Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103293**

ID профиля: **800120**

Вариант 21

Заметим, что всякая точка границы нашей фигуры подходит. т.к. всякая окружность с центром на границе пересечения содержит центр 1 из данных окружностей $\Rightarrow$ дуги $B'B''B'''$ и $A'A'''A''$ входят в контур; т.е. точки на границе достают окружность с центром O C и D. Также, иные рассматривать нет, т.к. для точек вне данной фигуры расстояние до дуг DAC и $CBD > \sqrt{20}$.

$\angle CBD = \angle CAD = 120^\circ$

$\angle B'CA' = \angle B''DA'' = 60^\circ$

$$S = S_{B'''B'BB''} + S_{AA'A'''A''} - S_{ACB} + S_{B'A'C} + S_{B''A''D} = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{20})^2 2 + \frac{1}{6}(\sqrt{20})^2\pi 2 -$$

$$\frac{(\sqrt{20})^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2 = \frac{1}{3}(2\pi(\frac{80}{3}+\frac{20}{6})) - \frac{20}{4}\cdot 2\sqrt{3} =$$

$$= 2\pi(\frac{180}{6}) - 10\sqrt{3} = 60\pi - 10\sqrt{3}.$$

Ответ: $60\pi - 10\sqrt{3}$.

№1.

a_1 - первый член, d - разность.

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d) > S+27\\ (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+23a_1d+112d^2 > S+27\\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60\\ -a_1^2-23a_1d-112d^2 < -S-27\end{cases}$$

$18d^2 < 33 \Rightarrow d=1$, так как возрастающая и целочисленная.

$$\begin{cases}a_1^2+23a_1+112 > \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7+27 \;|\cdot 2\\ a_1^2+23a_1+130 < \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7+60 \;|\cdot 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_1^2+46a_1+224 > 7a_1+42+54\\ 2a_1^2+46a_1+260 < 7a_1+42+120\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a_1^2+39a_1+128 > 0 \quad (1)\\ 2a_1^2+39a_1+98 < 0. \quad (2)\end{cases}$$

(1): $2a_1^2+39a_1+128=0.$

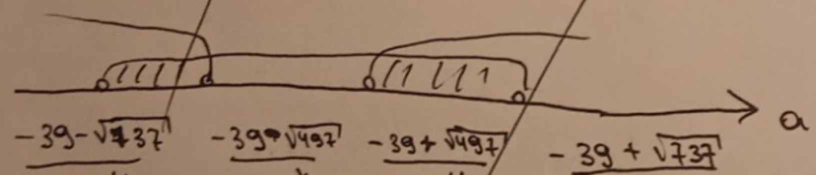
$D = 1521-1024=497.$

$a_{1,2} = \frac{-39\pm\sqrt{497}}{4}$

(2) $2a_1^2+39a_1+98=0$

$D = 1521-784=737.$

$a = \frac{-39\pm\sqrt{737}}{4}.$



$\frac{-39-28}{4}$ $\frac{-39-22}{4}$ $\frac{-39+22}{4}$ $\frac{-39+28}{4}$

№1.

a_1 - первый член, d - разность.

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > S+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2 > S+27 \\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60 \\ -a_1^2-23a_1d-112d^2 < -S-27 \end{cases}$$

$18d^2 < 33 \Rightarrow d=1$, так как возрастающая и целочисленная.

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1+112 > \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7+27 \quad |\cdot 2 \\ a_1^2+23a_1+130 < \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7+60 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$2a_1^2+46a_1+224 > 7a_1+42+54$

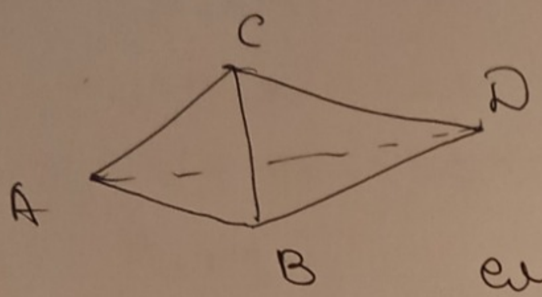
$2a_1^2+46a_1+260 < 7a_1+42+120$

$2a_1^2+39a_1+128 > 0 \quad (1)$

$2a_1^2+39a_1+98 < 0. \quad (2)$

$\ldots + 98 = 0$

№2 чистовик



CD || оси, весь отрезок CD лежит на цилиндре. Радиус цилиндра равен радиусу окружности, полученной пересечением цилиндра и плоскости, перпендикулярной оси.

Построим такую плоскость: проведем высоту BH треугольника BCD. Заметим, что это также высота треугольника ACD, т.к. треугольники Δ равны. Поэтому плоскость, содержащая Δ AHB $\perp$ CD, т.к. AHB принадлежит цилиндру.

Описанная окружность ΔAHB имеет искомый радиус.

Пусть $|CD| = x$, найдем возможные x. Проведем CH' - высота ΔACB. т.к. Δ р/б это медиана ΔADB р/б то DH' - его высота.

Из р-ва Δ:

$CH' = \sqrt{CB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{21}$

$DH' = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$. $\sqrt{32} - \sqrt{21} \le x \le \sqrt{32} + \sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{32} - \sqrt{21} \le x \le \sqrt{32} + \sqrt{21}$.

$a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 21 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1 + 8)^2 > 0$ – всегда, кроме $a = -8$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 < 21 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$\frac{D}{4} = 15$

$a_2 = -8 \pm \sqrt{15}$

получаем $a \in (-8 - \sqrt{15}; 8 + \sqrt{15})$ $a \neq -8$.

$-5 < -8 + \sqrt{15} < -4$.

Ответ: $a = -11; -10; -9; -7; -6; -5$.

21103293 (U800120 M1297049)

№3. чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20. \ (1)\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20) \ (2)\end{cases}$$

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 20$

круг с центром $(a;b)$ $r=\sqrt{20}$

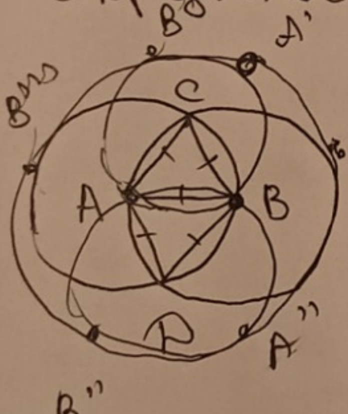
(2) $a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)$ (*)

равносильно: $\begin{cases}a^2+b^2\le 20\\ a^2+b^2\le 8a-4b \ (3)\end{cases}$

(3): $(a-4)^2+(b+2)^2\le 20.$

(*) это пересечение круга с центром $(0;0)$ и центром $(4;-2)$ радиусами $\sqrt{20}$

Заметим: $4^2+(-2)^2=20. \Rightarrow$ центр одной окружности на другой.



Искомая фигура: то есть её площадь A''' — площадь. заметающая кругами с центром в пересечении кругов

$A'A''$ - точки касания окружности с центром в A и $r=2\sqrt{20}$. и окружности с центром O; и $r=\sqrt{20}$.

A' аналогично A''-центр второй окружности в D и A B и B''.

Аналогично определены A''' и B'''.

Докажем, что это искомая фигура

Заметим, что достаточно взять объединение пересечения изначальных кругов и кругов с центром на границе их пересечения.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103293**

ID профиля: **800120**

Вариант 21

① т.е. одно из чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ равно 1, другое равно 18, а третье от 1 до 18.

② т.е. одно из чисел $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ равно 1, а другое равно 16, а третье от 1 до 16.

① кол-во чисел, где есть хотя бы 1 повторение: 6.

α_1	1	1	18	18	18	1
β_1	1	18	1	18	1	18
γ_1	18	1	1	1	18	18

6 чисел

если нет повторений, то 3 варианта расставить 1, 2 варианта расставить 18 ~~...~~ на оставшейся позиции может стоять число от 2 до 17:

таких ~~...~~ 16.

то есть для ① количество чисел ~~...~~: $6+3\cdot2\cdot16$

Аналогично для ② количество чисел ~~...~~: $6+3\cdot2\cdot14$

Ответ к задаче $(6+3\cdot2\cdot16)\cdot(6+3\cdot2\cdot14)=$

$=9180.$

Б4 чистовик

$\{p_1, p_2 \ldots\}$ - простые числа

пусть $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots$

$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \ldots$

$c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \ldots$

Тогда $НОД(a, b, c) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}$

$\cdot p_3^{\min(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)}$

$НОК(a, b, c) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} \cdot$

$p_3^{\max(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)}$

$НОД(a, b, c) = 5 \cdot 7$

$НОК(a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$

$b = 5^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$

$c = 5^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

если было бы простое число, отличное от 5 или 7, то это число ~~было~~ входило бы в НОК, но там 5 и 7

другого простого числа нет.

$\Rightarrow$ другого простого

$\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$

$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 18$

$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$

$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 16$

21103293 (U800120 M1297050)

№5. чистовик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$.

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ \sqrt{2x-3}\neq 1 \\ x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ 2x^2-3x+5>0 \\ 2x^2-3x+5\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1{,}5 \\ x\neq 2 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\in R \\ x\in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1{,}5 \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Заметим, что произведение чисел равно 4.

В рамках ОДЗ

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$= 2\log_{2x-3}(x+1)\cdot 2\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$= 4\cdot\dfrac{1}{\log_{x+1}(2x-3)}\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)\cdot\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$= 4\,\dfrac{\log_{x+1}(2x^2-3x+5)}{\log_{x+1}(2x-3)}\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) =$

$= 4\cdot\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)\cdot\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = 4\cdot 1 = 4.$

21103293 (U800120 M1297050)

получаем, $x=4$.
проверяем значения всех 3 при $x=4$.

$\log_{\sqrt{8-3}} 5 = 2$

$\log_{3x-12+5} (8-3)^2 = 1$

$\log_5 25 = 2$

$x=4$ – подходит – единственное решение

Ответ: $x=4$.

обозначим числа как $y, y, y-1$.

$y \cdot y(y-1) = 4.$

$y^3 - y^2 - 4 = 0.$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 4 & y-2 \\ y^3 - 2y^2 & y^2+y+2 \\ \hline y^2 - 4 & \\ y^2 - 2y & \\ \hline 2y - 4 & \\ 2y - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(y-2)(y^2+y+2) = 0$

$y = 2.$ $\quad y^2+y+2=0.$

$y \in \emptyset$, т.к. $D<0.$

$\Rightarrow$ два из чисел равны 2, третье 1

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 1$

$2x^2-3x+5 = x+1$

$2x^2-4x+4=0$

$D<0$, $x \in \emptyset$. третье из чисел не равно 1

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2$

$2x^2-3x+5 = x^2+2x+1$

$x^2-5x+4=0.$ $x=4$ $x=1$ (не подходит под ОДЗ) б) заметим $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle APC} =$

$= 49 - 9 - 12 = 28.$ РТ-б-са

$\angle AOC = 2\angle ABC = \angle APC.$

$\angle APB = 180 - 2\angle ABC.$

$\angle APB + \angle ABC + \angle BAP = 180^\circ$

$\angle BAP = \angle ABC \Rightarrow \triangle$ равнобед.

$S_{APB} = 28 = \frac{1}{2} \cdot BP^2 \cdot \sin(\pi - 2\operatorname{arctg} \frac{3}{7}) =$

$= \frac{1}{2} BP^2 \sin(2\operatorname{arctg} \frac{3}{7}) = BP^2 \sin(\operatorname{arctg} \frac{3}{7}) \cdot \cos(\operatorname{arctg} \frac{3}{7})$

$\cancel{= BP^2}$

$$BP = \sqrt{\frac{28}{\sin(\operatorname{arctg}\frac{3}{7}) \cdot \cos(\operatorname{arctg}\frac{3}{7})}} = \sqrt{\frac{56}{\sin(2\operatorname{arctg}\frac{3}{7})}}$$

т. sin: $\frac{AB}{\sin(2\operatorname{arctg}\frac{3}{7})} = \frac{BP}{\sin(\operatorname{arctg}\frac{3}{7})}$

$AB = 2BP \cdot \cos \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$ $\cancel{= 2\sqrt{28 \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{3}{7})}}$

$= 2\sqrt{28 \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{3}{7})} = 2\sqrt{28 \cdot \frac{7}{3}} = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} =$

$= \frac{28}{\sqrt{3}}.$

$PK \perp AB$ $\angle ABC = \angle KPC$

$KP = AB \cdot \frac{9}{21} = \frac{28 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}.$

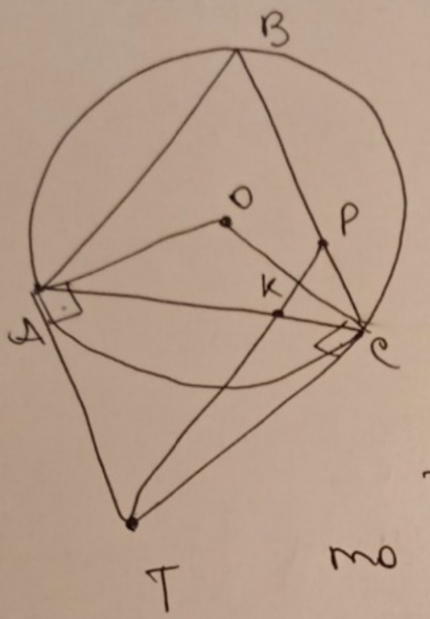
$PC = \frac{9}{\cancel{1}2} BP.$

т. cos $KC = \sqrt{KP^2 + PC^2 - 2\, KP \cdot AC \cos \operatorname{arctg}\frac{3}{7}} =$

$\Rightarrow AC = \frac{21}{9} KC = \frac{21}{9}\sqrt{\frac{12}{3} + \frac{9^2}{12} \cdot \frac{56}{\sin 2\operatorname{arctg}\frac{3}{7})} - 2 \cdot \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{\sqrt{21} \cdot 7}{3}}$

№6. чистовик

$\angle OAT = \angle OCT$.



$\angle AOC = \angle APC$

т.к. $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ$

точки $A\,O\,C\,T$ на 1 окружности.

т.к. $A\,O\,P\,C$ на 1 окружности,

то A, O, P, C, T на 1 окружности

Докажем, что $PT \parallel AB$.

т.к. AB антипараллельно CA относительно BC и AT

т.к. AT – касательная, PT – антипараллельно AC, относительно BC и AT.

отношение площадей APK и KPC $= \frac{AK}{KC}$, т.к. общая высота $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{12}{9}$

$AB \parallel PT$: $\Delta ABC \sim \Delta KPC$ по 3 углам

k подобия ABC и KPC $\frac{12+9}{9} = \frac{21}{9}$.

$S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \left(\frac{21}{9}\right)^2 = 9 \cdot \left(\frac{21^2}{9^2}\right) = \frac{21^2}{9} = 49.$