

1) Одно число – 1, другое – 18, третье – от 2 до 17. Число таких троек равно $P_3\cdot16=3!\cdot16=6\cdot16=96$
2) Два числа – 1, другое – 18. Число таких троек равно $C_3^2=\frac{3!}{2!\cdot1!}=3$
3) Два числа – 18, другое – 1. Аналогично 2) число таких троек – 3

Итого: $96+3+3=102$

Количество троек (m_a, m_b, m_c): Одно как минимум число из них равно 1, одно как минимум число равно 16. Опять три случая:

1) Одно число – 1, другое 16, третье – от 2 до 15. Число таких троек: $P_3\cdot14=3!\cdot14=14\cdot6=84$
2) Два числа – 1, другое – 16. $C_3^2=3$
3) Два числа – 16, другое – 1, $C_3^2=3$

Итого: $84+3+3=90$

Всего троек (a;b;c): $102\cdot90=9180$

Ответ: 9180

N5 Вычислим ОДЗ:

1) $\sqrt{2x-3}\neq1$ — 1) $x\neq2$
2) $2x-3>0$ — 2) $x>\frac{3}{2}$
3) $x+1>0$ — 3) $x>-1$
4) $2x^2-3x+5>0$ — 4) $D=9-4\cdot2\cdot5<0$ – нулей нет, ~~при этом~~: $2x^2-3x+5>0$ – выполняется всегда

5) $2x^2-3x+5\neq1$ — 5) $2x^2-3x+4\neq0$, $D=9-2\cdot4\cdot4<0$ – корней нет
6) ~~2x~~ ~~-3~~ $x+1\neq1$

Чистовик   б) $x \neq 0$

Объединим условия: $\begin{cases} x \neq 2 \\ x > \frac{3}{2} \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$

Пусть $a = 2x-3$, $b = x+1$, $c = 2x^2-3x+5$. Тогда

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_c a^2 = 2\log_c a$$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_b c$$

Заметим, что их произведение $2\log_a b \cdot 2\log_c a \cdot \log_b c = 4 \cdot \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln c} \cdot \frac{\ln c}{\ln b} = 4$

Пусть равные логарифмы равны t, тогда третий равен $t-1$. Получаем

$$t \cdot t \cdot (t-1) = 4$$

$$t^3 - t^2 - 4 = 0$$

Заметим, что при $t=2$ есть решение. Разделим t^3-t^2-4 на $t-2$ и получим t^2-t+2

$$(t-2)(t^2-t+2) = 0$$

$\left[\begin{array}{l} t=2 \quad (1) \\ t^2-t+2=0 \quad (2) \end{array}\right.$ (2) $D = 1 - 2\cdot 4 < 0$ - корней нет

Тогда $t=2$. Рассмотрим три случая:

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 1$, остальные -2

$\sqrt{2x-3} = x+1$

$2x-3 = x^2+2x+1$

$-3 = x^2+1$ - нет корней

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 1$, остальные -2

$2x^2-3x+5 = (2x-3)^2$

$2x^2-3x+5 = 4x^2-12x+9$

$2x^2-9x+4=0$

$D = 81-32 = 49$

$x_1 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \notin$ ОДЗ

$x_2 = \frac{9+7}{4} = 4 \in$ ОДЗ

При $x=4$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{\sqrt{8-3}}(4+1) =$

$= \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_5(2\cdot 4^2 - 3\cdot 4+5) =$

$= \log_5 25 = 2$ - $x=4$ подходит

3) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=1$, остальные ~ 2

$$x+1=2x^2-3x+5$$

$$2x^2-4x+4=0$$

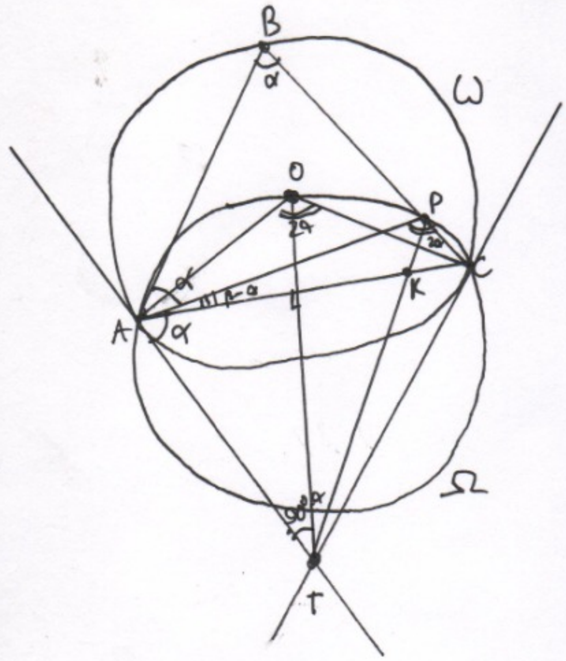
$$x^2-2x+2=0$$

$$(x-1)^2+1=0 \text{ — нет корней}$$

Ответ: $x=4$

Чистовик

Чистовик



а) Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (потому что $\angle AOC$ - центральный угол, $\angle ABC$ - вписанный и они опираются на одну дугу) $\Rightarrow$

$\angle APC = 2\alpha$ (опираются на одну дугу) $\Rightarrow$

$\angle APB = 180° - 2\alpha$, как смежный

В ΔABP $\angle BAP = 180° - \angle BPA - \angle APB = 180° - \alpha - 180° + 2\alpha = \alpha$.

Пусть $\angle BAC = \beta$. Тогда $\angle PAC = \beta - \alpha$ ($\angle BAC - \angle BAP$).

Тогда из ΔAPC: $\angle PCA = 180° - \angle PAC - \angle APC = 180° - 2\alpha - \beta + \alpha = 180° - \alpha - \beta$.

TO - биссектриса угла ATC и $OT \perp AC$, т.к. $AT = TC$ из св-ва касательных. При этом $\angle AOT = \angle TOC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha \Rightarrow \angle ATO = 90° - \angle AOT = 90° - \alpha$

$\angle CAT = 90° - 90° + \alpha = \alpha$. Тогда $\angle PAT = \angle PAC + \angle CAT = \beta - \alpha + \alpha = \beta$. ~~Отсюда $\angle OAP = \angle OAT - \angle PAT = 90° - \beta$. Отсюда $\angle OCP = 90° - \beta$ как вписанный и опирающийся на~~

$\angle ATC = 2\angle ATO = 180° - 2\alpha$

$\angle AOC + \angle ATC = 180° - 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow$

AOCT - вписанный $\Rightarrow T \in$ окружности Ω

Значит $\angle APT = \angle ACT = \angle CAT = \alpha$ как вписанные и опирающиеся на одну хорду $\Rightarrow$ PT - биссектриса $\angle APC \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC}$

Из ΔABP следует, что $AB = 2BP \cdot \cos\alpha$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2B\beta$

21104076 (U337737 M1298970)