Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103475**

ID профиля: **843587**

Вариант 21

Чистовик 1.

1. $\exists\, d$ – разность прогрессии, $d>0$, т.к. исходная прогрессия является возрастающей, и $d \in \mathbb{Z}$, т.к. прогрессия состоит из целых чисел ($a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 \in \mathbb{Z}$, $a_2 = a_1 + d \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$) $(*)$

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 6d)}{2}\cdot 7 =$$

$$= \frac{(2a_1 + 6d)\cdot 7}{2} = (a_1 + 3d)\cdot 7$$

Известно, что $a_8 \cdot a_{17} > S + 27 \Leftrightarrow (a_1 + 7d)\cdot(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + 23d\cdot a_1 + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \Leftrightarrow a_1^2 + a_1(23d - 7) > -112d^2 + 21d + 27$

Известно, что $a_{11}\cdot a_{14} < S + 60 \Leftrightarrow (a_1 + 10d)\cdot(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23d\cdot a_1 + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \Leftrightarrow a_1^2 + a_1(23d - 7) < -130d^2 + 21d + 60$

Значит, должно выполняться след. нер-во: $(*)$

$-130d^2 + 21d + 60 > -112d^2 + 21d + 27 \Leftrightarrow 18d^2 < 33 \Rightarrow d = 1$

$S = 7a_1 + 21$, $a_8 \cdot a_{17} = a_1^2 + 23a_1 + 112$, $a_{11}\cdot a_{14} = a_1^2 + 23a_1 + 130$

Имеем систему неравенств: $\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 8)^2 > 0 \\ a_1 \in (-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}) \end{cases} \overset{a_1 \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 \neq -8 \\ a_1 \in [-11; -5] \end{cases} \overset{a_1 \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} a_1 \in \{-11, -10, -9, -7, -6, -5\}$

$-8-\sqrt{15} > -8-4 = -12$

$-8-\sqrt{15} < -8-3 = -11$

$-8+\sqrt{15} < -8+4 = -4$

$-8+\sqrt{15} > -8+3 = -5$

Ответ: $a_1 \in \{-11, -10, -9, -7, -6, -5\}$

Чистовик 2

3. ~~При фиксированных a, b 1-е нер-во системы задаёт круг радиусом $\sqrt{20}$ и с центром в т. (a, b)~~ (в системе координат xOy)

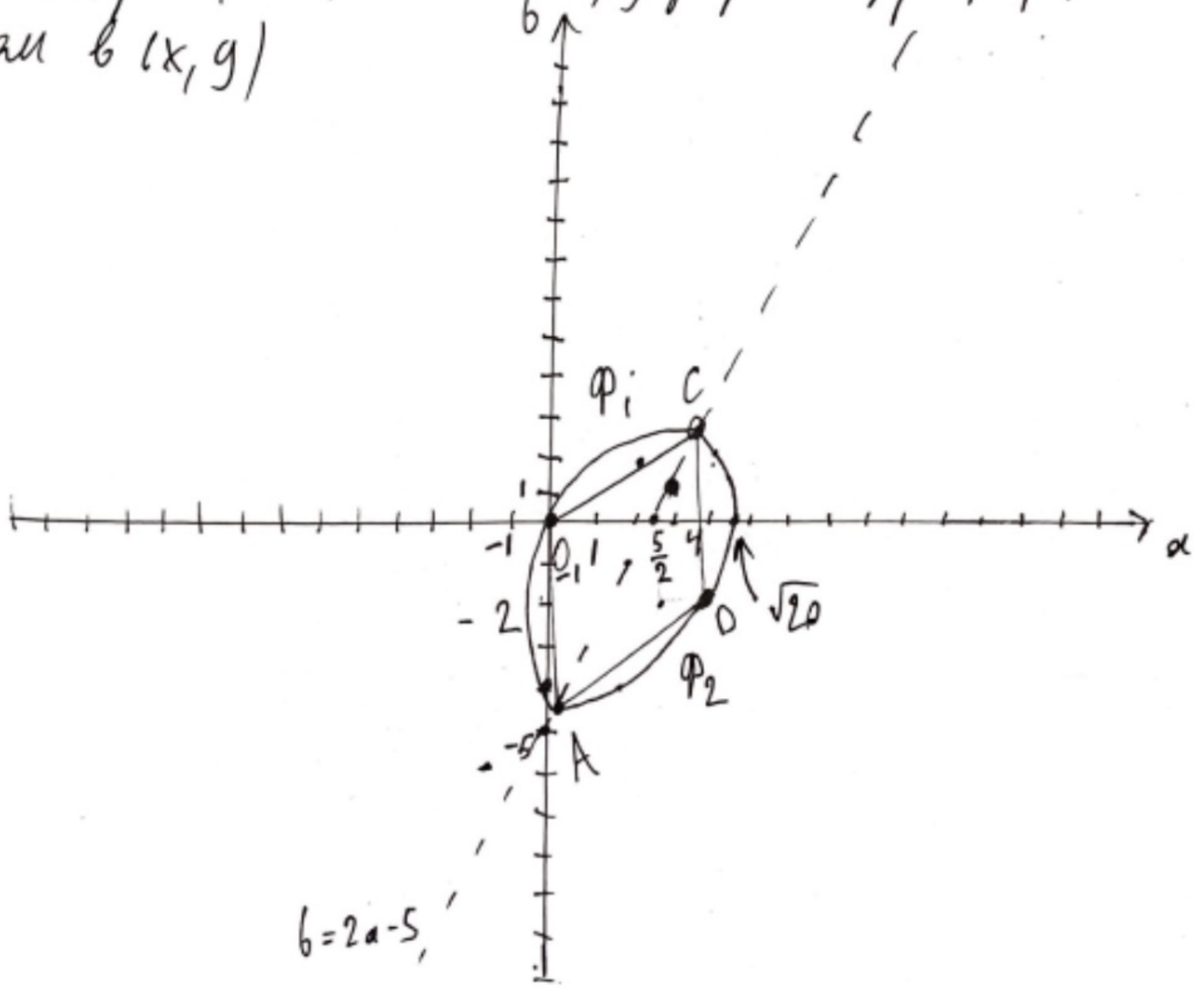
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 20 \\ \left[\begin{cases} 8a-4b<20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b \end{cases} \right. \\ \left.\begin{cases} 8a-4b \geq 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 20 \ (3) \\ \left[\begin{cases} b>2a-5 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \ (1) \end{cases}\right. \\ \left.\begin{cases} b \le 2a-5 \\ a^2+b^2 \le 20 \ (2) \end{cases}\right. \end{cases}$$

(площадь фигуры M не изменится)

Перейдём в систему координат aOb, тогда нер-во (1) задаёт круг радиусом $\sqrt{20}$ и с центром в $(4;-2)$ (включая границу)

Нер-во (2) задаёт круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{20}$. (включая границу)

Нер-во (3) при фиксированных x, y задаёт круг радиусом $\sqrt{20}$ с центром в (x, y)



Черновик 3

Найдём точки пересечения окр-ти $(a-4)^2+(b+2)^2=20$ и $b=2a-5$

$$\begin{cases}(a-4)^2+(2a-3)^2=20\\ b=2a-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5a^2-20a+5=0\\ b=2a-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-4a+1=0\\ b=2a-5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\pm\sqrt{3}\\ b=\pm2\sqrt{3}-1\end{cases}$$

Найдём точки пересечения окр-ти $a^2+b^2=20$ и $b=2a-5$: $\begin{cases}a^2+b^2=20\\ b=2a-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5a^2-20a+5=0\\ b=2a-5\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\pm\sqrt{3}\\ b=\pm2\sqrt{3}-1\end{cases}$$

, т.е. обе данные окр-ей пересекаются на прямой $b=2a-5$, поэтому график совокупности выглядит след. образом (см. рис. 1). Площадь полученной фигуры равна площади фигуры M, т.к. ~~...~~ для любой точки (a_0, b_0), лежащей внутри полученной фигуры верно, что исходная система имеет решения. Разобьём фигуру на $Ф_1$ и $Ф_2$ (см. рис. 1), тогда в силу симметрии относительно $b=2a-5$ $S_{Ф_1}=S_{Ф_2}$, поэтому необходимо найти $2S_{Ф_1}=2S_{Ф_2}$. ~~Отметим точки A, C, D (см. рис. 1), тогда~~

~~[illegible]~~

Черновик 1

$\exists\, d$ – разность прогрессии

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2} = \frac{(2a_1+6d)\cdot 7}{2} = (a_1+3d)\cdot 7$

$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$(a_1+7d)\cdot(a_1+16d) > (a_1+3d)\cdot 7 + 27$

$a_1^2 + a_1\cdot 23d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + a_1(23d-7) + 112d^2 - 21d - 27 > 0$

$D = 529d^2 - 322d + 49 - 448d^2 + 84d + 108 = \quad \overset{119}{\cancel{238}} = 2\cdot 9\cdot x \quad x = \frac{119}{9}$

$= 81d^2 - \overset{3}{238}d + 157 =$

$= (9d -$

$a_{11}\cdot a_{14} < S + 60$

$(a_1+10d)\cdot(a_1+13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23a_1\cdot d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + a_1(23d - 7) + 130d^2 - 21d - 60 < 0$

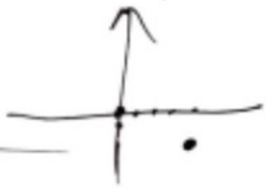
$112d^2 - 21d - 27 > 130d^2 - 21d - 60$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{33}{18} \overset{d\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow} d = \pm 1, 0$

$A > -112d^2 + 21d + 27$ и $A < -130d^2 + 21d - 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow -112d^2 + 21d + 27 < -130d^2 - 21d - 60$

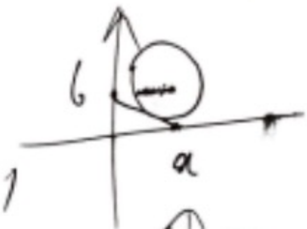


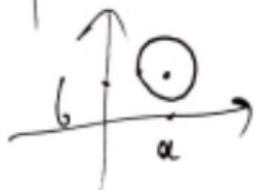
$a_1^2 + 16a_1 + 49 = 0$

$\frac{D}{4} = 64 - 49 = 15$

$a_1 = -8 \pm \sqrt{15}$

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a-46, 20) \ (1) \end{cases}$





(1): 1. $8a - 46 < 20$

$2a - b < 5$

$\begin{cases} b > 2a - 5 \\ a^2 + b^2 \le 8a - 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 2a - 5 \\ (a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20 \end{cases}$

$(a-x)^2 + (b-y)^2 \le 20$

$\left[\begin{cases} b > 2a - 5 \\ (a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20 \end{cases} \right.$

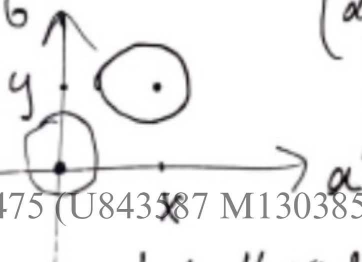
$\left[\begin{cases} b \le 2a - 5 \\ a^2 + b^2 \le 20 \end{cases}\right.$

2. $8a - 46 \ge 20$

$\begin{cases} 2a - 5 \ge b \\ a^2 + b^2 \le 20 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 2a - 5 \\ (a-4)^2 + (b+2)^2 = 20 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 2a - 5 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases}$



$a^2 + 4a^2 - 22a + 5 = 0$

$a^2 - 4a + 1 = 0$

$a = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow b = \pm\sqrt{3} - 1$

$a^2 - 8a + 16 + 4a^2 - 12a + 9 = 20$

$5a^2 - 22a + 5 = 20$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103475**

ID профиля: **843587**

Вариант 21

Чистовик 1

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=35 \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} НОД(a,b,c)=5\cdot 7 \quad (\wedge) \\ НОК(a,b,c)=5^{18}\cdot 7^{16} \quad (\times) \end{cases}$$

$\exists\, a=5^{p_1}\cdot 7^{q_1}$, $b=5^{p_2}\cdot 7^{q_2}$, $c=5^{p_3}\cdot 7^{q_3}$, $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$. Числа a, b, c содержат в своём разложении на произведение простых множителей лишь числа 5 и 7 из-за $(\times)$. Из $(\wedge)$ следует, что хотя бы одно из чисел p_1, p_2, p_3 равно 1, а другие >1, и хотя бы одно из чисел q_1, q_2, q_3 1, а из $(\times)$ следует, что $p_1, p_2, p_3 \leq 18$ и $q_1, q_2, q_3 \leq 16$

Случай 1. $q_1=q_2=q_3=1$ и $p_1=p_2=p_3=1 \Rightarrow (\times)$ – неверно

Случай 2. по 2 числа равны 1. $q_i=q_j=1$ и $p_l=p_m=1$, тогда оставшиеся $p\in[2;18]$, $q\in[2;16]$. Имеем $C_3^2\cdot C_3^2\cdot 17\cdot 15$ способов

Случай 1: по 1 числу равны 1, тогда 2 других $p\in[2;18]$, 2 других $q\in[2;16]$. Имеем $C_3^1\cdot C_3^1\cdot 17^2\cdot 15^2$ способов

(a,b,c) и (a,c,b) – разные

Сложим способы: $9\cdot 17^2\cdot 15^2 = 45^2\cdot 17^2 = 765^2$ +

$C_3^2\cdot C_3^2\cdot 17\cdot 15 = 765$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 17 \\ \hline 315 \\ 45 \\ \hline 765 \end{array}$$

$= 765\cdot 766$ способов

Ответ: $765\cdot 766$

21103475 (U843587 M1303857)

Чистовик 2

ОДЗ: $\begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ 2x^2 - 3x + 5 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 5 \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ 2x^2 - 3x + 4 \neq 0; \end{cases}$ $2x^2 - 3x + 4 = 0$ $\varnothing$, $D = 9 - 16 < 0$

$\Leftrightarrow x \in (\frac{3}{2}; +\infty) \setminus \{2\}$

$2x^2 - 3x + 5 = 0$, $D = 9 - 40 < 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 5 > 0 \ \forall x$

~~Случай 1~~: $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$; $2x-3 > 0$ на ОДЗ

$\cancel{2}\log_{2x-3}(x+1) = \cancel{2}\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \ |:2$

$\log_{2x-3}(x+1) = \dfrac{1}{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}$ $(x = 2$ не удовл. ОДЗ$)$

~~Более~~, того $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) - 1 = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

Заметим, что на ОДЗ $\underbrace{\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)}_{a} \cdot \underbrace{\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2}_{b} \cdot \underbrace{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}_{c} =$

$= 4 = abc$

1\. $a = b$, $c = a-1$: $a^2 \cdot (a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$(a-2)\cdot(a^2+a+2) = 0$; $a^2 + a + 2 = (a+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \ \forall a$

$a = 2 = b$, $c = 1$

Для двух других случаев получим $a = c = 2$, $b = 1$ и $a = 1$, $b = c = 2$

$a = 2$: $\cancel{2}\log_{2x-3}(x+1) = \cancel{2}$

$x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 4$

$b = \log_{25} 25 = 1 \Rightarrow c = 2$, а случай $a = b = 2$, $c = 1$ невозможен

$c = \log_5 25 = 2 \Rightarrow x = 4$ – решение

$a = 1$: $\log_{2x-3}(x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{2x-3} \overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} x^2 + \cancel{2x} + 1 = \cancel{2x} - 3$

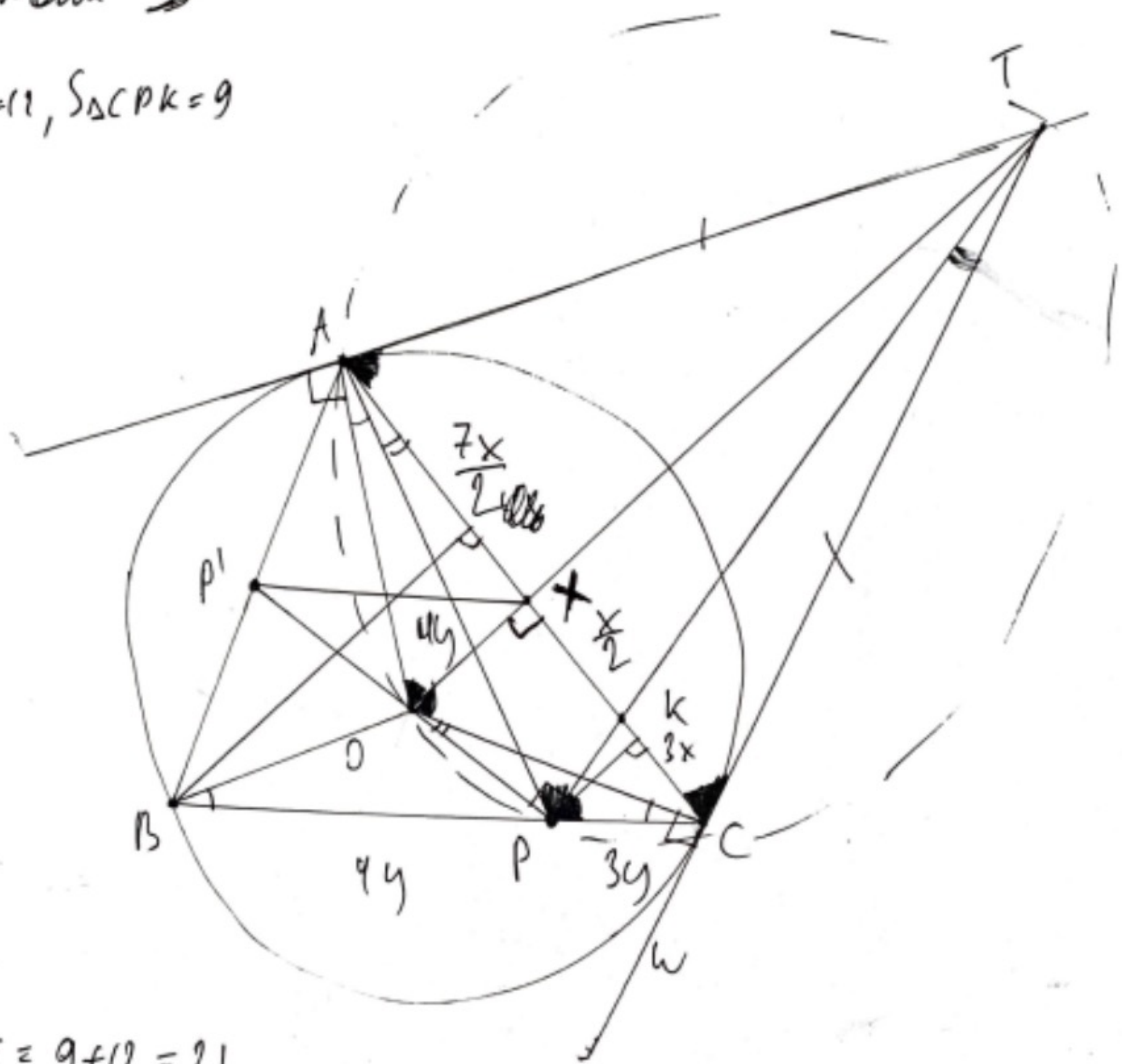
$x^2 = -4$ $\varnothing$

21103475 (U843587 M1303857)

Все случаи рассмотрены Ответ: $x \in \{4\}$

Чистовик 3

$S_{\Delta APK}=12$, $S_{\Delta CPK}=9$



$S_{\Delta APC}=9+12=21$

ΔAPC и ΔABC имеют общую высоту из т. A, поэтому $\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{PC}{BC}\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=21\cdot\frac{BC}{PC}$

AOPC вписанный, поэтому $\angle OAP=\angle OCP$, $\angle PAC=\angle POC$

$BO=OC\Rightarrow\Delta BOC$ равнобедренный $\Rightarrow\angle OBC=\angle OCB$
(радиусы)

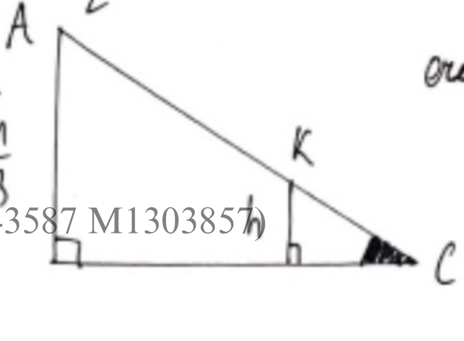
$\exists$ h – высота ΔCPK из т. K, L – высота ΔABC из т. A

$\cancel{\frac{h}{2}\cdot PC=\frac{L}{2}}$ $\quad\frac{h}{2}\cdot PC=9\Rightarrow PC\cdot h=18$; $\frac{L}{2}\cdot PC=21$

$L\cdot PC=42\Rightarrow L=\frac{7h}{3}$

$\frac{L}{h}=\frac{7}{3}$

$l=\frac{7h}{3}$



очевидно, что $\frac{CK}{AC}=\frac{h}{\frac{7h}{3}}=\frac{3}{7}$

$\exists CK=3x\Rightarrow AC=7x$, $AK=4x$

AT - касательная, AC - хорда $\Rightarrow \angle TAC = \angle ABC = \dfrac{\angle AOC}{2}$ (центральный

($\angle AOC$ - центральный, $\angle ABC$ вписанный)

4

$AT = TC$ (отрезки кас-ных) $\Rightarrow \angle TAC = \angle TCA \Rightarrow \angle ATC =$

$= 180^\circ - \angle AOC \Rightarrow \angle ATC + \angle AOC = 180^\circ \Rightarrow ATCO$ вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow ATCPO$ вписанный, причём OT - диаметр, т.к. $\angle OAT = 90^\circ$

(радиус OA проведён в точку касания A) $\Rightarrow \angle OPT = 90^\circ$

$AT = TC$, $AO = OC$ (радиусы) $\Rightarrow ATCO$ - дельтоид $\Rightarrow OT \perp AC$; $\exists\, OT \cap AC =$

$= X$, тогда, т.к. $\triangle AOC$ равнобедренный, OX - медиана и бис-са $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOX = \angle XOC = \angle OBC$, $AX = XC = \dfrac{7x}{2}$, $XK = \dfrac{x}{2}$

$\angle APC = \angle AOC$ (впис.) $\Rightarrow \angle APK = \angle AOX = \angle XOC$, т.е. PK - бис-са

$\triangle APC$, тогда $\dfrac{PC}{AP} = \dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4}$; $\exists\, PC = 3y \Rightarrow AP = 4y$

(th. о бис-се)

$\angle BAO = \angle OBA \Rightarrow \angle ABP = \angle BAP \Rightarrow \triangle APB$ равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow BP = 4y$; $\dfrac{PC}{BP} = \dfrac{CK}{AK}$, тогда по теореме, обратной

т. Фалеса, $PK \parallel AB$, тогда $\triangle CKP \sim \triangle ABC$, $CK =$

$= \dfrac{3}{7} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{49}{9} \cdot 9 = 49$; Ответ: а) 49

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \dfrac{3}{7}$; $7x$ - ?

$1 + tg^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\frac{9}{49}} = \dfrac{49}{58}$

$\varphi = \angle \operatorname{arctg} \dfrac{3}{7}$

$\cos 2\varphi = \dfrac{49}{29} - 1 = \dfrac{20}{29}$

$\sin 2\varphi = \sqrt{1 - \left(\dfrac{20}{29}\right)^2}$

$$S_{\triangle APC} = \frac{4y \cdot 3y \cdot \sin 2\varphi}{2} = 21 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{2\sin 2\varphi}$$

$y = \sqrt{\dfrac{7}{2\sin 2\varphi}}$

$AC^2 = 25y^2 - 14y^2\cos 2\varphi$

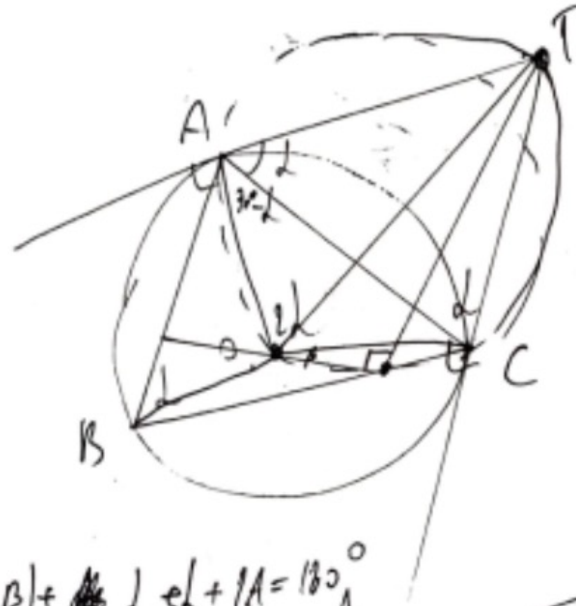
$AC^2 = 25 \cdot \dfrac{7}{2\sin 2\varphi} - 24 \cdot \dfrac{7}{2\sin 2\varphi} \cdot \cos 2\varphi$

~~ответ~~ AC

Далее найдём AC из th. cos

для $\triangle APC$ (мы знаем AP, PC и косинус угла между ними)

Черновик 1



$2(\alpha+\beta)+\alpha+\alpha+2A=180^\circ$

$4\alpha+2\beta+2A=180^\circ$

$2\alpha+\beta+A=90^\circ$

$\cancel{A=90^\circ-2\alpha-\beta}$

$\angle A=90^\circ-\alpha$