Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103189**

ID профиля: **214236**

Вариант 21

Чистовик

① $\exists\ a_1 = a$ по усл.: $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 0$

$S = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 = 7a+21n$

по усл: $\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ a_{11} \cdot a_{14} < S+60 \end{cases}$ $\begin{cases} (7n+a)(16n+a) > S+27 \\ (10n+a)(13n+a) < S+60 \end{cases}$ $\begin{cases} 112n^2+23an+a^2 > 7a+21n+27 \\ 130n^2+23an+a^2 < 7a+21n+60 \end{cases}$

$\begin{cases} 112n^2+23an+a^2-27 > 7a+21n \\ 130n^2+23an+a^2-60 < 7a+21n \end{cases} \Rightarrow 130n^2+23an+a^2-60 < 112n^2+23an+a^2-27$

$18n^2 < 33$

$n < \sqrt{\frac{33}{18}}$ $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 1$ подставляем в систему $\Rightarrow$

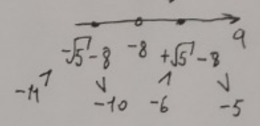
$\begin{cases} a^2+16a+64 > 0 \\ a^2+16a+59 < 0 \Rightarrow \end{cases}$ $(a+8)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -8$

$D/4 = 64-59 = 5$

$a = \pm\sqrt{5} - 8$

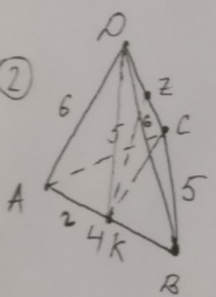
тут лежат: $-10, -9, -8, -7, -6$

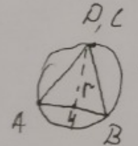
не подходит



Ответ: $a_1 \in \{-10; -9; -7; -6\}$

②





цилиндр в разрезе

$\exists$ K – середина AB, в р/б $\triangle^{\text{ках}}$ ADB и ACB медиана – есть высота $\Rightarrow CK \perp AB$ и $DK \perp AB$ и т.к. $AB \perp$ двум пересек-ся прямым в (DKC), то $AB \perp (DKC)$ и $\Rightarrow AB \perp DC \Rightarrow AB \perp$ оси цилиндра (CD (по усл.) $\parallel$ оси цилиндра) $\Rightarrow d \geq 4$ $\min(d)$ при $d = 4 \Rightarrow$

$r = 2 \Rightarrow AB$ – диаметр и KZ – радиус $= 2$

по Th. Пифагора

$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$

$DZ = \sqrt{DK^2 - ZD^2} = \sqrt{28}$

аналогично

$CK = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

$CZ = \sqrt{CK^2 - ZC^2} = \sqrt{17}$

$DC =$

$\Rightarrow DZ + CZ = \sqrt{28} + \sqrt{17}$ I сл.

во II-м случае, если т. Z лежит за т. C от т. D

$DC = DZ - CZ = \sqrt{28} - \sqrt{17}$

Ответ: DC может быть равно $\sqrt{28} + \sqrt{17}$ и $\sqrt{28} - \sqrt{17}$

Черновик

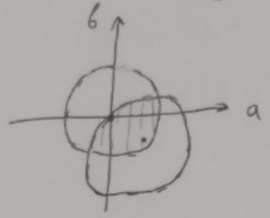
(3)

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 & (\vee) \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b;\ 20) & (*) \end{cases}$$

Рассмотрим систему аналогичную $(*)$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 8a-4b \\ a^2+b^2 \le 20 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2 \le 0 \\ a^2-8a+16+b^2+4b+4 \le 20 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \le 20 \end{cases}$$

Это окружности: на плоскости $(a;b)$



Нашему условию удовлетворяет область пересечения данных окружностей, а выражение $(\vee)$ есть окружность на плоскости $(x;y)$ с центром в т. $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{20}$

Черновик

(1) $S = \overset{}{a_1} + \overset{1}{a_2} + \overset{2}{a_3} + \overset{3}{a_4} + \overset{4}{a_5} + \overset{5}{a_6} + \overset{6}{a_7} = 7a + 21n$

$a_8 a_{17} > S+27 \qquad (7n+a)(16n+a) > S+27 \qquad 112n^2+23an+a^2 > S+27 = 7a+21n+27$

$a_{11} a_{14} < S+60 \qquad (10n+a)(13n+a) < S+60 \qquad 130n^2+23an+a^2 < S+60 = 7a+21n+60$

$112n^2+23an+a^2-27 > 7a+21n$

$130n^2+23an+a^2-60 < 7a+21n$

$130n^2+23an+a^2-60 < 112n^2+23an+a^2-27$

$18n^2 < 33 \qquad n \in \mathbb{Z}$ т.к. послед-ть целая и $n>0$

$n < \sqrt{\frac{33}{18}}$

$n = 1$

$112+23a+a^2-27 > 7a+21$

$130+23a+a^2-60 < 7a+21$

$a^2+16a+64 > 0 \implies D/4 = 64-64 = 0$

$a^2+16a+59 < 0 \qquad (a+8)^2 > 0$

$D/4 = 64-59 = 5 \qquad a \neq -8$

$a = \pm\sqrt{5} - 8$

$-\sqrt{5}-8 \quad \sqrt{5}-8 \quad a$

$-11 \quad -10 \quad -6 \quad -5$

$a = -10; -9; -8; -7; -6$

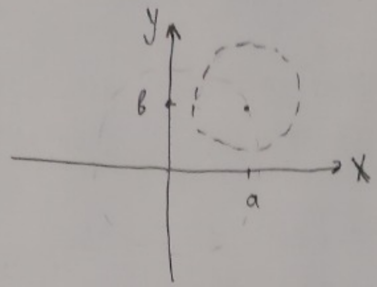
черновик

②

$S(M)$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b;20)\end{cases}$$

$\Pi r^2 = 20\pi$



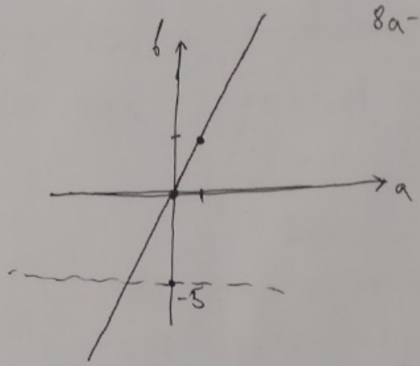
$$\begin{cases}a^2+b^2\le 8a-4b\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$

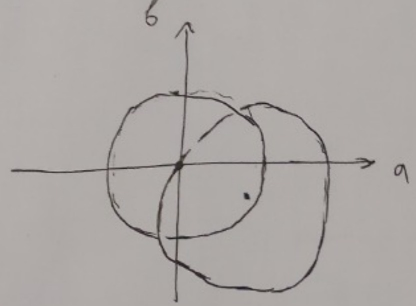
$a^2-8a+16+b^2+4b+4\le 2$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$

$8a-4b=0$

$b=2a$





$8a-4b\le 20$

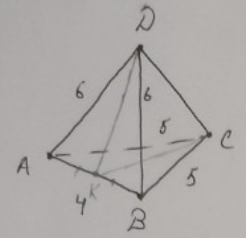
$8a<$

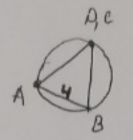
$2a-b<5$

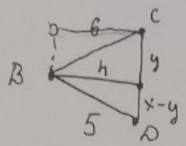
$2a<5+b$

21103189 (U214236 M1297225)

(2) Черновик







$h = \sqrt{25 - x^2 + 2xy - y^2} = 36 - y^2$

$h^2 = 25 - x^2 + 2xy - y^2 = 36 - y^2$

$11 + x^2 - 2xy = 0$

$x^2 - 2xy + 11 = 0 \qquad 2x - 2y = 0$

$D/4 = y^2 - 44 \qquad x = y$

$x = \pm\sqrt{y^2 - 44} + y$

KZ − r

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103189**

ID профиля: **214236**

Вариант 21

Чистовик

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 35 \\ НОК(a;b;c) = 5^{18} \cdot 7^{16} \end{cases}$

$x, y \in Z$

$a = 5^{x_1} \cdot 7^{y_1}$

$b = 5^{x_2} \cdot 7^{y_2}$

$c = 5^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

$\cancel{x_1 + x_2 + x_3 = 18}$

$\cancel{y_1 + y_2 + y_3 = 16}$

без ограничения общности:

$\left.\begin{matrix} x_1 = 1 \text{ и } y_1 = 1 \\ x_2 = 18 \text{ и } y_2 = 16 \\ x_3 \in [1;18] \text{ и } y_3 \in [1;16] \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

кол-во способов: $\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 18}_{\text{кол-во способов выбрать } x} \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 16}_{\text{к-во сп-в выбрать } y} = \cancel{6 \cdot 34} = 108 \cdot 96 = 10368$, но некоторые тройки совпадают, например

x: {18, 18 и y: 1, 16, 16

считаются больше чем нужно

точно трижды

$(108-3) \cdot (96-3) = 105 \cdot 93 = 9765$

Ответ: кол-во способов: 9765

(5) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\quad \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\quad \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$x = 2\log_{2x-3}(x+1)$ $\quad y = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $\quad z = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2-3x+5 > 0 \\ x+1 > 0 \\ 2x-3 > 0 \\ 2x^2-3x+5 \neq 1 \\ x+1 \neq 1 \\ 2x-3 \neq 1 \end{cases}$

$xyz = 2 \cdot 2 = 4$

I: $x = y = z+1$

$x^2(x-1) = 4$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

$x = 2$ $\quad x^2 + x + 2$

$D = -7 < 0$

$\varnothing$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = 2$

$2x - 3 = x + 1$

$x = 4$ подставляем... $\Rightarrow$ (подходит под ОДЗ)

II: аналогично для y:

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = 2$

$2x^2 - 3x + 5 = 2x - 3$

$2x^2 - 5x + 8 = 0$

$D = 25 - 64 < 0$

$\varnothing$

III: аналогично для z:

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = 2$

$2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

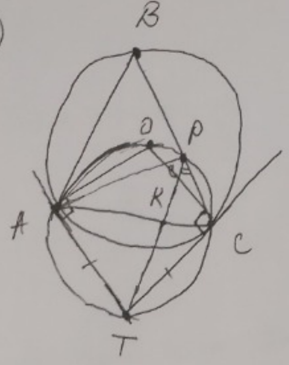
$x = \frac{\pm 3 + 5}{2} = 4; 1$

не подходит под ОДЗ

подходит

Ответ: 4

⑥



ТК по условию $S_{APK}=12$ и $S_{CPK}=9$, а площадь $\triangle APK=\frac{1}{2}PH\cdot AK$, где PH - высота на пр. AC, и аналогично для $\triangle CPK$, то

$\frac{AK}{KC}=\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{4}{3}$; ТК OA и OC - радиусы и проведены в т. касания так, что $\angle OAT=\angle OCT=90° \Rightarrow$ т. T лежит на окр. γ проведенной через т. A, т. O, т. C $\Rightarrow$ вписанные углы $\angle APT$ и $\angle CPT$ опираются на равные дуги $\Rightarrow \angle APK=\angle CPK \Rightarrow PK$ - биссектриса $\Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=\frac{4}{3}$

Черновик

⑤ $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2\log_{2x-3}(x+1)$ $2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$ $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$(x+1)(2x-3)=2x^2-x-3$

$a\mp b$

$c=a-1$ $a=c+1$

$a\mp b=c+1$

$a+a=2a=2c+2$

	1	-1	0	-4
-2	1	1	2	

$108-3=105$

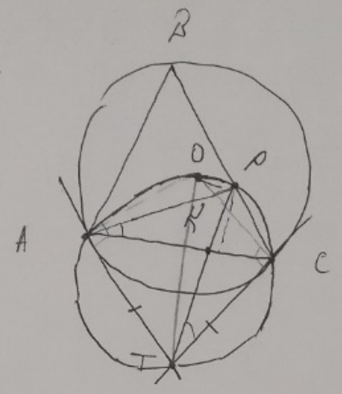
$96-3=93$

$$\begin{array}{r} \times 105 \\ 93 \\ \hline 315 \\ 945 \\ \hline 9765 \end{array}$$

$3\cdot 2\cdot$

21103189 (U214236 M1297226)

6 черновик



$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$\frac{AK}{CK} = \frac{4}{3}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$

Черновик

(4)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} \end{cases}$$

$a=5^x\cdot 7^y$

$b=5^x\cdot 7^l$

$c=5^z\cdot 7^q$

1 18 1

1 18 18

$x_1+x_2+x_3=18$

$y_1+y_2+y_3=16$

$$\begin{array}{r} 108 \\ \times\ 96 \\ \hline 648 \\ 972 \\ \hline 10368 \end{array}$$