Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103379**

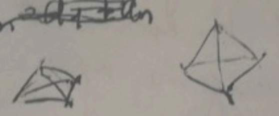
ID профиля: **858173**

Вариант 21

черновик

1) S_7 a_1 - ?

$a_3 a_{17} > S_7 + 27$, $a_{11} a_{14} < S_7 + 60$



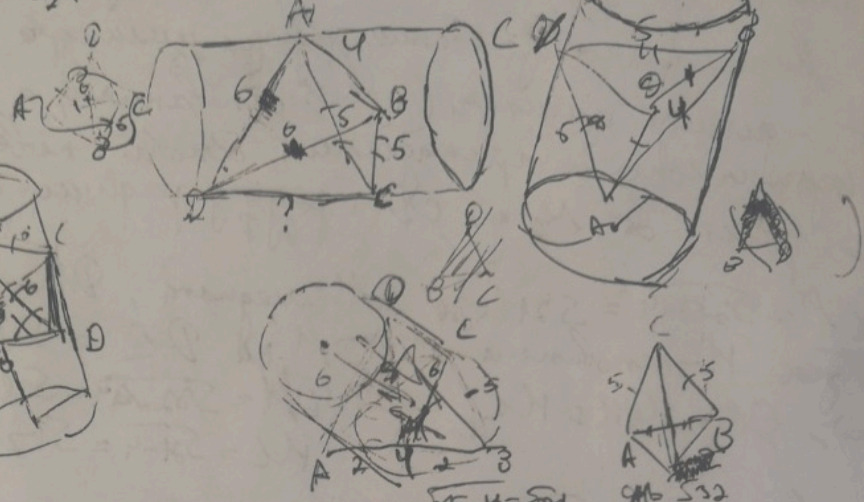
2) Рассмотрим тетраэдр ABCD

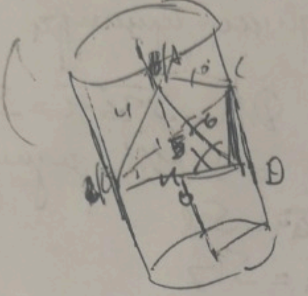
AB = 4, AD = DB = 6

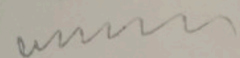
AC = CB = 5,

$R_{ц.}$ - найти

CD - ?







$CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$\frac{2}{3} CM - R = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

...

X

$a_8 a_{17} > S_7 + 27$,

$a_{11} a_{14} < S_7 + 60$

Распишем произведение членов из усл.

$a_8 a_{17} = a_1^2 + 23 a_1 d + 112 d^2$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) = a_1^2 + 23 a_1 d + 112 d^2 > S_7 + 27$

$a_1^2 + 23 a_1 d + 112 d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$a_{11} a_{14} = (a_1 + 10d)(a_1 + 13d)$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) = a_1^2 + 23 a_1 d + 130 d^2 < S_7 + 60$

$a_1^2 + 23 a_1 d + 130 d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

Вычтем первое из второго: $18d^2 < 43$

Т.к. все члены целые, а прогрессия возрастает, нам подходит только единица

Подставим в исходн. неравенство: $(a_1 + 8)^2$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$, $a \neq -8$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$, $\Leftrightarrow$ при $(-\sqrt{15} - 8; \sqrt{15} - 8)$

Учитывая оба условия, получаем ответ

$a_1 = -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5$.

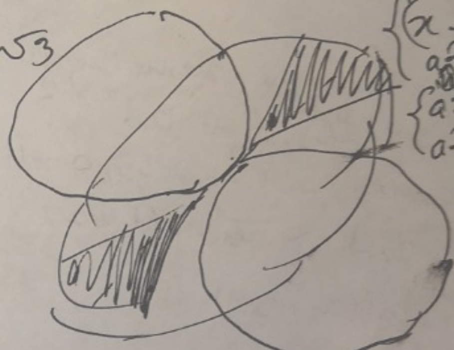
21103379 (U858173 M1299503)

Черновик

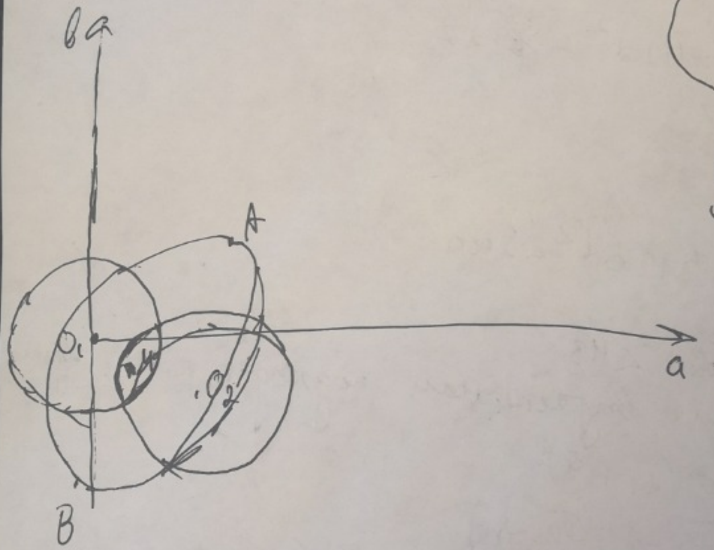
② Пусть M – середина AB => DM и CM $\perp$ к ребру AB
тогда (CMD) – плоскость симметрии тетраэдра
т.к. ребро CD обязано принадлежать бок. пов. цилиндра и быть $\parallel$-ой его оси, то (CMD) $\perp$ основании цилиндра, а ребро AB $\parallel$-но основанию цилиндра
Минимальное значение радиуса цилиндра будет при ~~AB~~ ребре AB $\parallel$ так CD.
AB – диаметр цилиндра (не в основаниях, а внутри цилиндра), ребро CD вертикально и принадлежит боковой поверхности, как и т. A и т. B
=> расст. от M до CD = ~~радиус~~ радиусу цилиндра
$CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ т.к. CM медиана, $DM = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$ т.к. DM – медиана
Пусть H – основание $\perp$ из M на DC => MH – радиус
=> $DC = DH + HC$, где $DH = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$
$HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{28}$

№3



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b^2)\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$
$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$



т. $O_1(0;0)$
т. $O_2(4;-2)$

Чистовик

51) Распишем произведение членов из условия:

• $a_8 a_{17} = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2$

$(a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > S + 27$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

• $a_{11} a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d)$

$(a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < S + 60$

$a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

Вычтем первое из второго: $18d^2 < 43$

Т.к. все члены прогрессии целые, и она ↑, нам подходит только единица

Подставим в исходное неравенство:

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$, $a < > 8$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$, $<=> a$ при $(-\sqrt{15}-8; \sqrt{15}-8)$

Учитывая ~~оба~~ два условия получаем ответ.

$a_1 = -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5$

52) Пусть M – середина AB => DM и CM ⊥ к ребру AB тогда (CMD) – плоскость симметрии тетраэдра.

Т.к. ребро CD обязано ∈ бок. поверхности цилиндра и быть || оси его оси, то (CMD) ⊥ основаниям цилиндра, а ребро AB ||-но основаниям цилиндра

Минимальное значение радиуса будет при ребре AB и том AB – диаметр цилиндра (не в основании, а внутри цилиндра), ребро CD вертикально и ∈ бок. поверхности, как и т. A, и т. B

=> расстояние от M до CD = радиус цилиндра

$CM = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$ т.к. CM – медиана, $DM = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$ т.к DM – медиана

Пусть H – основание ⊥ из M на DC => MH – радиус

=> $DC = DH + HC$, где $DH = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$

$HC = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{28}$

Чистовик

№3| Преобразуем исходную систему и изобразим её в осях (a, b)

Второе уравнение системы равносильно системе

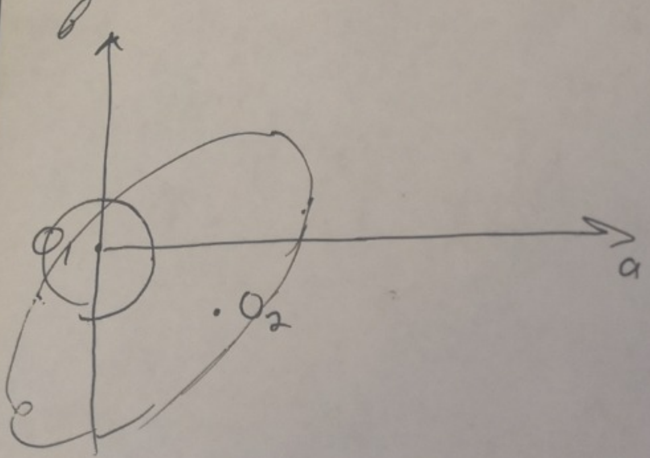
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b \end{cases}$$

Второе задаёт окружность $(a-4)^2+(b+2^2)\le 20$

Первое задаёт окружность с аналогичным радиусом

Первое ур-не воспринимаем как условие, о том, что расстояние от $F(a;b)$ до т. $(x;y)$ не превосходит $\sqrt{20}$

(достаточно найти, когда оно равно $\sqrt{20}$ и взять внутренность этого множества



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103379**

ID профиля: **858173**

Вариант 21

Черновик

(~~A BE - сторона в окр ... 60~~)

~~Значит $a+c+e=18$~~

~~$b+d+f=16$~~

~~В каждой из строк одно из чисел должно быть 1-цей, сделать так 9 способов (любое из трёх в первой строке и любое из трёх во 2 строке)~~

~~Далее получим, что сумма оставшихся равна 17 и 15, нужно подсчитать кол-во натуральных решений.~~

~~Решений будет 16 и 15~~ соответственно.

~~Если выбрать натуральным числом меньшим правой части каждый из переменных, то вторая опр-ся однозначно, а кол-во способов сделать это равно 16 и 14~~

~~Итог: $3\cdot 3\cdot 16\cdot 14 = 9\cdot 16\cdot 14 = 2016$~~

~~Ответ 2016~~

№4

Черновик

5^{16}

$16-1-1=14$

(1) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 = 5 \cdot 7 \cdot 1 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$

~~Если НОД такой то из 1 => каждое из чисел делится на 7 и на 5 и наименьшая степень в разложении равна 1 в каком то из этих чисел. Из 2 => что никаких делителей кроме 5 и 7 в разложении числа нет, тогда~~

$a = 5^a \cdot 7^b$

$a = 5^c \cdot 7^d$

$a = 5^e \cdot 7^f$

№5

(5) $\left(\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1),\ \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2,\ \log_{x+1}(2x^2-3x+5)\right)$

$\begin{cases} \sqrt{2x-3} > 0 \\ \sqrt{2x-3} \neq 1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2-3x+5 > 0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ (2x-3)^2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ 2x^2-3x+5 > 0 \end{cases}$

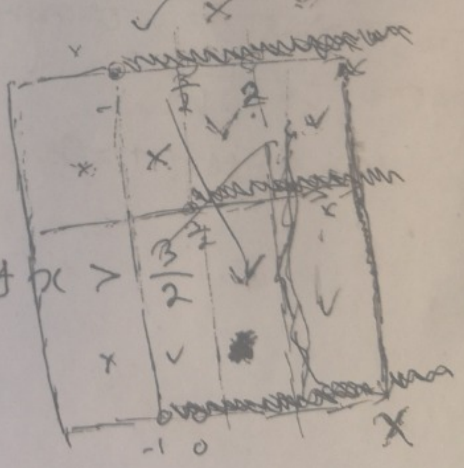
(1) $\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \\ x > -1 \end{cases}$

$\varnothing$

(2) $\varnothing$ $\quad x \neq \frac{3}{2}$

$4x^2 - 12x + 9$

(3) $\begin{cases} x \neq 0 \\ x > -1 \\ \varnothing \end{cases}$



Чистовик

№4 Если НОД такой, то из 1 => каждое из чисел делится на 7 и на 5. При этом, сущ.-ет число у которого степень 5 и 7 в разложении равна 1. Из второго => что никаких делителей кроме 5 и 7 в разложении чисел нет.

Из второго следует, что у какого-то из чисел в разлож.-есть степень 18 у пятерки, и 16 у семерки. Нужно подсчитать кол.-во троек чисел по степеням, зная что в одной из них есть число 1, число 18 и третье число находится от 1 до 18 и кол.во троек чисел, так что в одной из них есть число 1, число 16 и третье от 1 до 16

Если 1-ца уже или 18 встречается 2 раза, то вариантов 6 (аналогично для 16)

Если третье число не совпадает с первыми двумя, то возможные варианты выбираем 3 способами для 1, 7 для ст степени и 14 вариантов для 3-го числа (степени 7), и 16 вариантов для степеней 5-ок

Итого: $(6+6\cdot 14)(6+6\cdot 16) = 6\cdot 6\cdot 15\cdot 17 = 9180$

№6 1) Докажем, что T принадлежит окр (A, O, C)

Рассмотрим 4-угольник AOCT, в нем по св-ву касания угол $OAT = \angle OCT = 90^\circ$, а по св-ву вписанного и центрального угла имеем:

$\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$

$\Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\beta$, значит $T \in$ окр(AOC) ч.т.д.

2) Заметим, что OT - диаметр окр(AOC), а также $AT = TC$ и $OA = OC \Rightarrow$ дуга $CT = \frac{1}{2}$ дуги CTA

$\angle TPC = \frac{1}{2}\angle AOC = \beta$

Значит $AB \parallel TP \Rightarrow \triangle KCP$ подобен $\triangle ABC$

3) Из отношения площадей в условии имеем $CK : KA = 3:4 \Rightarrow$

$\Rightarrow CK : CA = 3:7$

Значит $S_{ABC} = \frac{49}{9}\cdot S_{KPC} = 49$

21103379 (U858173 M1299504)

Чистовик

№5 $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$.

$b \qquad a \qquad c$

Тогда имеем

$\log_{\sqrt{b}} a$, $\log_c b^2$, $\log_a c$

$2\log_b a$, $2\log_c b$, $\log_a c$

$2\log_b a \cdot 2\log_c b = 4\log_c a$

$4\log_c a = \frac{4}{\log_b a \cdot \log_b c}$

Далее имеем 3 и

I $\log_b a = \log_c b = \frac{4}{\log_b a \cdot \log_c b} + 1$

II $\log_b a = \frac{4}{\log_b a \log_c b} = \log_c b + 1$

III $\log_b a \mp 1 = \frac{4}{\log_b a \log_c b} = \log_c b$

$$\left[\begin{array}{l} x' = y = \frac{4}{x'y} + 1 \quad (1) \\ x' = \frac{4}{x'y} = y + 1 \quad (2) \\ x' \mp 1 = \frac{4}{x'y} = y \quad (3) \end{array}\right.$$

1) $x' = 2$, $y = 2$
2) $x' = 2$, $y = 1$
3) $x' = 2$, $y = 2$

Подставим

I $\log_{2x-3}(x-1) = 2$

$4x^2 - 12x + 9 = x - 1$

$4x^2 - 13x + 10 = 0$