Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103377**

ID профиля: **384101**

Вариант 21

Чистовик

1) $S = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$ | так как $a_1; a_2; \ldots \in Z$ $\Downarrow$ $a_2 - a_1 = d \in Z$

и так как прогресия возростающая $\Rightarrow d \geq 1$

$(a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$ | $\Rightarrow a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$ | $\Rightarrow a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 > \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 130d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27$

$\Downarrow$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{11}{6}$

$\Downarrow$

$d < \sqrt{\frac{11}{6}} < 2$ и так как ещё $d \geq 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \in R \setminus \{-8\} \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$D = 256 - 4 \cdot 49 = 60$

$\Downarrow$

$a_1' = \frac{-16 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -8 + \sqrt{15}$

$a_1'' = -8 - \sqrt{15}$

| $\Rightarrow$ $a_1 \in (-8 - \sqrt{15}; -8 + \sqrt{15})$ и так как $a_1 \in Z$ и

$-12 < -8 - \sqrt{15} < -11$

$-5 < -8 + \sqrt{15} < -4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in [-11, -5] \\ a_1 \in R \setminus \{-8\} \end{cases} \Rightarrow a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

1

Отв: $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

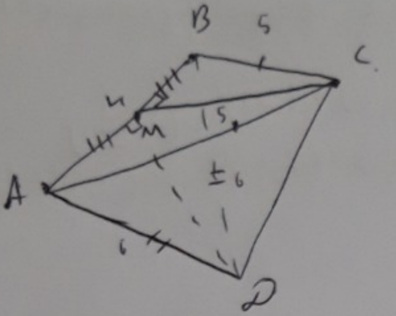
Чистовик

2|

если $MA = MB = \frac{AB}{2} \Rightarrow CM \perp AB$ и $DM \perp AB$

⇓

так как $CD \in CMD \xRightarrow{и} AB \perp CMD$



⇓

$AB \perp CD$

⇓

AB перпендикулярна оси цилиндра

⇓

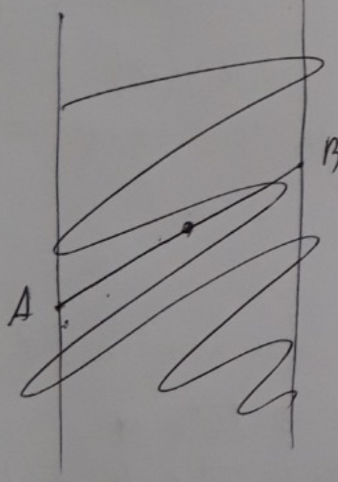
через AB проходящая ~~п~~ плоскость будет кругом с радиусом цилиндра

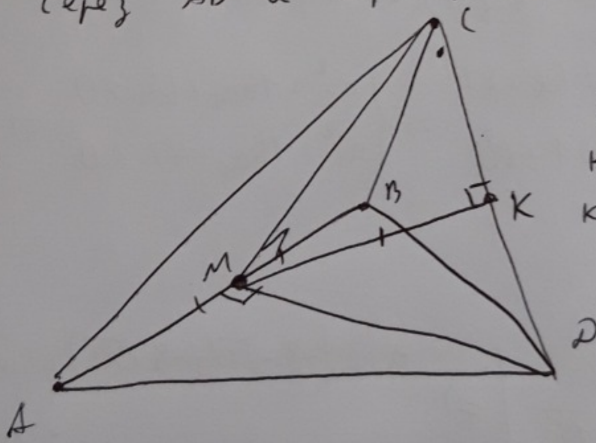
⇓

радиус будет наименьшим если AB будет диагональю $\Rightarrow \min(R) = \frac{AB}{2} = 2$.

рассмотрим 2 варианта

I C и D находится на различных сторонах плоскости проходящей через AB и перпендикуляр оси.





⇓

тогда CD пересечёт этот плоскость в точке K и будет перпендикулярна ему

⇓

$CK = \sqrt{CM^2 - MK^2} = \sqrt{AC^2 - MB^2 - MB^2} = \sqrt{25 - 4 - 4} = \sqrt{17}$

$KD = \sqrt{DM^2 - MK^2} = \sqrt{AD^2 - AM^2 - MA^2} = \sqrt{36 - 4 - 4} = \sqrt{28} = 4\sqrt{7}$

$\Rightarrow CD = \sqrt{17} + 4\sqrt{7} = KD + CK$

II C и D находится на одинаковой стороне от плоскости

⇓

$CD = KD - CK = 4\sqrt{7} - \sqrt{17}$

2

Отв: $4\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$.

21103377 (U384101 M1300351)

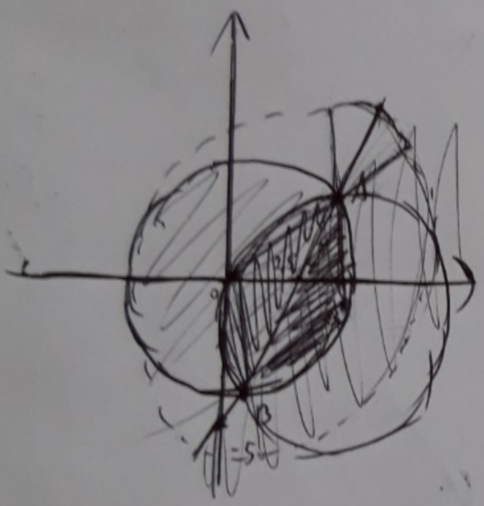
Чистовик

31) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20) & (2)\end{cases}$

(2) $a^2+b^2 \le \min(8a-4b; 20) \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 20 \\ 8x-4y \ge 20 \end{cases}$ (1')

$\begin{cases} x^2+y^2 \le 8x-4y \\ 8x-4y \le 20 \end{cases}$ (2')

(1')



от 1' мы ~~получим что~~ назначим точки A и B пересечени ем этих графиков

$\Downarrow$

$x^2+4x^2-20x+25=20$

$\Downarrow$

$x_1=2+\sqrt{3} \Rightarrow y_1=2\sqrt{3}-1$

$x_2=2-\sqrt{3} \Rightarrow y_2=-2\sqrt{3}-1$ ~~и что ...~~

из 2' получает опять что графики пересекаются в точках A, B

$\Downarrow$

а. М будет из всех точек решение ~~...~~ нарисовать круг с $R=\sqrt{20}$ и взять всё

$\Downarrow$

$2R\sin\angle AOB = \sqrt{(2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3}-1+2\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{12+16\cdot 3} = \sqrt{60} = 4\sqrt{15}$

$\Downarrow$

$\sin\angle AOB = \frac{4\sqrt{15}}{2\cdot\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$ (3)

$\Downarrow$

$S = \frac{(2\sqrt{20})^2\pi\cdot 60}{360}\cdot 2 + 2\cdot\frac{(\sqrt{20})^2\pi\cdot 60}{360} - \frac{(\sqrt{20})^2\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{4\cdot 20\cdot\pi\cdot 2}{6} + \frac{2\cdot 20\cdot\pi}{6} - 10\sqrt{3} = \frac{100\pi}{3} - 10\sqrt{3}$

Отв. $\frac{100\pi}{3} - 10\sqrt{3}$

Черновик

3)

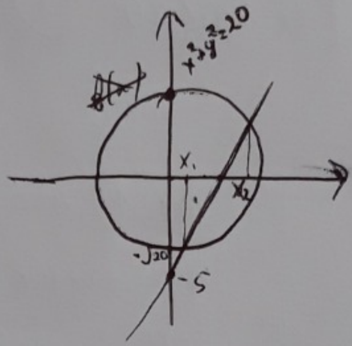
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 20\\ 8a-4b\ge 20\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b\\ 8a-4b\le 20\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

(1) $\cancel{f(x)} = x^2+y^2=20$

$\cancel{g(x)} = 8x-4y=20$ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$y=2x-5$



$x^2+4x^2-20x+25=20 \mid :5$

$x^2-4x+1=0$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$

$x_2=2-\sqrt{3}$

$x^2+y^2\le 20$

$8x-4y\ge 20$

$a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)$

$\Downarrow$

$x^2+y^2\le \min(8\cancel{x}-4\cancel{y};20)$

4. -2

$(x-4)^2+(y+2)^2\le 20$

$8a-4b\le 20$

$\Downarrow$

$8x-4y=20$

$y=2x-5$

Черновик

10.42

3 $S = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$

$\Downarrow$

$(a_1 + \cancel{8}7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$\begin{cases} a_1^2 + \cancel{119}23 a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$

$\cancel{a_1^2} + 23\cancel{a_1 d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + \cancel{60}^{33} > \cancel{a_1^2} + 23\cancel{a_1 d} + 130d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + \cancel{27}$

$33 > 18d^2$

$6d^2 < 11$

$d^2 < \frac{11}{6}$

112 100 -36

48 64

$d < \frac{\sqrt{66}}{6}$ но так как a_1 и $a_2 \in Z$

$\Downarrow$

$a_2 - a_1 = d \in Z$

$\Downarrow$

70 - 21

40

$d = 1$

$\Downarrow$

$256 - 196 = 60$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

$\boxed{\begin{cases} a^2 + b^2 \le 20 \\ 8a - 4b \ge 20 \end{cases}} \to$ y

$8x - 4y \ge 20$

$4y \le 8x - 20$

$y \le 2x - 5$

$y = 2x - 5$

$\Downarrow$

$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 \le 20$

$\Downarrow$

$x^2 - 4x + 1 \le 0$

$D = 16 - 4$

$\frac{12}{4} = 6$

$x_1 = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$

$x_2 =$

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 21 + 60$

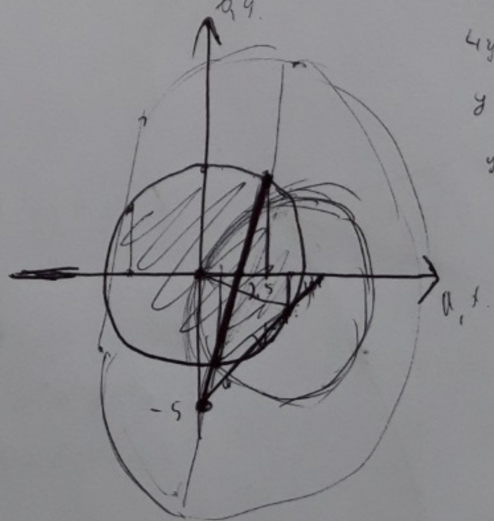
$(x-a)$

$a^2 - 8a + b^2 + 4b \le 0$

$a^2 - 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 \le 20$

$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

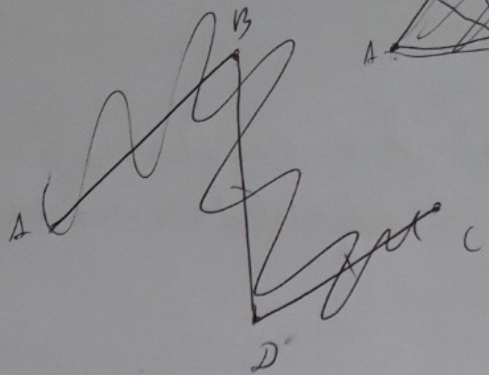
$y \ge 2x - 5$

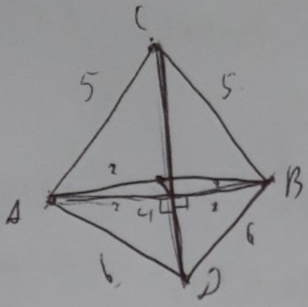


21103377 (U384101 M1300351)

Черновик

2)

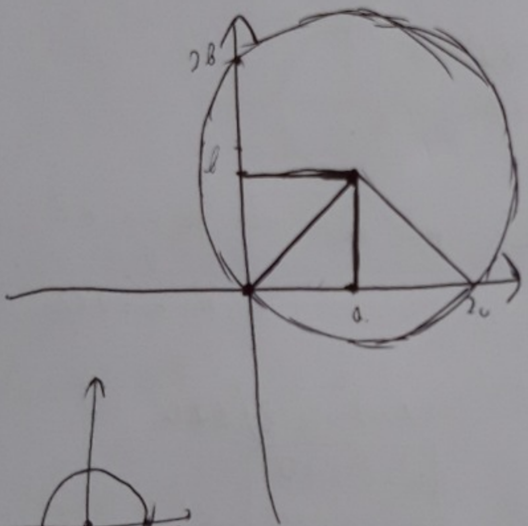




$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$25 - 4 = \sqrt{21}$

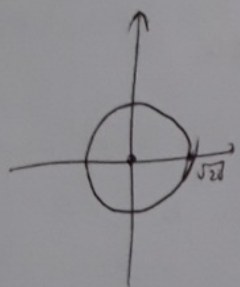
3)

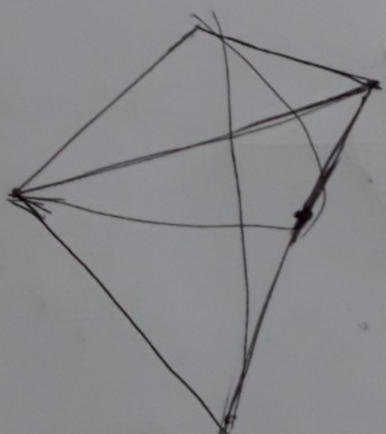


$\cancel{a^2+b^2 \le 20}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b \geq 20 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 8a-4b \\ 8a-4b \le 20 \end{cases} \end{array}\right.$$

$=1$





$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20$

$$2\left[\begin{array}{l} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b \geq 20 \end{array}\right.$$

21103377 (U384101 M1300351)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103377**

ID профиля: **384101**

Вариант 21

Чистовик

4) $\begin{cases} НОД(a, b, c) = 35 = 5^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 35 a_1 \\ b = 35 b_1 \\ c = 35 c_1 \end{array}$

$НОД(a_1; b_1; c_1) = 1$

$НОК(a_1; b_1; c_1) = 5^{17} 7^{15}$ $\Rightarrow$ a_1, b_1, c_1 все $5^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$ виде. но так как $НОД(a_1, b_1, c_1) = 1$

$\Downarrow$

все 3 не могут разделятся не на 5, не на 7.

ещё знаем что ~~одинат~~ есть число $= 5^{17} 7^{\beta}$ и есть число $= 5^{\alpha} \cdot 7^{15}$ (b. $a_1; b_1; c_1$)

$\Downarrow$

возможные варианты рассмотрим так

a_1: 5^{x_1} 7^{y_1}; b_1: 5^{x_2} 7^{y_2}; c_1: 5^{x_3} 7^{x_4} и есть $5^{17} \cdot 7^{15}$, 5^{α} и 7^{β}

$\Downarrow$

если $\begin{array}{ll} \alpha \neq 17 & \beta \neq 15 \\ \alpha \neq 0 & \beta \neq 0 \end{array}$ возможные варианты $= \overbrace{3 \cdot 2}^{A_3^2} \cdot \overbrace{3 \cdot 2}^{A_3^2} = 36$ $\left| \begin{array}{l} 5^{\alpha} 7^{15}, 1, 5^{17} 7^{\beta}) \ldots \\ \text{и так далее.} \end{array} \right.$

a. возможные вариант α и β $=$

$= \cancel{18 \cdot 16}\ 16 \cdot 14$

$\Downarrow$

~~(общие возможные варианты $36 \cdot 18 \cdot 16 =$~~
~~$= 10368$)~~

~~если $\alpha = 0$ $\beta = 0$ вар~~

если $\alpha = 0 \Rightarrow$ вар $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14 + 9 + 9 = 270$

если $\beta = 0 \Rightarrow$ вар ~~261~~ $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 16 + 9 = 297$.

если $\alpha = 17 \Rightarrow$ вар $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14 + 9 + 9 = 270$

если $\beta = 15 \Rightarrow$ вар $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 16 + 9 = 297$

$\Rightarrow$ $36 \cdot 16 \cdot 14 + 2 \cdot 270 + 2 \cdot 297 = 8060 + 540 + 594 =$

$= 9194$

Отв: ~~10368~~ 9194.

1

21103377 (U384101 M1300352)

Чистовик

5)

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) \cdot \log_{x+1}(2x^2-3x+5) \cdot \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 4$$

$\Downarrow$

$a^2(a-1)=4 \Rightarrow (a-2)(a^2+a+2)=0 \Rightarrow a=2$

$\Downarrow$

$a-1=1$

если $\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 2x-3 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow x \in \emptyset$;

если $\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1 \Rightarrow 2x^2-4x+4=0 \Rightarrow 2(x+1)^2+2=0 \Rightarrow x \in \emptyset$

$\Downarrow$

решение может быть только когда $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 1$

$\Downarrow$

$2x^2-3x+5 = 4x^2-12x+9 \Rightarrow 2x^2-9x+4=0$

$\Downarrow$

$D = 81-32 = 49$

$\Downarrow$

$x_1 = \frac{9+7}{4} = 4$

$x_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет так как $2x-3$ должен быть >0

$\Downarrow$

решение $x=4$

проверим

$\log_{\sqrt{5}} 5 \cdot \log_5 (32-12+5) \cdot \log_{(32-12+5)} 5^2 = 4 \Rightarrow 2 \cdot \log_5 25 \cdot \log_{25} 25 = 4$ правильно

Отв. $x=4$.

2

21103377 (U384101 M1300352)

Чистовик

6) $\angle B = \beta$

а)

так как $\angle ATC = \frac{\cup ABC - \cup AC}{2} =$

$= \frac{360 - 2\beta - 2\beta}{2} = 180 - 2\beta$

$\angle AOC = 2\beta$

$\Downarrow$

A, O, P, C, T принадлежат одной окружности

$\Downarrow$

~~$TA = BC$~~ $TA = TC$

$\Downarrow$

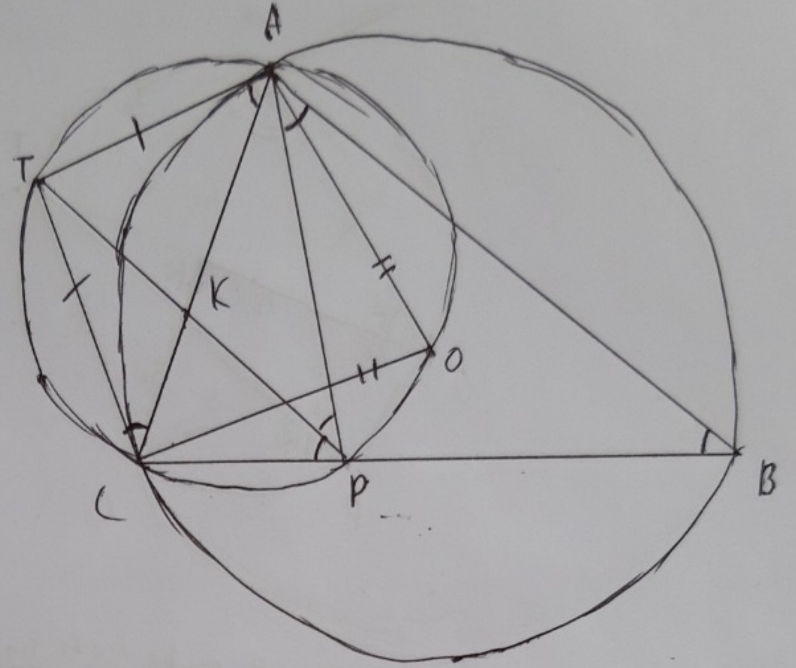
$\angle TPC = \angle TPA = \frac{\angle CPA}{2} = \frac{\angle AOC}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta = \angle CBA$

$\Downarrow$

$PT \parallel BA$

$\Downarrow$

$S_{ABC} = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 S_{CKP} = \left(\frac{S_{ACP}}{S_{CKP}}\right)^2 \cdot S_{CKP} = \frac{21^2}{9^2} \cdot 9 = 49$



б) ~~sin~~ $tg\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$

$AC = 2AO \cdot \sin\alpha \Rightarrow$

3

Отв: а) $S_{ABC} = 49$

21103377 (U384101 M1300352)

Черновик

$2x^2-3x+5=4x^2-12x+9$

$2x^2-9x+4=0$

$D=81-16=65$

НОД$(a, b, c)=35$ $\Rightarrow a=35a_1$ $b=35b_1$ $c=35c_1$

$2x^2-3x+5=x+1$

$2x^2-4x+4=0$

$2(x^2-2x+2)=0$ $x\in\varnothing$

$(a_1; b_1; c_1)=1$

$(x+1)^2=2x-3$

$x^2+2x+1=2x-3$

$x^2+4=0$

$\frac{5^{18}\cdot 7^{16}}{35\cdot a_1}$ | $\frac{5^{18}\cdot 7^{16}}{35\cdot b_1}$ | $\frac{5^{18}\cdot 7^{16}}{35\cdot c_1}$

$a_1 b_1 c_1 = 5^{\lambda}\cdot 7^{\beta}$

$b_1=3$ не могут разз... 5 или 7.

5^{17} 7^{15} 5^{λ} 7^{β}

5^{17} 7^{15}

$a_1=5^{\lambda}$ $b_1=5^{17}\cdot 7^{15}$, $c_1=b^2$

$3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 18\cdot 16=$

$36\cdot 18$

$=36\cdot 18\cdot 6$

$3\cdot 16\cdot 3$

$36\cdot 18 = 288 + 36\cdot 10 = 648$

$648\cdot 16 = 3888 + 6480 = 10368$

$3600+240=48$

$36\cdot 16 = 216 + 360 = 576$

$576\cdot 14 = 2304 + 5760 = 8060$

$280\cdot 24$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\quad \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=\log_{\sqrt{2x-3}}(2x-3)^2=4$

$a^2(a-1)=4 \Rightarrow a=2 \Rightarrow$

$a^3-a^2-0a-4 \mid a-2$

a^3-2a^2 ... a^2+a+2

a^2-a-4

a^2-2a

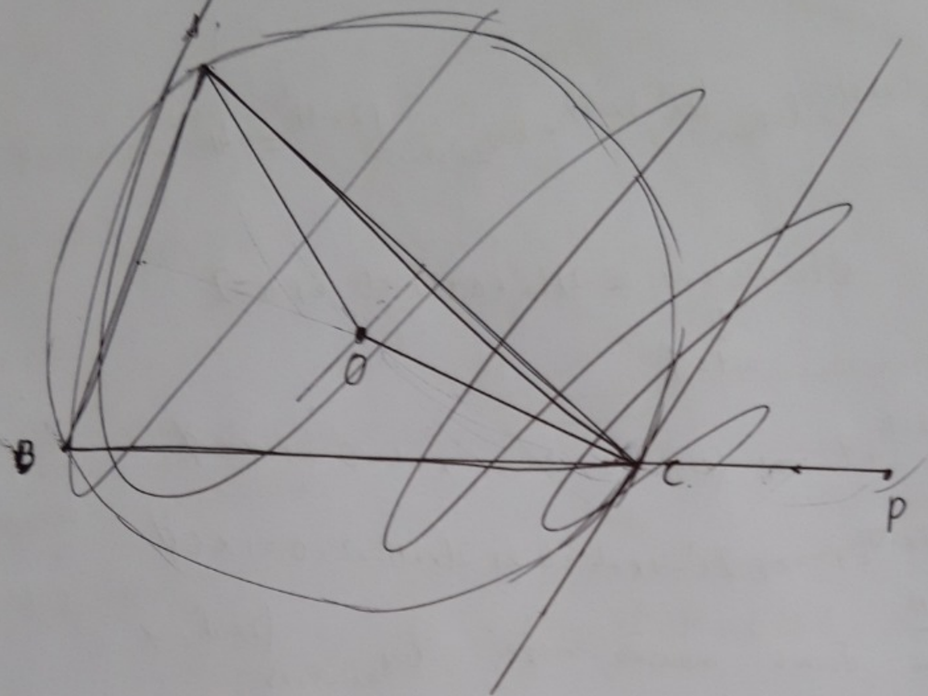
$2a-4$

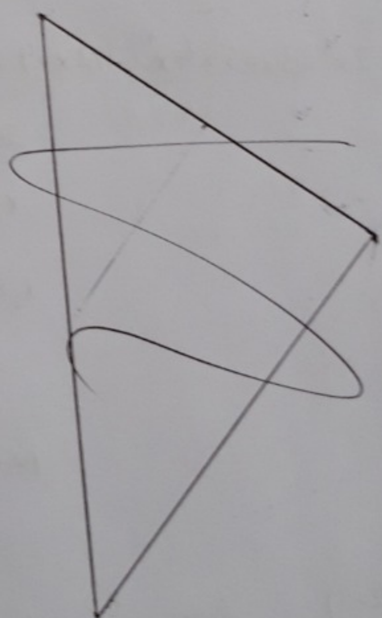
a^2+a+2

$D=1-8$

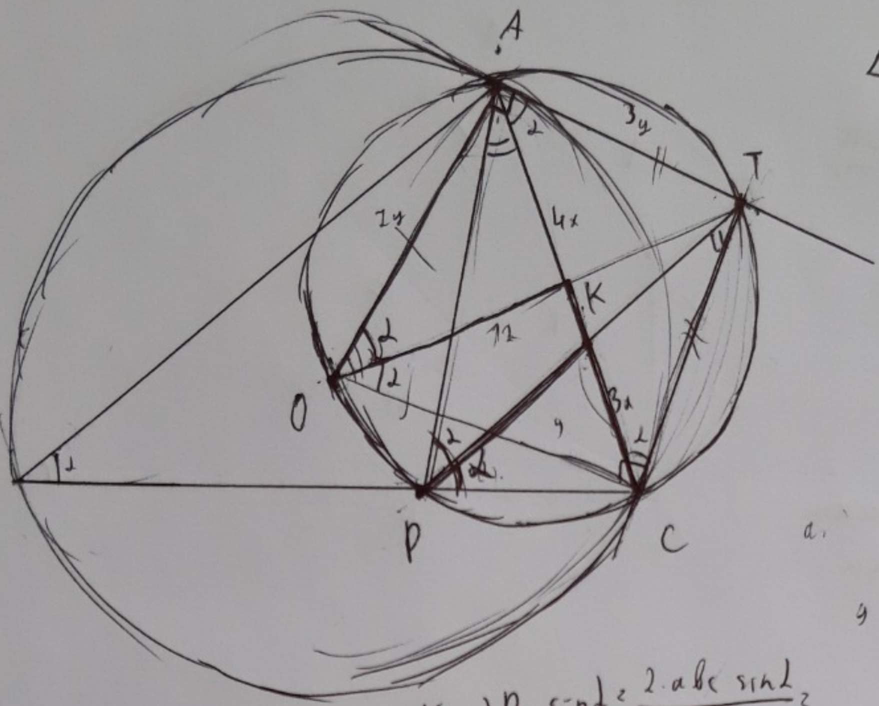
6)

Черновик





Черновик



$\angle ATC = \frac{\cup ABC - \cup AC}{2} =$

$= \frac{360 - 2\alpha - 2\alpha}{2} = 180 - 2\alpha.$

$9 \cdot \frac{1}{3} = 21 \cdot 2\,?$

$AC = 2R \cdot \sin\alpha = \frac{2 \cdot abc \sin\alpha}{45} =$

$tg\,\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} =$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}} = \downarrow$

$\frac{2}{R} = tg\,\alpha.$ $\quad \frac{R}{2z} = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$9 - 9\sin^2\alpha = 49\sin^2\alpha$

$ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{58}$

$4z^2 - R^2 = \frac{3}{7}R^2$

$AC = 2R \cdot \sin\alpha =$

$=$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \frac{49}{9}} = \frac{9}{58} = \sqrt{\frac{9}{58}}$

$28z^2 = 10R^2$

$KC = \frac{TC^2}{PT} =$

$9z^2 + 49z^2 = R^2$

$= \frac{AT^2}{PT} =$

$AC = 14y \cdot \sqrt{\frac{9}{58}} = 2R \cdot \sin\alpha.$

$R = \sin 2\alpha =$

$58z^2 = R^2$

$= \frac{R}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} =$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \frac{9}{49}} = \frac{49}{58}$

$= \frac{21}{24} \cdot \frac{\sqrt{58}}{3}$ $\quad 36z^2 = \frac{36R^2}{58}$

$AP \cdot BC - 12x^2 = PK^2.$

21103377 (U384101 M1300352)