Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103510**

ID профиля: **854933**

Вариант 21

Черновик ①

1.

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ $\quad a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_7 \in \cancel{N}$ $\mathbb{Z}$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$a_8 = a_1 + 7d$ $\quad a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{17} = a_1 + 16d$ $\quad a_{14} = a_1 + 13d$

$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ + \ 7 \\ \hline 112 \end{array}$

①

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > S + 27$

$a_1^2 + 16d_1 a_1 + 7da_1 + 16 \cdot 7 \cdot d^2 > S + 27$

$a_1^2 + 23d_1 a_1 + 112d^2 > S + 27$

② $(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < S + 60$

$a_1^2 + 23da_1 + 130d^2 < S + 60$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23d_1 a_1 + 130d^2 < S + 60 \\ a_1^2 + 23da_1 + 112d^2 > S + 27 \quad | : -1 \end{cases}$$

$-a_1^2 - 23da_1 - 112d^2 < -S - 27$

① + ②:

$130d^2 - 112d^2 < \cancel{8} \ 60 - 27$

$\begin{array}{r} 60 \\ -27 \\ \hline 33 \end{array}$

$18d^2 < \cancel{3}3$

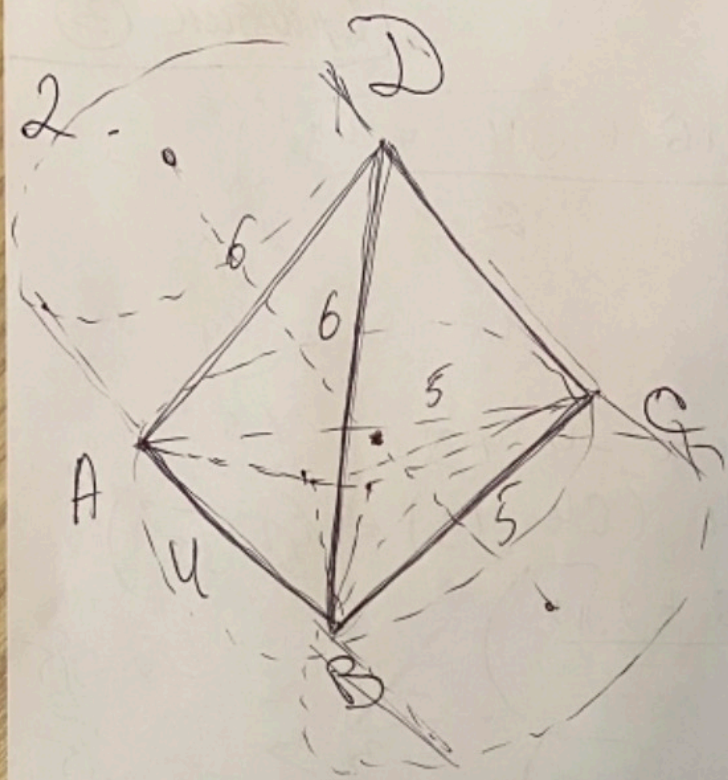
$d = 1$ $\quad d^2 < \frac{33}{18}$ $\quad 1$ $\quad 1$

$\boxed{\begin{array}{r} 18 \\ \times 2 \\ \hline 36 \end{array}}$

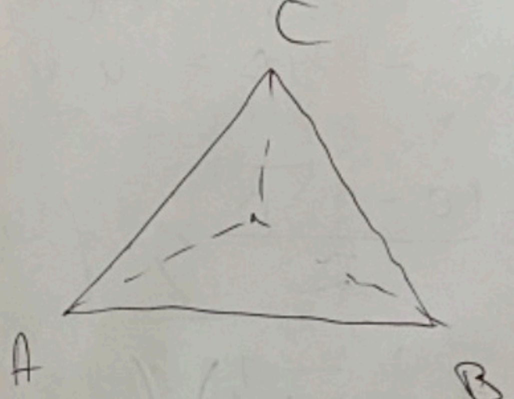
21103510 (U854933 M1295983)

Черновик (4)

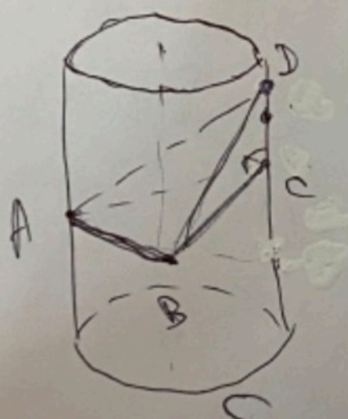
2.



$CD = \sqrt{36+25} = \sqrt{51}$

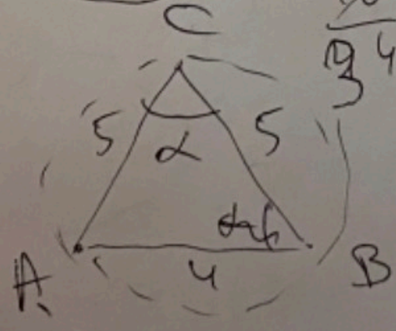


Наим. н. впис. $R = \dfrac{5}{2\cdot\frac{\sqrt{336}}{25}} = \dfrac{125}{2\cdot\sqrt{336}}$



Очевидно, что наим будет обладать, когда окр. ~~шарами~~ сечен-ние будет парал. осн. т.е. ABC - опис. пл.

$\begin{array}{r} 50 \\ -16 \\ \hline 34 \end{array}$



$$\cos\alpha = \frac{25+25-16}{2\cdot5\cdot5} = \frac{34}{2\cdot5\cdot5} = \frac{17}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{336}}{25}$$

$\begin{array}{r} 625 \\ -289 \\ \hline 336 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$ $\begin{array}{r} 336 \\ +289 \\ \hline 625 \end{array}$

Черновик ③

$$\left(\frac{-16-\sqrt{16^2-4\cdot 49}}{2};\ \frac{-16+\sqrt{16^2-4\cdot 49}}{2}\right)$$

64
-49
15

$\cancel{16^2-4\cdot 49=464}$

$16^2-4\cdot 49 = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 - 4\cdot 49$
$= 4\cdot(64-49) = (2\sqrt{15})^2$

$$\left(\frac{-16-2\sqrt{15}}{2};\ \left(\frac{-16+2\sqrt{15}}{2}\right)\right)$$

$-11 > -8-\sqrt{15}$
$-3 > -\sqrt{15}$

$(-8-\underbrace{\sqrt{15}}_{<4};\ (-8+\sqrt{5})$

$-11 > -8-\sqrt{15}$
$11 < 8+\sqrt{15}\ /-8$
$3<\sqrt{15}$

$\cancel{-8-\sqrt{15}<}$

$-12 < -8-\sqrt{15}$

$\cancel{-11 > -8-\sqrt{15}}$

$-12 < -8-\sqrt{15}$
$-4 < -\sqrt{15}$

$-12 < -8-\sqrt{15} < -11$

$-\sqrt{16} < -\sqrt{15}$

$-11; -10, -9, \cancel{-8}, -7; -6; -5; -4; -3;\ -2; -1$

$0, 1;$

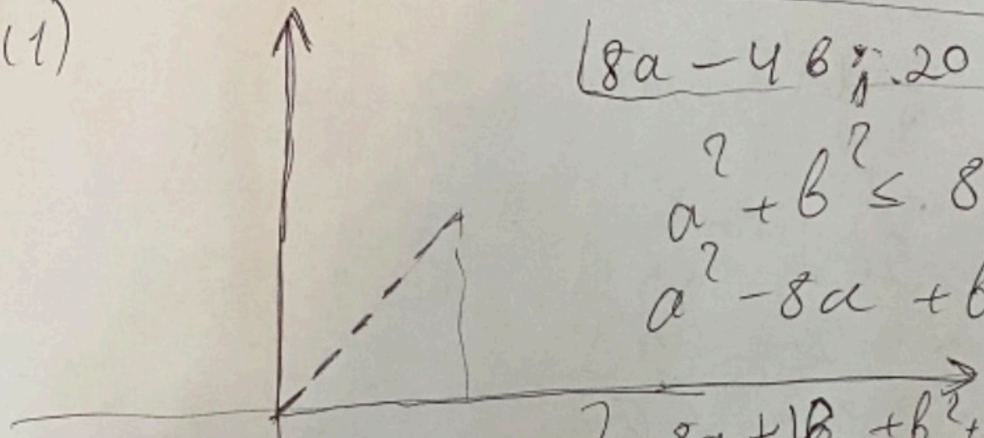
$\sqrt{15}$

21103510 (U854933 M1295983)

3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20) & (2)\end{cases}$$

(1)



$8a-4b \vee 20$

$a^2+b^2\le 8a-4b$

a^2-8a+b^2+4b

$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 20$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

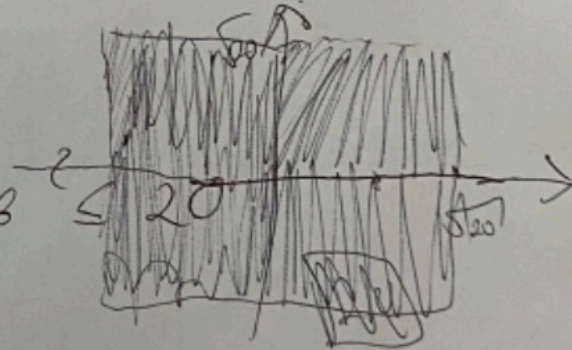
$a\in[-\sqrt{20};+\sqrt{20}]$

$b\in[-\sqrt{20};\sqrt{20}]$

① $8a-4b\geq 20$

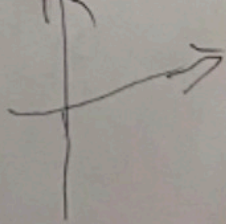
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$

$a^2+b^2\le 20$



$$\begin{cases}x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ x^2-2ax+y^2-2yb\le 0\end{cases}$$

40



Черновик 6

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$ (1)

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20)$ (2)

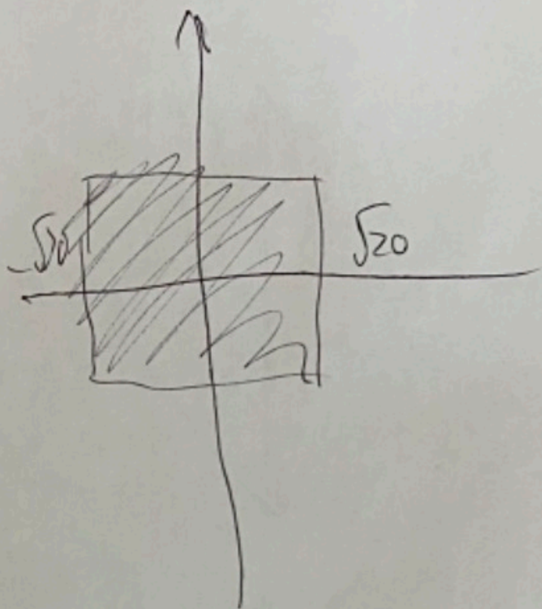
1. $\min = 20$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le 20$

$a \in [-\sqrt{20}; \sqrt{20}]$

$b \in [\sqrt{20}; -\sqrt{20}]$



2. $\min = 8a-4b$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ x^2-2ax+a^2+y^2-2bx+b^2 \le 20 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{a^2+b^2=} \; a^2-8a+b^2+4b \le 0 \\ x^2-2ax+a^2+y^2-2bx+b^2 \le 20 \end{cases}$ | —

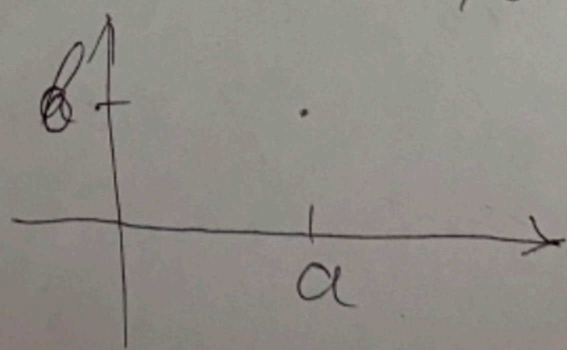
$x^2-2ax+8a+y^2-2by-4b \le 0$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20-8a+4b$

$x_0 = a$

$y_0 = b$

$R = \sqrt{20-8a+4b}$



B2!

Чистовик 1

1. S – сумма a_{1-7}

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$ $\quad (a_1+7d)(a_1+16d) > S+27 \quad (1)$

$a_{11} \cdot a_{14} < S+60$ $\quad (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60 \quad (2)$

$S+27 < a_8 \cdot a_{17}$ $\quad \oplus \quad a_{11} \cdot a_{14} < a_8 \cdot a_{17} + 33$

$a_1 = a$

$a_2 = a_1 + c$, где c – разность

$$S = \frac{2a_1+6c}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21c$$

где $c = 1$

$(a+10c)(a+13c) < (a+7c)(a+16c) + 33$

$a^2 + 23ac + 130c^2 < a^2 + 23ac + 112c^2 + 33$

$18c^2 < 33 \Rightarrow c^2 < \frac{33}{18}; \ c \in \mathbb{Z} \Rightarrow c = 1$

(прогрессия возрастает)

$\begin{cases} a^2+16a+49 < 0 & \text{(из (2)) учитывая } S = 7a+21 \\ a^2+16a+64 > 0 & \text{(из (1))} \end{cases}$

$a^2+16a+49 = a^2+16a+64-49 = (a+8)^2-15$

$(a+8)^2 - 15 < 0 \Rightarrow a = -5; -6; -7; \boxed{-8}; -9; -10; -11$

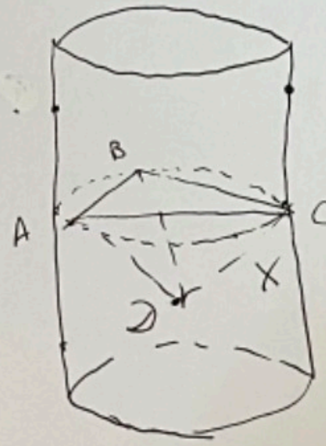
$a \neq -8$

$(a+8)^2 > 0 \Rightarrow a = -8$

Ответ: $-5; -6; -7; -9; -10; -11$

Чистовик ②

2.



Так как $AC = BC$ и $DA = DB$, то $AB \parallel$ оси цилиндра, тогда AB лежит на окружности параллельной основанию. Пусть r — радиус цилиндра, тогда $2 \cdot r \geq AB$, так как AB — хорда, причем $2r = AB$, тогда AB — диаметр.

Пусть CD пересекает окр/ть в X. Пусть O — ц. окружности, тогда $AX^2 = OA^2 + OX^2 = 8$, т.к. $r = \frac{AB}{2} = \underline{4}$.

$CX = \sqrt{AC^2 - AX^2} = \sqrt{17}$.

$DX = \sqrt{AD^2 - AX^2} = \sqrt{28}$

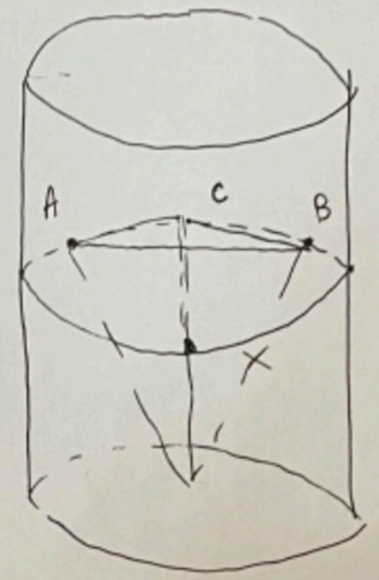
Если C и D по разные стороны от X, то $CD = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

Если же C и D с одной стороны от X, то $CD = \sqrt{28} - \sqrt{17}$.

P.S. рассматривается конфигурация, при которой радиус цилиндра наименьший, при таком условии окр-ть, описанная около ABC парал. оси.

Ответ: $\sqrt{28} + \sqrt{17}$; $\sqrt{28} - \sqrt{17}$

Чистовик ③



Черновик ②

$$S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7$$

$$= \frac{2a+6}{2} \cdot 7 = (a_1+3) \cdot 7$$

$$= 7a_1 + 21$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 < S + 60 \\ a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > S + 27 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 < S + 60$$
$$-a_1^2 - 23a_1d - 112d^2 < -S - 27$$

$$+\ 18d^2 < 33$$

$$d^2 < \frac{33}{18} < \frac{72}{18} = 4$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

d – целое $\Rightarrow d = 1$

$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2$

$1 \quad 4 \quad 9$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a + 21 + 60 \\ a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a + 21 + 27 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ -\ 7 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 130 - 81 < 0 \\ a_1^2 + 16a + 112 - 48 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ -\ 81 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -\ 48 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \\ (a_1 + 8)^2 > 0 \end{cases}$$

$$a = -8$$

$$\begin{cases} \left(\frac{-16 - \sqrt{16^2 - 4 \cdot 49}}{2};\ \frac{-16 + \sqrt{16^2 - 4 \cdot 49}}{2}\right) \\ a_1 \neq -8 \end{cases}$$

21103510 (U854933 M1295983)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103510**

ID профиля: **854933**

Вариант 21

Чистовик ③

5. $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

два числа равны, третье меньше 1?

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2\cdot\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x-3)}$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\cdot\frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x^2-3x+5)}$$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \frac{\ln(2x^2-3x+5)}{\ln(x+1)}$$

Перемножим наши числа:

$$\log_{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}(x+1)\cdot\underbrace{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2}_{\text{наши числа}}\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \underline{4}$$

Допустим $k, k, k-1$ $\quad k=\log_{\sqrt{2x-3}} x+1$

$k\cdot k\cdot(k-1) = k^3-k^2=\underline{4}$

$\Rightarrow k^3-k^2-4=0$

$k=2$ явл. корнем

$(k-2)(k^2+k+2)=0$

$D<0$

$\Rightarrow k=2$ ед. к.

Следовательно наши числа $2, 2, 1$

Допустим $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2 \Rightarrow (\sqrt{2x-3})^2 = x+1$

$x=\underline{4}$

Допустим

$\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = 1$, тогда $x^2+4=0$

$x\in\varnothing$

$\Rightarrow x=\underline{4}$ ед. реш.

Ответ: 4

Чистовик 5

4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$$

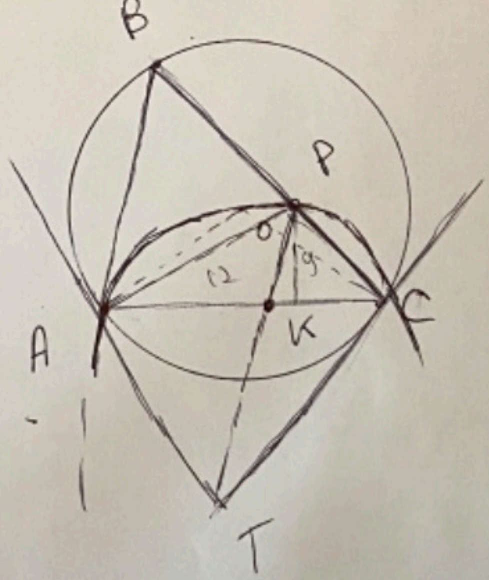
Допустим есть 3 числа, которые: 5^2, 5^4, 5^7; тогда НОД будет не $5 \cdot 7$, а $5^2 \cdot 7$, значит хотя бы одно число должно делиться на 5^1. (степень вхождения 5 равно 1), аналогично с 5^{18}, если во всех трех числах степень вхождения меньше 18, тогда и в НОК она не равна 18. Хотя бы одно число со степенью вхождения 5ти равно 18. Зе же имеет любую степень вхождения 5ти от 1 до 18 включительно, но тогда она совпадет с 1 или 18 мы посчитаем какие варианты учли (таких 6), поэтому $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 18 - 6$ (перестановок троек на их кол/во - варианты посчитанные несколько раз). Аналогично с цифрой 7: число со степенью вхождения 7ми 1 и 16 точно есть, 3е уже со степенью от 1 до 16 включительно, тогда $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 16 - 6$ (6 вар. посчитанных дважды)

Ответ: $(3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 16 - 6) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 18 - 6) = 9180$

21103510 (U854933 M1295984)

Черновик ⑦

№6.



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

4. НОД $(a; b; c) = 35$

НОК $(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$a = 5^{18} \cdot 7^{10} \cdot m$

$b = 5^{18} \cdot 7^{16} \cdot k$

$c = 5^{18} \cdot 7^{16} \cdot p$

НОД $(a; b; c) = 35$

① $\log_{\sqrt{2x-3}} (x+1) = \log_{2x^2-3x+5} (2x-3)^2$

$\log_{\sqrt{2x-3}} (x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5} (2x-3)^2$, $\log_{x+1} (2x^2-3x+5)$

Черновик ⑧

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$; $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$; $\log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-3x+5)$

~~$2x^2-3x+5$~~

~~$D=9-5\cdot 24$~~

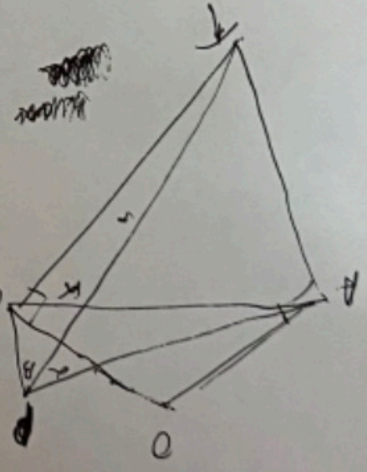
$\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

~~$9+10$~~

a, b, c $\quad 5\cdot 7 = 35$ $\quad a = 5^{2}\cdot 7^{B}$

нок $\quad 5^{18}\cdot 7^{16}$ $\quad b = 5^{8}\cdot 7^{4}$

$3\cdot 2\cdot 1\cdot 18 -$

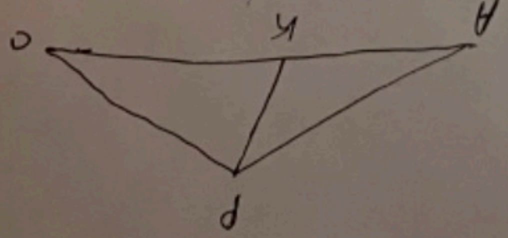


~~$\sin\alpha$~~

21

$\frac{1}{2} PK\cdot PC \sin\beta + \frac{1}{2} PK\cdot AP\cdot \sin\alpha$

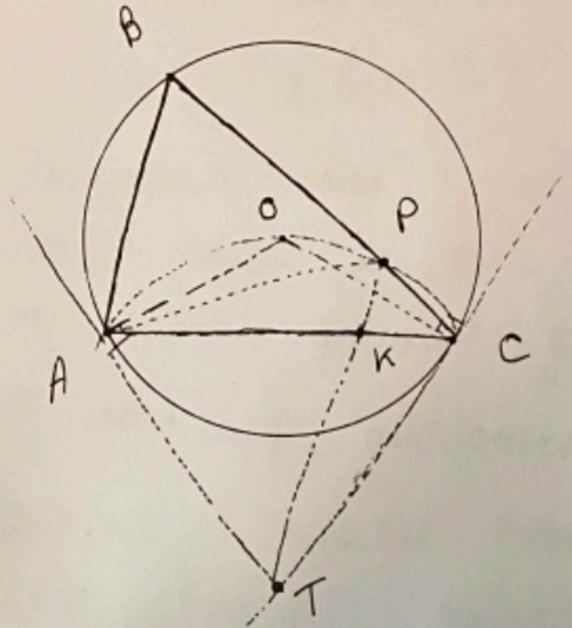
$\frac{1}{2} PK (PC \sin\beta + PA \sin\alpha)$



$\frac{AK}{CK} = \frac{12}{9}$

6.

Чистовик 4



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

а) S_{ABC} ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$

AC ?

Решение:

21103510 (U854933 M1295984)