Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103408**

ID профиля: **861616**

Вариант 21

Чистовик 1.

№1.

$a_i = a + (i-1)\cdot b$

$$\begin{cases} (a+7b)(a+16b) > S+27 \\ (a+10b)(a+13b) < S+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+23ab+112b^2 > S+27 \\ a^2+23ab+130b^2 < S+60 \end{cases}$$

$$(a^2+23ab+112b^2)+(S+60) > (S+27)+(a^2+23ab+130b^2)$$

$$33 > 18b^2 \Rightarrow b = \{-1; 0; 1\}$$

(b – целое), но $b>0$, т.к. прогрессия возрастающая, тогда $b=1$

$$\begin{cases} (a+7)(a+16) > 7\cdot\dfrac{a+(a+6)}{2} + 27 \\ (a+10)(a+13) < 7\cdot\dfrac{a+(a+6)}{2} + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+23a+112 > 7a+48 \\ a^2+23a+130 < 7a+81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+16a+64 > 0 \\ a^2+16a+49 < 0 \end{cases}$$

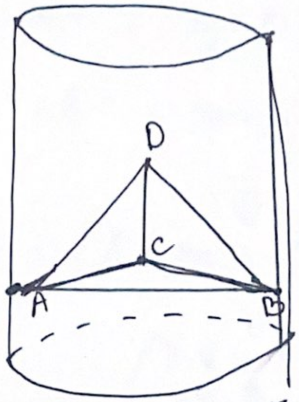
$$\begin{cases} (a+8)^2 > 0 \\ (a+8)^2 - 15 < 0 \end{cases}$$

$$a \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$$

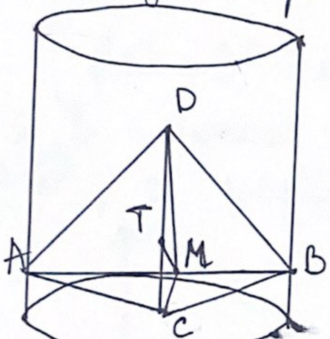
(a отличается от -8 не больше, чем на 3, т.к. $4^2-15>0$)

Чистовик 2.

№2.



Т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, $AC = CB$, $AD = DB \Rightarrow AB \parallel$ основ. цилиндра.
Т.к. A, B лежат на боковой поверхности, то если ~~про~~ провести через AB сечение, параллельное основанию цилиндра, AB – его хорда, значит R цилиндра не больше, чем $\cancel{\frac{AB}{2}}$ $\frac{AB}{2}$, и достигается такой R только когда AB – диаметр. Найдем длину CD.



Пускай M – середина AB, T – пересечение CD и плоскости через AB ~~∥ основанию~~, параллельной основанию, тогда DMB, DMT – прямоугольные (MT – радиус)

$DM = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$DT = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$

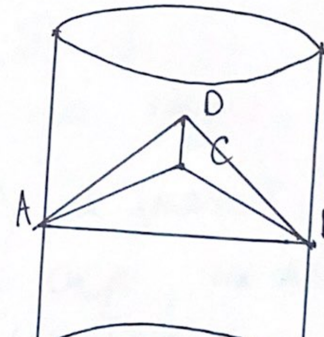
$MC = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$CT = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$CD = \sqrt{17} + \sqrt{28}$

II вариант.

$CD = \sqrt{28} - \sqrt{17}$, т.к. возможно



Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{28}$; $\sqrt{28} - \sqrt{17}$.

Чистовик 3.

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

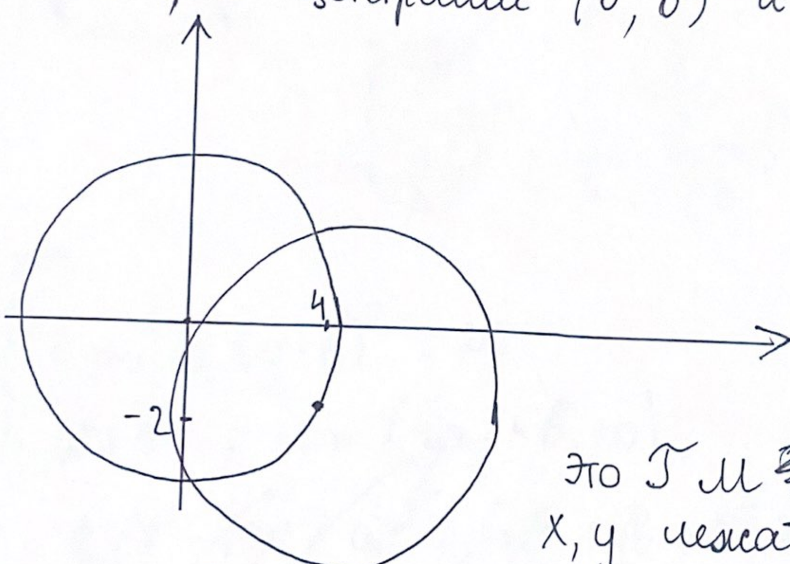
$$(X \le \min(a, b))$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} X \le a \\ x \le b \end{pmatrix} \Rightarrow a^2+b^2 \le 20,\ a^2+b^2 \le 8a-4b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-4)^2+(b+2)^2-20 \le 0 \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases}$$

a, b – точки лежащие в двух кругах, радиуса $\sqrt{20}$, с центрами $(0;0)$ и $(4;-2)$



это ГМ~~З~~Т A D

x, y лежат на круге, радиуса $\sqrt{20}$ с центром $(a; d)$, а значит, это все точки удалённые от наших окр., не больше чем на $\sqrt{20}$. Это будут 2 круга с центрами $(0;0)$ и $(4;-2)$ и радиусом $2\sqrt{20}$

Но расстояние между $(0;0)$ и $(4;-2) = \sqrt{20}$.
Тогда нам нужно посчитать S

Черновик.

N1.

$S_7 = \uparrow \ldots \;;\; \underbrace{a_8 a_{17}} > \underline{S+27},\; \underbrace{a_{11} a_{14}} < \underline{S+60}.$

$a_1;\ a_n \in \mathbb{Z};$

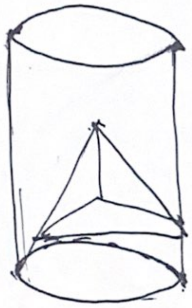
$a_i = a + (i-1) \cdot b$

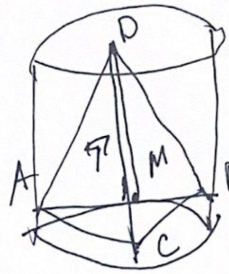
N2.

AB = 4 ; AC = CB = 5 ;

AD = DB = 6 ; CD ॥ оси

CD - ? ; $\underline{ABCD}$ - тет.





N3.

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20) \end{cases}$

$\cancel{(x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2yb + b^2) \le 20}$

$\cancel{y^2 - 2by + b^2 \le 20 - x^2 - 2ax + a^2}$

$\cancel{y(y-2b) \le 20 - x^2 + 2ax - a^2 - b^2}$

$\cancel{y = \frac{20 - x^2 + 2ax - a^2 - b^2}{y - 2b}}$

$28 - 17 = 11$

$17 + 28 = \boxed{45}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103408**

ID профиля: **861616**

Вариант 21

Вариант 21.

Чистовик 1.

№4

$НОД(a;b;c) = 35$

$НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

Тогда должно быть число, которое делится ровно на 5^1, число, которое делится на 7^1, число, делящееся на 5^{18} и число, делящееся на 7^{16}. Также все три делятся на 5 и на 7, и степени хождения 5 и 7 в них не больше 18 и 16 соответственно.

Тогда всего вариантов: $3 \cdot 2 \cdot 18$.

3 - выбрать число, которое делится ровно на 5^1.

2 - выбрать число, которое делится на 5^{18}

18 - выбрать степень третьего от 1 до 18.

При этом варианты: (1;1,18), (1,18,1), (18,1,1), (18,18,1), (18,1,18), (1,18,18). Мы считаем по 2 раза, поэтому $6 \cdot 18 - 6 = 102$.

Аналогично для степени 5: $6 \cdot 16 - 6 = 90$, и всего комбинаций $102 \cdot 90 = 9180$.

Ответ: 9180.

Чистовик 2

№ 5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2x-3=a$; $x+1=b$; $2x^2-3x+5=c$

$2\log_a b$; $2\log_c a$; $\log_b c$

Пускай первые 2 равны.

$2\log_a b = 2\log_c a = y \Rightarrow c^{\frac{y}{2}} = a,\ a^{\frac{y}{2}} = b \Rightarrow$

$\left(\left(c^{\frac{y}{2}}\right)\right)^{\frac{y}{2}} = b$

$c^{\frac{y^2}{4}} = b$, при этом $\log_b c = y-1 \Rightarrow c^{\frac{y^2}{4}\cdot(y-1)} = c$

$\Rightarrow \frac{y^2(y-1)}{4} = 1$

$y^3-y^2-4=0$

$y=2$. (1)

Пускай второе и третье равно:

$2\log_c a = \cancel{\log_b} \log_b c = y$.

$b^y = c \Rightarrow b^{\frac{y^2}{2}} = a$, $2\log_a b = y-1 \Rightarrow c^{\frac{y}{2}} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow b^{\frac{y^2}{2}\cdot\frac{(y-1)}{2}} = b \Rightarrow y^3-y^2-4=0 \Rightarrow y=2$.

И последний вариант:

$2\log_a b = \log_b c = y$

$a^{\frac{y}{2}} = b$ $\quad 2\log_c a = y-1$

$b^y = c$

$a^{\frac{y^2}{2}} = c$, $c^{\frac{y-1}{2}} = a \Rightarrow \frac{y^2(y-1)}{4} = 1 \Rightarrow y=2$.

Осталось рассмотреть

$y = 2\log_{2x-3}(x+1) = 2 \Rightarrow 2x-3 = x+1$

$x=4$.

и $y-1 = 2\log_{2x-3}(x+1) = 1 \Rightarrow$ | $=(2x-3)^2$ и $(x+1)^2 =$ $= 2x^2-3x+5$

$(x+1)^2 = 2x-3$

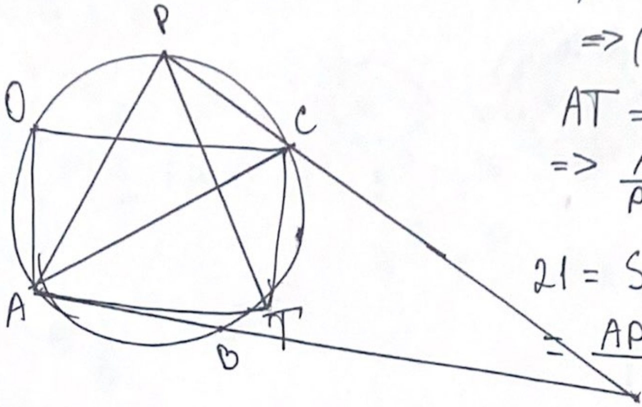
$x^2+4=0$ – нет корней

Значит, $x=4$, подстановка при $x=4$: $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 1$

Ответ: 4. | $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$; Подставив $x=4$, видим $2x^2-3x+5$

Чистовик 3

N6.



а) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow (AOPCT)$ – окружность.

$AT = TC \Rightarrow PK$ – биссек. $\angle \cancel{AOC} APC$,

$\Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \dfrac{4}{3}$

$21 = S_{\triangle APK} + S_{\triangle PKC} = S_{\triangle APC} =$

$= \dfrac{AP \cdot PC \cdot \sin\angle APC}{2}$, $PC = \dfrac{3}{4} AP \Rightarrow$

$\Rightarrow 21 = \dfrac{\frac{3}{4} AP^2 \cdot \sin\angle APC}{2} \Rightarrow AP^2 \cdot \sin\angle APC$

$= 56$; $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle AOC = \angle APC =$

$= 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha$.

$AP = BP$, но $S_{\triangle ABP} = \dfrac{AP \cdot BP \cdot \sin\angle APB}{2} = \dfrac{AP^2 \cdot \sin APC}{2} = 28$.

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} = 28 + 21 = 49$.

б) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{7} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{7}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$, $\cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{58}}$. Значит, $\sin\angle APC =$

$= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 7}{58} = \dfrac{21}{29}$ ~~$\cos\alpha$~~

$\cos APC = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{24}{29}$. Наконец, $AC^2 = AP^2 +$

$+ PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos APC = \dfrac{149}{6}$ (потому что $PC = \dfrac{3}{4} AP$,

а $AP^2 \cdot \sin APC = 56$, тогда т.к. $\sin APC = \dfrac{21}{29}$, имеем,

что $AP = \sqrt{\dfrac{8 \cdot 29}{3}}$, а PC соответственно, $PC = \dfrac{3}{4}$

$AP = \sqrt{\dfrac{29 \cdot 3}{2}}$). То есть $AC = \sqrt{\dfrac{149}{6}}$.

Ответ: а) 49 ; б) $AC = \sqrt{\dfrac{149}{6}}$

Черновик

№4.

$(a;b;c)$

$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$

$5^{18}\cdot 7^{16}$ – НОК $(a;b;c)$

$16 \times 6 = 96$

$18 \times 6 = 108$

$102 \cdot 96 \times 90 = 9180$

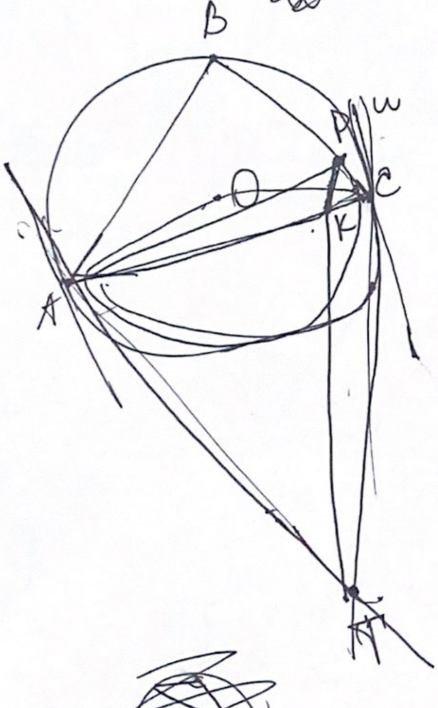
№5.

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$; $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$; $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

I = II

III I и III II на 1

№6. $(2x-3)^2$ и $(x+1)^2 = 2x^2-3x+5$



$S_{APK} = 12$.

$S_{CPK} = 9$.

а) S_{ABC} – ?

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$;

б) AC – ?