Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103559**

ID профиля: **315066**

Вариант 21

Чистовик ③

Задача №3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,\,20)\end{cases}$$

1) $8a-4b\le 20$, $2a-b\le 5$:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\end{cases};\quad \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 20 & \text{— окружность с центром в } (x;y) \text{ и } r=\sqrt{20}\\ a^2+b^2\le 20 & \text{— окр. с центром в } (0;0) \text{ и } r=\sqrt{20}\\ 2a-b\le 5\end{cases}$$

2) $8a-4b\ge 20$, $2a-b>5$:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases};\quad \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 20\\ (a-4)^2+(b+2)^2\le 20 & \text{— окр. с центром в } (4;-2) \text{ и } r=\sqrt{20}\\ 2a-b>5\end{cases}$$

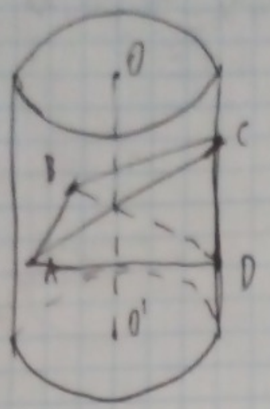
$$S=\pi R^2=\pi(2r)^2=4\pi\cdot r^2=4\pi\cdot(\sqrt{20})^2=4\pi\cdot 20=80\pi$$

Ответ: 80π.

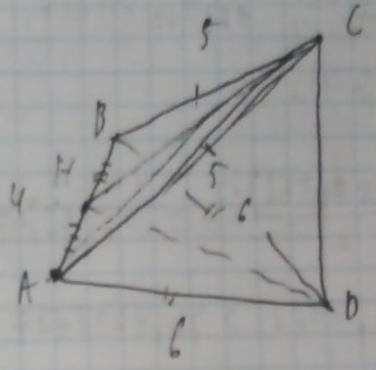
Чистовик

②

Задача № 2



$CD \parallel OO'$



Отметим середину AB — H.

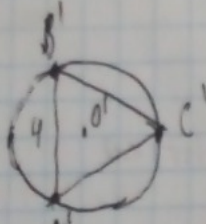
$\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ равнобед., $\Rightarrow$ CH и DH — медианы и высоты, $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp HC$ и $AB \perp DH$, $\Rightarrow AB \perp (CHD)$, $\Rightarrow AB \perp CD$

$CD \parallel OO'$

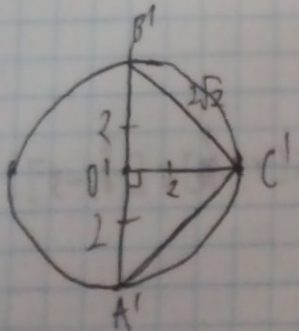
$\Rightarrow AB \perp OO'$

~~проекция~~ Проекции точек A, B, C на основание цилиндра:



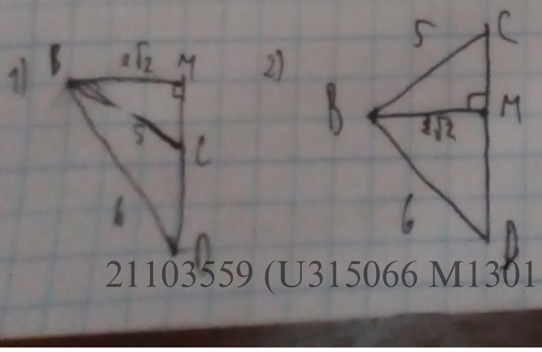
Заметим, что радиус цилиндра — наименьший, если $A'B'$ — диаметр основания

$AB \perp OO'$, $\Rightarrow A'B' = AB = 4$, $\Rightarrow R = 2$



$BC = AC$, $\Rightarrow B'C' = A'C'$

$B'C' = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$



BM — высота в $\triangle BCD$, $BM = B'C' = 2\sqrt{2}$

1) $CD = \sqrt{36-8} - \sqrt{25-8} = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$

2) $CD = \sqrt{36-8} + \sqrt{27-8} = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

Ответ: $2\sqrt{7} - \sqrt{17}$; $2\sqrt{7} + \sqrt{17}$.

21103559 (U315066 M1301181)

Черновик $5a^2-20a+25=0$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases}$$

1) $20 \le 8a-4b$, $5\le 4a-b$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ 4a-b\ge 5\end{cases}\qquad \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ 4a-b\ge 5\end{cases}$$

$a \ge \frac{5+b}{4}$

$\frac{(5+b)^2}{16}+b^2\le a^2+b^2\le 20$

$(5+b)^2+16b^2\le 320$

$b^2+10b+25+16b^2\le 320$

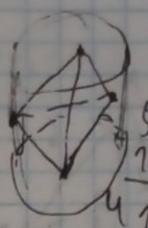
$17b^2+10b-295\le 0$

$D_1=25+295\cdot 17=5(5+59\cdot 17)=$

$=5\cdot 5\cdot 4^2\cdot 5\cdot 7=(12\sqrt{35})^2$

$17(b+5+12\sqrt{35})(b+5-12\sqrt{35})\le 0$

$b\le 2a-5$



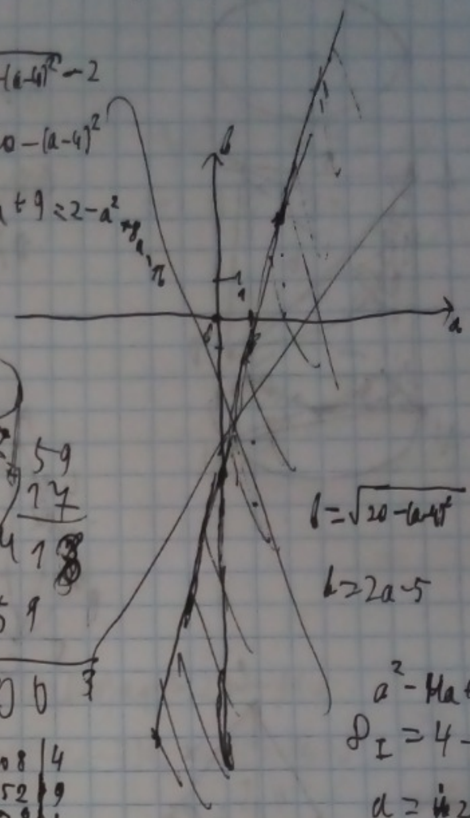
59
$\underline{17}$
413
59
$\overline{1003}$

1008	4
252	9
28	4
7	7
1	

$2a-5=\sqrt{20-(a-4)^2}-2$

$(2a-3)^2=20-(a-4)^2$

$4a^2-12a+9=2-a^2+8a-16$



$b=\sqrt{20-(a-4)^2}-2$

$b\ge 2a-5$

$a^2-4a+1=0$

$D_1=4-1=3$

$a=2\pm\sqrt{3}$

$$\begin{cases}b=2a-5\\ b=\sqrt{20-a^2}\end{cases}$$

$4a^2-20a+25=20-a^2$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2+2a+b^2-b-25=0$

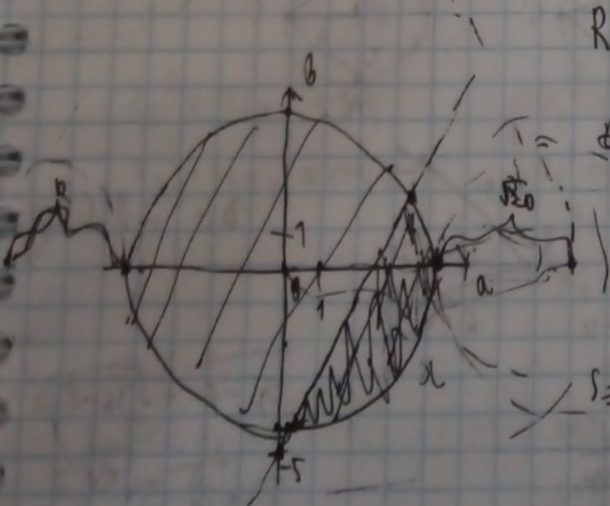
$R_1=2\sqrt{20}$ $\quad \sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$S=\pi R_1^2=\pi\cdot 4\cdot 20=80\pi$

~~$(a-x)^2+(b-y)^2$~~

$a^2+b^2-20=b-2a+5$

$a^2+2a+b^2-b-25=0$



$S=\pi\cdot 20=20\pi$?

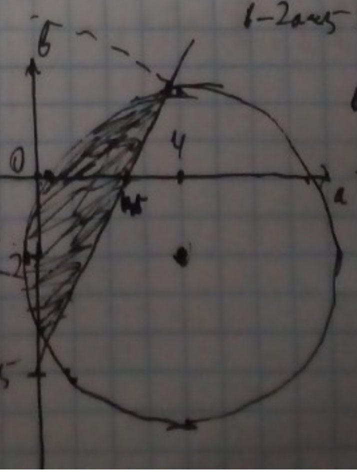
$b-2a+5=a^2+b^2-20$

2) $20\ge 8a-4b$, $5\ge 4a-b$, $b\ge 2a-5$

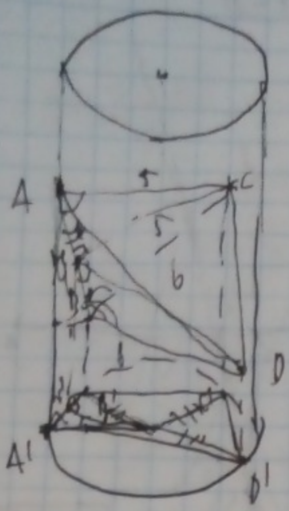
$a^2+b^2\le 8a-4b$

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$



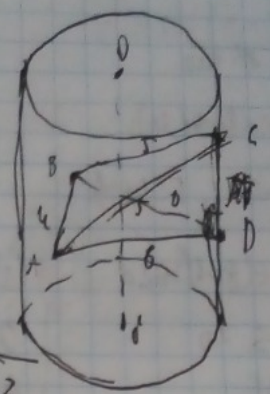
Черновик



$AB \perp (CHD)$

$CH = \sqrt{21}$

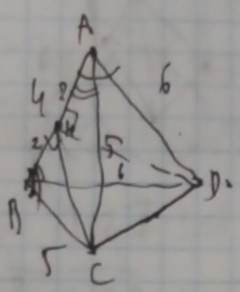
$DH = \sqrt{32}$

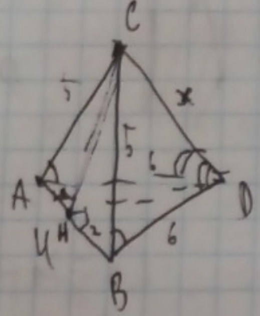


$DH = \sqrt{32}$

$CH = \sqrt{21}$

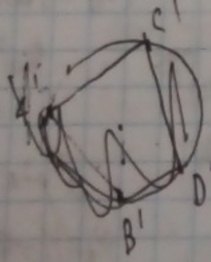
$\triangle ACD = \triangle BCD$ (по 3-м сторонам)

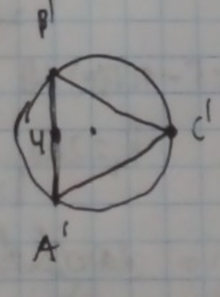




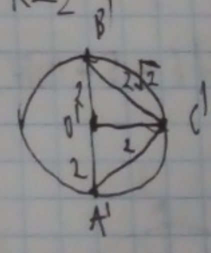
$AB \perp (CHD) \Rightarrow AB \perp CD$

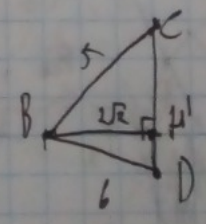
$AB \perp$ сеч.





R=2





$BH' = D'C' = 2\sqrt{3}$

$3 < \sqrt{15}$; $-3 > -\sqrt{15} > -4$

$4 > \sqrt{15}$; $-4 < -\sqrt{15}$

$-4 < -\sqrt{15}$

$-12 < -\sqrt{15} - 8 < a_1$

$CD = \sqrt{25-8} + \sqrt{36-8} =$

$= \sqrt{17} + \sqrt{28} =$

$= 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$

$-8 + \sqrt{15} <$

Чистовик ①

Задача №1

$S = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2}$; $a_8 \cdot a_{17} > S+27$, $a_{11} \cdot a_{14} < S+60$ $\quad a_1, a_2, a_3, \dots a_n \in Z$, =>

=> $d \in Z$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = \frac{(a_1+a_1+6d)\cdot 7}{2} = (a_1+3d)\cdot 7 = 7a_1+21d$

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7a_1+21d+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23a_1d+130d < 7a_1+21d+60 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a_1^2+(23d-7)a_1 > 27-91d \\ a_1^2+(23d-7)a_1 < 60-109d \end{cases} \Bigg| =>$$

$=> 60-109d > 27-91d$

$33 > 18d$, $d < \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$, $d \le 1$

Прогрессия возраст. => $d > 0$ $\quad$ | => $\underline{d = 1}$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1 > -64 \\ a_1^2+16a_1 < -49 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a_1^2+16a_1+64 > 0 \\ a_1^2+16a_1+49 < 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (a_1+8)^2 > 0 \\ (a_1+8+\sqrt{15})(a_1+8-\sqrt{15}) < 0 \end{cases}$$

$D_1 = 64-49 = \sqrt{15}$

$a_1 = -8 \pm \sqrt{15}$

$$\begin{cases} a_1 \ne -8 \\ -8-\sqrt{15} < a_1 < -8+\sqrt{15} \\ 3 < \sqrt{15} < 4; \\ a_1 \in Z \end{cases} \Bigg| => \begin{cases} a_1 \ne -8 \\ -12 < a_1 < -4 \end{cases} \Bigg| => a_1 \in [-11; -9] \cup [-7; -5].$$

Ответ: $-11; -10; -9; -7; -6; -5;$

Черновик

$S = \frac{7\cdot(a_1+a_7)}{2} = \frac{7(2a_1+6d)}{2} = 7(a_1+3d)$ $a_7 = a_1+6d$ $= 7a_1+21d$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_8 a_{17} < S+60$

$a_8 = a_1+7d$

$a_{17} = a_1+16d$

$(a_1+7d)(a_1+16d) > 7a_1+21d+27$

$a_1^2 + 23a_1d + 7\cdot 16d > 7a_1+21d+27$

$a_1^2 + (23d-7)a_1 + 91d - 27 > 0$

$(a_1+16d)(a_1+7d) < S+60$

$a_1^2 + 23a_1d + 7\cdot 16d < 7a_1+21d+60$

$a_1^2 + (23d-7)a_1 + 108d - 60 < 0$

$60-108d > a_1^2 + (23d-7)a_1 > 27-91d$

$60-108d > 27-91d$

$33 > 18d$

$d < \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$
$d \in \mathbb{Z}, \Rightarrow d \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow d = 1$

$-48 > a_1^2 + 16a_1 > -64$

$15 > a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$15 > (a_1+8)^2 > 0$

$(a_1+8)^2 \geq 0$ — $(a_1+8)^2 < 15$ $-\sqrt{15} < a_1+8 < \sqrt{15}$

$a \neq -8$

$x \leq 20$

$\begin{cases} (2-x)^2 + (8-y)^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq \min(4a-4b, 20) \end{cases}$

1) $2a-4b \geq 20$

$a^2+b^2 \leq 4a-4b$, ≤ 20

2) $2a-b < 20$

$a^2+b^2 \leq 20$

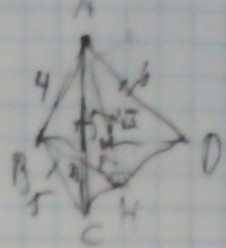
$x_1 = 0$, $x_2 = -7$

$\frac{4\cdot 7(-7-1)}{2}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 \leq 20 + 26$

$(x-5)^2 + (y+1)^2 \leq 46$

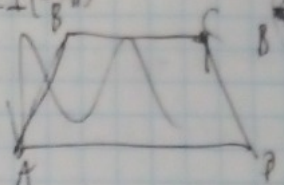
1) $(ACD) \perp (BCD)$

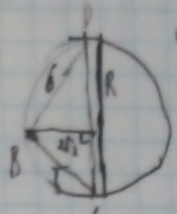


~~1) $AB \perp (BCD)$~~

2) $AD \perp (BCD)$

3) $AC \perp (BCD)$





$R_{\text{max}} = \frac{DC}{2} =$

$= \frac{\sqrt{31-7}+\sqrt{25-8}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{24}+\sqrt{17}}{2}$

$-\,108$
60
48

$-\,91$
27
64
$-\,64$
49
15

$-4 < -\sqrt{15} < -3$

$3 < \sqrt{15} < 4$

$-12 < -\sqrt{15}-8 < a_1 < \sqrt{15}-8 < -4$

$-12 < a_1 < -4$

$-11 \leq a_1 \leq -5$

$a \neq -8$

$a_1 \in [-11; -9] \cup [-7; -5]$, $a_1 \in \mathbb{Z}$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 \leq 20 + 26$

$(x-5)^2 + (y+1)^2 \leq 46$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103559**

ID профиля: **315066**

Вариант 21

Черновик.

$НОД(a,b,c)=5\cdot7$

$НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot7^{16}$

$a=5^{\alpha_1}\cdot7^{\alpha_2}$

$b=5^{\beta_1}\cdot7^{\beta_2}$

$c=5^{\gamma_1}\cdot7^{\gamma_2}$

$\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$ – 7

$\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$ – 7

$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=18$

$\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=16$

001
010
011
100
101
110

$\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$

$\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=18$: $\alpha_1=18$: $\beta_1=1$: $\gamma_1\in[1;18]$ – 18 вариантов

$\gamma_1=1;\ \beta_1\neq1$ $\beta_1\in[2;17]$ – 17 вариантов

$7^2\cdot\left((1+1)^3-1\right)^2\cdot\left(19^3-1\right)\left(16^3-1\right)=$

1) $\alpha_1=18$: $\beta_1\in[0;18]$, $\gamma_1\in[0;18]$ – 19^2

2) $\alpha_1\neq18$, $\beta_1=18$: $\alpha_1\in[0;17]$, $\gamma_1\in[0;18]$ — $19\cdot18$

3) $\alpha_1\neq18$, $\beta_1\neq18$, $\gamma_1=18$: 18^2

$7^2\cdot(19^2+19\cdot18+18^2)\cdot(16^2+16\cdot15+15^2)=$

$=7^2\cdot(19^3-18^3)(16^3-15^3)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$2\log_{2x-3}(x+1)=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$\log_{2x-3}(x+1)=\dfrac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$

$x+1=2x-3$

$x=4$

$\log_5(25)=2$.

$\log_{32-12+5}(8-3)^2=$

$=\log_{25}25=1$

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1$

$4x^2-12x+9=2x^2-3x+5$

$2x^2-9x+4=0$

$D=81-32=49$

$x=\dfrac{9\pm7}{4}=4;\ 0{,}5$

ОДЗ: $\begin{cases}x+1>0\\2x-3>0 & x>1{,}5\\2x^2-3x+5>0\\x\neq-2\\x\neq2\\2x^2-3x+4\neq0\end{cases}$

$D=9-32<0$

3) $2x^2-3x+5=x+1$

$2x^2-4x-4=0$

$x^2-2x-2=0$

$D=$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)^2=4$

4) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1$

$x+1=\sqrt{2x-3}$

$x^2+2x+1=2x-3$

$x^2+4=0$

$\varnothing$

$a^2(a+1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$a=2$ $a-1=1$

$a^3-a^2-4\ |\ a-2$

$a^3-2a^2\ \ |\ a^2+a+2$

a^2

a^2-2a

$2a-4$

$2x^2-3x+5=x+1$

$2x^2-4x+4=0$

$x^2-2x+2=0$

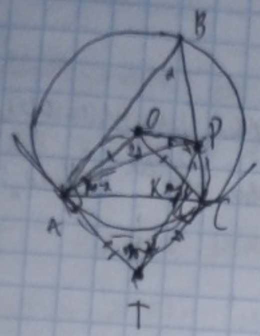
$(x-1)^2+1=0$

$\varnothing$

$a^2+a+2>0$

$\varnothing$

Черновик

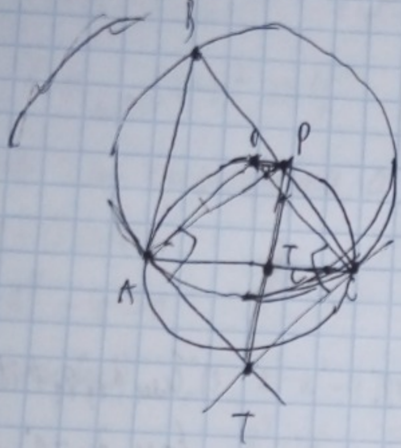


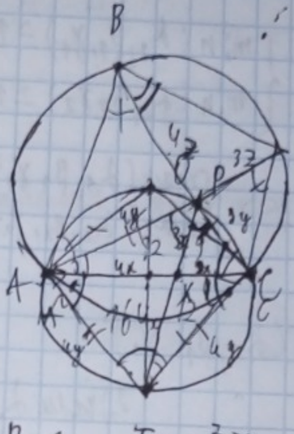
$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$S_{APC} = 21$

$\frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$





$PK \cdot KT = 12a^2$

$\frac{PK}{KT} = \frac{KC}{AK} = \frac{3}{4}$

$PK = \frac{3}{4} KT$

$\frac{3}{4} KT^2 = 12a^2$

$KT = 4a$

$z = y$

$\angle ABC = \angle APC$

$\cup AP = 2\alpha$

$\cup PC = 2\beta$

~~$BO \cdot (BO + 3y) = 2R^2$~~

$S_{AKT} = \frac{16}{9} S_{PKC} = 16$

$S_{ABC} = \frac{7}{3} S_{APC} = 49$

$S_{AKT} = 16$

$7x \cdot 7y \cdot \sin\alpha = 49$

$xy \sin\alpha = 1$

$\alpha + \beta + X = 180$

$X = 180° - \alpha - \beta$

~~$3\alpha + \beta = 180°$~~

$28 = 3\alpha + \beta$

$AP = TC$

$X + 180° = 180° + 2\alpha$

$X = 2\alpha$

~~$S_{APT} = 28$~~

~~$S_{APC} = 21$~~

$= \frac{4}{3}$

$BP(BP + 3y) = 2r^2$

$\frac{7x}{\sin\alpha} = 2r$

$\frac{7x}{AB} = \frac{r}{R}$

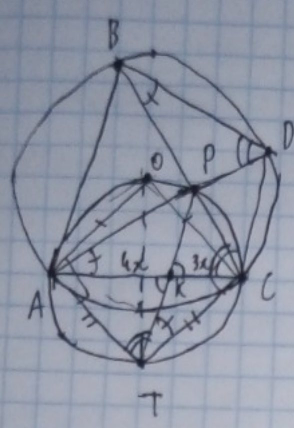
$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

Чистовик

4

Задача № 6



Заметим, что $\angle OAT + \angle OCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (т.к. OA, OC – радиусы; AT, TC – отрезки касательных), $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AOCT – впис., причём OT – диаметр

$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC}$, т.к. у $\triangle APK$ и $\triangle PKC$ общая высота.

$\frac{AK}{KC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$ (по 2-ум углам), $\Rightarrow \frac{PK}{AK} = \frac{CK}{KT}$, $PK \cdot KT = 12x^2$

21103559 (U315066 M1301182)

Чистовик

1

Задача №4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 35 = 5^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ при разложении на простые множители числа a, b, c содержат степени чисел только „5" и „7"

Пусть $a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_1}$

$b = 5^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = 5^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

$НОД(a,b,c) = 5^1 \cdot 7^1 \Rightarrow \begin{cases} \min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1 \\ \min(\alpha_2, \beta_2 \gamma_2) = 1 \end{cases}$

$НОК(a,b,c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \Rightarrow \begin{cases} \max(\alpha_1, \beta_1 \gamma_1) = 18 \\ \max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 16 \end{cases}$

Найдём все тройки $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$:

1) Если $\alpha_1 = 18$:

Если $\beta_1 = 1$:

$\gamma_1 \in [1; 18]$ – 18 вариантов

Если $\beta_1 \neq 1$, $\gamma_1 = 1$:

$\beta_1 \in [2; 18]$ – 17 вариантов

Всего 35 вариантов

2) Если $\alpha_1 \neq 18$, $\beta_1 = 18$:

Если $\alpha_1 = 1$:

$\gamma_1 \in [1; 18]$ – 18 вариантов

Если $\alpha_1 \neq 1$, $\gamma_1 = 1$:

$\alpha_1 \in [2; 17]$ – 16 вариантов

Всего 34 варианта

3) Если $\alpha_1, \beta_1 \neq 18$; $\gamma_1 = 18$:

Если $\alpha_1 = 1$:

$\beta_1 \in [1; 17]$ – 17 вар.

Если $\alpha_1 \neq 1$, $\beta_1 = 1$:

$\alpha_1 \in [2; 17]$ – 16 вар.

Всего 33 варианта

Итого $35 \cdot 3 - 3 = 34 \cdot 3 = 102$ варианта

~~Найдём~~ Аналогично найдём все тройки $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$:

$(16 + 14) \cdot 3 = 90$ вариантов

Всего троек (a, b, c) – $90 \cdot 102 = 9180$.

Ответ: 9180.

21103559 (U315066 M1301182)

Чистовик (2)

Задача №5

~~Перемножим данные~~

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+1>0 \\ 2x^2-3x+5>0 \ (D<0) \\ 2x-3\neq 1 \\ 2x^2-3x+5\neq 1,\ 2x^2-3x+4\neq 0 \ (D<0) \\ x+1\neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x>1{,}5 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Перемножим данные числа:

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=$

$=\log_{\sqrt{2x-3}}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=$

$=\log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)^2=4$

Пусть 2 из чисел равны a, тогда третье равно $a-1$.

$a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$a=2$ (подбор) ; $\begin{array}{r|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \hline a^3-2a^2 & a^2+a+2 \\ a^2 & \\ a^2-2a & \\ 2a-4 & \end{array}$

$a^2+a+2=0$

$D=1-4<0$

нет реш.

$a=2$, $a-1=1$, $\Rightarrow$ одно из чисел равно 1.

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=1$

$x+1=\sqrt{2x-3}$

$x^2+2x+1=2x-3$

$\underbrace{x^2}_{\geq 0}+4=0$

$\varnothing$

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=1$

$(2x-3)^2=2x^2-3x+5$

$4x^2-12x+9=2x^2-3x+5$

Черновик

(3)

$2x^2 - 9x + 4 = 0$

$D = 81 - 32 = 49$

$x = \frac{9 \pm 7}{4}$ = 4
= 0,5 (пост. к.)

при $x = 4$:

$\log_{\sqrt{9}-3}(4+1) = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$

$\log_5(2 \cdot 16 - 12 + 5) = \log_5 25 = 2$

$x = 4$ удовл. усл.

3) $\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 5) = 1$

$2x^2 - 3x + 5 = x + 1$

$2x^2 - 4x + 4 = 0 \quad | : 2$

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} + 1 = 0$

$\varnothing$

Ответ: $x = 4$.

21103559 (U315066 M1301182)