Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103914**

ID профиля: **816426**

Вариант 21

3 продолжение...)

Математика, 11 кл

Чистовик

1) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$\vdots$

$a_7 = a_1 + 6d$

I) $\begin{cases} a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 7a_1d + 112d > S + 27 \\ a_1^2 + 13a_1d + 10a_1d + 130d < S + 60 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1d + 112d > S + 27 \\ a_1^2 + 23a_1d + 130d < S + 60 \end{cases}$

$+\begin{cases} a_1^2 + 23a_1d + 112d > S + 27 \\ S + 60 > a_1^2 + 23a_1d + 130d \end{cases}$

$112d + S + 60 > S + 27 + 130d$

$33 > 18d$

II) $d < \frac{33}{18}$; $d < 1\frac{15}{18}$

Так как арифметическая прогрессия состоит из целых чисел, то $d = 1$ (так как она ещё и возрастающая)

III) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 7a_1 + \frac{d + 6d}{2} \cdot 6 = 7a_1 + 21d = 7a_1 + 21$ (т.к. $d = 1$)

IV) $(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S + 27$

$(a_1 + 7)(a_1 + 16) > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1 + 8)^2 > 0$

$a_1 \neq -8$

V) $(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60$

$(a_1 + 10)(a_1 + 13) < 7a_1 + 21 + 60$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$D = 256 - 4 \cdot 49 = 60$

$a_1 = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$

$+ \quad - \quad +$

$-8 - \sqrt{15} \quad -8 + \sqrt{15} \approx -4$

≈ -12

$a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

Ответ: $a_1 = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

1

21103914 (U816426 M1304228)

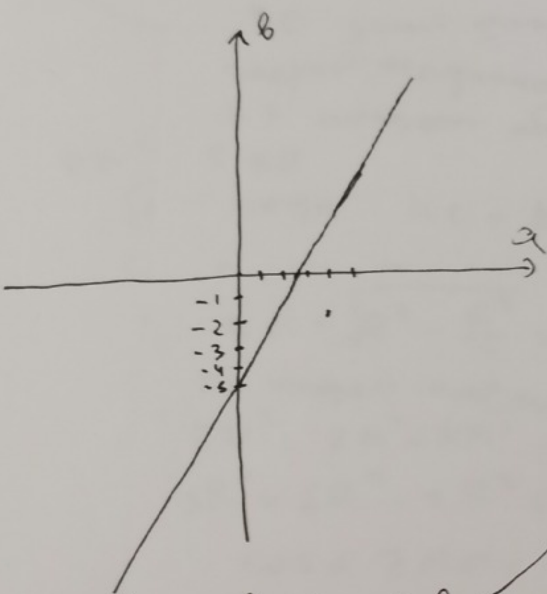
Чистовик Математика, 11 кл

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b;20) \end{cases}$

$8a-4b=20$

$b=2a-5$

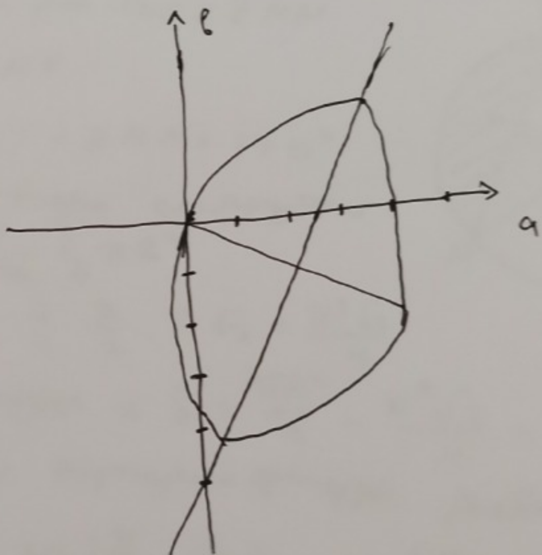
Если $8a-4b<20$, тогда подходят значения a и b в верхней полуплоскости ограниченной прямой $b=2a-5$ иначе подходят a и b в нижней полуплоскости



$a^2+b^2 \le 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20$

$\begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$



подставим $b=2a-5$ в

1) $(a-4)^2+(2a-5+2)^2 \le 20$

$a^2-8a+16+4a^2-12a+9 \le 20$

$5a^2-20a+5 \le 0$

2) $a^2+(2a-5)^2 \le 20$

$a^2+4a^2-20a+25 \le 20$

$5a^2-20a+5 \le 0$

$a^2-4a+1 \le 0$

$D=16-4=12$

$a=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$b=-5+2(2\pm\sqrt{3})=-1\pm2\sqrt{3}$

Как видно окружности пересекают прямую $b=2a-5$ в одинаковых точках, ~~тогда~~ также заметим что эти части окружностей симметричны, так как $a^2+b^2\le20$ проходит через точку $(a;b)=(4;-2)$, и $(a-4)^2+(b+2)^2\le20$ проходит через точку $(a;b)=(0;0)$, ~~эти не~~ тогда эти части окружностей равны, (так как они пересекают $b=2a-5$ в одинаковых точках то дуги этих частей окружностей равны)

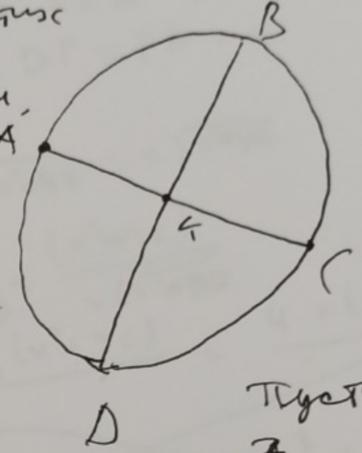
2

Тогда нам подходят такие $(a; b)$, которые лежат внутри получившейся фигуры

Посчитаем площадь фигуры

$AC = \sqrt{20}$; т.к соединяет $(0;0)$; $(4;-2)$

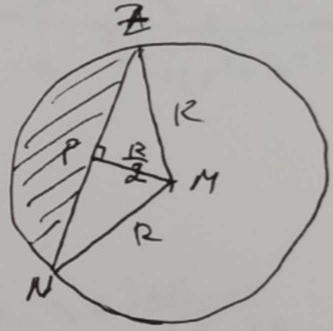
BD - делит фигуру пополам, т.к. у этих частей окружностей одинаковые дуги, т.к. имеют общие точки пересечения с BD



тогда $KC = \frac{AC}{2} = \frac{AK}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

Пусть $AC = R$

$ZP = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ZN = R\sqrt{3}$



По теореме косинусов:

$ZN^2 = ZM^2 + NM^2 - 2\, ZM \cdot NM \cdot \cos\angle ZMN$

$3R^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\angle ZMN$

$\cos\angle ZMN = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle ZMN = 120^\circ$

Тогда площадь сектора стянутого дугой NZ равна $S_{сек} = \frac{1}{3}\pi R^2$

$S_{ZMN} = \frac{1}{2} PM \cdot ZN = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

S заштрихованной фигуры $= S = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Тогда площадь всей искомой фигуры равна $S_1 = 2S =$
$= 2R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2 \cdot 20\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 40\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103914**

ID профиля: **816426**

Вариант 21

4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$ Чистовик

$a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$
$b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2}$
$c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

у этих чисел не может быть никаких делителей ~~(взаимнопростых с 5 и 7)~~ кроме степеней 5 и 7, иначе НОК был бы другим

Среди $a_1; b_1, c_1$ должна быть хотя бы одна 1 и 18, иначе условия не будут выполняться

Аналогично среди a_2, b_2, c_2 должна быть хотя бы одна 1 и 16

А две оставшиеся могут принимать значения от 1 до 18 для a_1, b_1, c_1 или от 1 до 16 для a_2, b_2, c_2

Но при этом возможны повторения например

$a = 5^1 \cdot 7^1$ и $a = 5^1 \cdot 7^1$
$b = 5^1 \cdot 7^1$ $b = 5^1 \cdot 7^1$

Тогда нам нужно исключить повторения

Когда среди a_1, b_1, c_1 две 1.

Тогда $c_1 = 18$, ~~в~~ тогда случаев будет соответсвенно ~~a_2, b_2, c_2~~ ~~3·2·16~~

$3 \cdot 2 \cdot 16$; так как есть 3 места для 1, 2 места для 16 и 16 способов выбрать оставшуюся

~~(не считаем случай~~

Аналогично для a_2, b_2, c_2

там будет $3 \cdot 2 \cdot 18 - 1$ (так как мы уже считали один)

Теперь рассмотрим случай повторения 18 у a_1, b_1, c_1

там способов $3 \cdot 2 = 6$

Аналогично с 16 у a_2, b_2, c_2

$3 \cdot 2 = 6$

Тогда всего будет $2^2 \cdot 3^2 \cdot 16 \cdot 18 - 6 - 6 - 3 \cdot 2 \cdot 16 - 3 \cdot 2 \cdot 18 + 1 =$
$= 10149$

Ответ: 10149

3

(продолжение) Чистовик

$$\begin{cases} S_{APK} = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\alpha = 12 \\ S_{PKC} = \frac{1}{2} PK \cdot PC \cdot \sin\alpha = 9 \end{cases}$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3} \Rightarrow AP = \frac{4}{3} PC = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2\sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{6}{\sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{58}}{3} = \frac{2\sqrt{58}}{\sqrt{3}}$$

$$PC = \frac{9\sqrt{58}}{2\sqrt{3}\cdot 3} = \frac{3\sqrt{58}}{2\sqrt{3}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{3}{7} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

$$\frac{9}{49} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$$

$$9 - 9\sin^2\alpha = 49\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{58} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{58} = \frac{49}{58}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2\cdot 49}{58} - \frac{58}{58} = \frac{40}{58} = \frac{20}{29}$$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cdot\cos 2\alpha = \frac{4\cdot 58}{3} + \frac{9}{4}\cdot\frac{58}{3} - 2\cdot\frac{2\sqrt{58}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{58}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{20}{29} =$$

$$= \frac{25\cdot 58}{12} - \frac{12\cdot 58}{2\cdot 3}\cdot\frac{20}{29} = 58\cdot 5\left(\frac{5}{12} - \frac{12}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{29}\right) = \cancel{58\cdot 5\left(\frac{15\cdot 29 - 144}{12\cdot 3\cdot 29}\right)} =$$

$$= \cancel{58\cdot 5\,(435} = 58\cdot 5\left(\frac{5}{12} - \frac{8}{29}\right) = 58\cdot 5\left(\frac{145-96}{29\cdot 12}\right) =$$

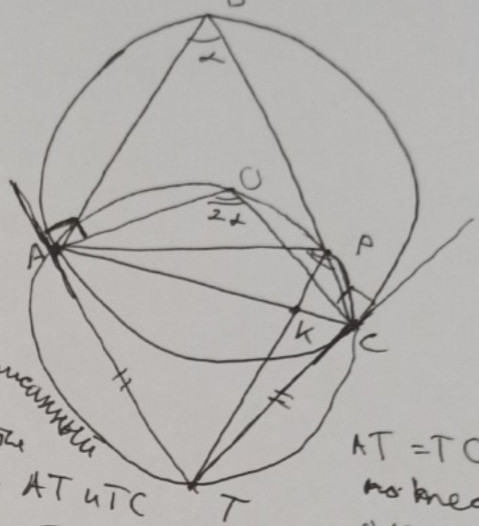
$$= \frac{49\cdot \cancel{58}^{\,2}\cdot 5}{\cancel{29}\cdot 12} = \frac{49\cdot 5}{6} = \frac{245}{6}$$

$$AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$$

Ответ: $S_{ABC} = 49$; $AC = \sqrt{\frac{245}{6}}$

б) Дано   Шестовик

$S_{APK}=12$
$S_{CPK}=9$ $\Big\}$ $S_{APC}=21$
$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$



1) Пусть $\angle ABC=\alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$
Тогда $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$
(т.к. опираются на одну дугу)

Т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^0$
(AT и TC – кас), то $AOCT$ – вписанный
Тогда $\angle APT$ и $\angle TPC$ опираются
на ~~[illegible]~~ равные хорды AT и TC
значит они равны $\angle APT = \angle TPC = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$
Тогда $\triangle PKC \sim \triangle ABC$ (т.к. $\angle KPC = \angle ABC = \alpha$; $\angle PCA$ – общ)

$AT = TC$
по теореме
о касательной
и секущ.

$$\begin{cases} S_{PCK} = \frac{1}{2} PC \cdot KC \cdot \sin\angle BCA = 9 \text{ (по усл)} \\ S_{CPA} = \frac{1}{2} PC \cdot AC \cdot \sin\angle BCA = 21 \text{ (по усл)} \end{cases}$$

$$\frac{KC}{AC} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{7}{3}$$

$$S_{ABC} = S_{KPC}\cdot\left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = 9\cdot\frac{49}{9} = 49$$

2) $\cancel{S_{APC} = \frac{1}{2} AP\cdot PC \sin 2\alpha = 21}$; $S_{APC} = \frac{1}{2} AP\cdot PC\cdot \sin 2\alpha = 21$

$AP\cdot PC = \frac{42}{\sin 2\alpha}$

$$\times\begin{cases} S_{APK} = \frac{1}{2} AP\cdot PK\cdot\sin\alpha = 12 \\ S_{PKC} = \frac{1}{2} PK\cdot PC\cdot\sin\alpha = 9 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\cdot AP\cdot PC\cdot PK^2\cdot\sin^2\alpha = 12\cdot 9$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{42}{\sin 2\alpha}\cdot PK^2\cdot\sin^2\alpha = 12\cdot 9$$

$$PK^2 = \frac{12\cdot 9\cdot 4\cdot\sin 2\alpha}{42\cdot\sin^2\alpha} = \frac{2}{7}\cdot 36\cdot\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{144\cdot 7}{7\cdot 3} = 48$$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7}$ (по усл)

$PK = 4\sqrt{3}$

$PK\cdot PC\cdot\sin\alpha = 18$

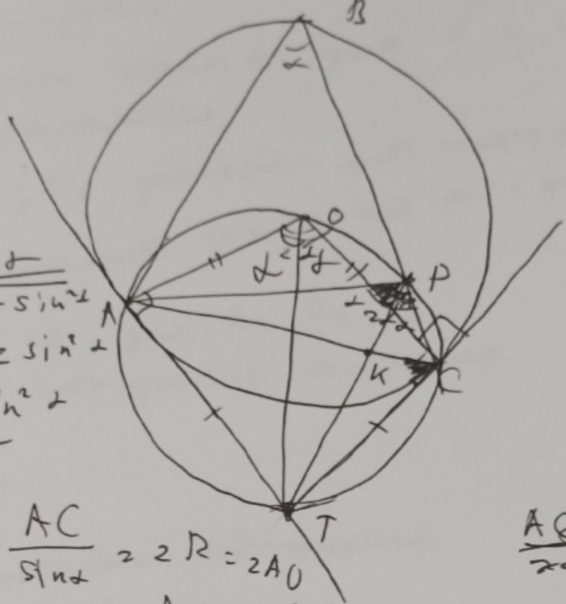
$PC = \frac{18}{\sin\alpha\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}\sin\alpha}$; $\cancel{S_{PCK} = \frac{1}{2} PC\cdot KC\cdot\sin\angle PCA = 9}$

$S_{APC} = \cancel{\frac{1}{2} AC\cdot PC\cdot\sin\angle PCA = 21}$

1

$; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

...и этих чисел не может быть никаких



$S_{APK} = 12$

$S_{CKP} = 9$

$\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{3}{7}$

$42 = AP \cdot PC \cdot \sin\alpha$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} =$

$\frac{AC}{2\alpha} = 2R$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{7} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

$\frac{9}{49} \cdot (1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha$

$9 - 9\sin^2\alpha = 49\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{58}$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ $\quad \frac{AC}{\sin\alpha} = 2R = 2AO$

$AO = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} =$

$= \frac{2 \cdot \frac{3}{7}}{1-\frac{9}{49}} = \frac{6 \cdot 49}{7 \cdot 40} = \frac{21}{20}$

$\frac{AP \cdot AC}{2} = \frac{AP \cdot AK}{2} + 9$

$\frac{AP}{2}(AC - AK) = 9$

$KC = \frac{18}{AP}$

$PC \cdot AC$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cos 2\alpha$

$\frac{AP \cdot PC}{2} \cdot \sin 2\alpha = 21$

$AP \cdot PC = \frac{42}{\sin 2\alpha}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - \frac{84}{\operatorname{tg}2\alpha}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - \frac{84 \cdot 20}{21}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 80$

$AP \cdot PK \cdot \sin\alpha = 24$

$PC \cdot PK \cdot \sin\alpha = 18$

$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$

$AP = \frac{4}{3} PC$

$AC = \frac{25}{9} \cdot \frac{49}{16} - 80$

$\frac{AP \cdot AC}{2}$

$PC = \frac{18}{PK \sin\alpha} = \frac{18 \cdot 7\sin\alpha}{72}$

$PK \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{42}{\sin\alpha} = 24 \cdot 18$

$PK = \frac{24 \cdot 18}{42 \cdot \sin\alpha} = \frac{72}{7\sin\alpha}$

$= \frac{18}{\sin\alpha} \cdot \frac{7\sin\alpha}{72} =$

$= \frac{7}{4}$

$AC^2 =$

21103914 (U816426 M1304229)

$\Phi(a;b;c) = 35$ - 16

$K(a;b;c)$ ...может быть никаких

$5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

5^{b_1}

5^{c_1}

$AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 42$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

~~AP·PC~~

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 8\cancel{2} \cdot \frac{42}{\cancel{21}} \cdot 20 = AP^2 + PC^2 - 80$

$AP \cdot PK \cdot \sin\alpha = 24$

$PC \cdot PK \cdot \sin\alpha = 18$

$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$

$AP \cdot PC \cdot Pk^2 \cdot \sin^2\alpha = 24 \cdot 18$

$\frac{42}{\sin 2\alpha} \cdot Pk^2 \cdot \sin^2\alpha = 24 \cdot 18$

$PC = \frac{18}{PK \cdot \sin\alpha}$

$Pk^2 \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{24 \cdot 18}{\cancel{42}\,7} = \frac{8 \cdot 18}{7}$

Pk^2

$Pk^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{8 \cdot 18}{7}$

$Pk^2 = 8 \cdot 6 = 16 \cdot 3 \Rightarrow Pk = 4\sqrt{3}$

$\frac{KC \cdot PC}{2} \cdot \sin\varphi = 9$

$KP^2 = KC^2 + PC^2 - 2KC \cdot PC \cdot \cos\varphi$

$PC \cdot KP \cdot \sin\alpha = 18$

$48 = KC^2 + PC^2 - 2 \cdot \frac{18}{\operatorname{tg}\varphi}$

$PC = \frac{18}{KP \cdot \sin\alpha} = \frac{9}{2\sqrt{3}\sin\alpha}$

$PC \cdot$ ~~$AP \cdot \sin 2\alpha = 42$~~

$\frac{PC \cdot AC \cdot \sin 2\alpha}{2} = 21$

$\frac{9}{2\sqrt{3}\cancel{\sin\alpha}} \cdot AC \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} = 21$

$AC \; \frac{21 \cdot 4\sqrt{3}}{9} = \frac{28\sqrt{3}}{3}$

$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 15 \\ \hline 145 \\ +\ 29 \\ \hline 435 \end{array}$

$\frac{2}{7} \cdot 36 \cdot \frac{2\cos\alpha\ 7}{\operatorname{tg}\alpha \cdot 3}$

21103914 (U816426 M1304229)