Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103143**

ID профиля: **285742**

Вариант 21

№ 1 Чистовик (1 стр.)

$S = 7a_1 + d(1+2+3+4+5+6) = 7a_1 + 21d$

$a_8 = a_1 + 7d$; $a_{17} = a_1 + 16d$;

$a_{11} = a_1 + 10d$; $a_{14} = a_1 + 13d$;

Представим данные неравенства в развёрнутом виде:

1) $a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

$(a_1 + 7d) \cdot (a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27$

$a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27$

2) $a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$

$(a_1 + 10d) \cdot (a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60$

$a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 < 7a_1 + 21d + 60$

Из (2) неравенства вычтем (1), получим:

$18d^2 < 33$

Так как все члены прогрессии – целые числа, то и разность прогрессии должна натуральной и удовлетворяющей неравенству $18d^2 < 33$.

$\Rightarrow$ Единственное d равно 1

Представим, что $d = 1$, тогда:

1) $a_1^2 + 23a_1 \cdot 1 + 112 \cdot 1^2 > 7a_1 + 21 \cdot 1 + 27$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1 + 8)^2 > 0$

$a_1 \neq -8 \Rightarrow a_1 \in (-\infty; -8) \cup (-8; +\infty)$

№ 1 (продолжение) Чистовик (2 стр)

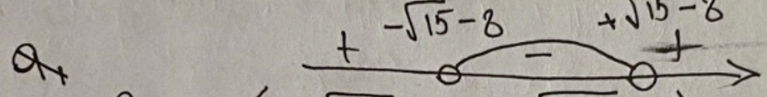
2) $a_1^2 + 23a_1 \cdot 1 + 130 \cdot 1^2 < 7a_1 + 21 \cdot 1 + 60$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$D = 16^2 - 4 \cdot 49 = 256 - 196 = (\sqrt{60})^2 = (2\sqrt{15})^2$

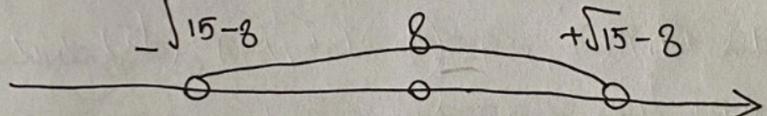
$a_{1,1} = \dfrac{-16 + 2\sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} - 8$

$a_{1,2} = \dfrac{-16 - 2\sqrt{15}}{2} = -\sqrt{15} - 8$



$a_1 \in (-\sqrt{15} - 8 ; \sqrt{15} - 8)$

Объединим:



$-4 < -\sqrt{15} < -3 \Rightarrow -12 < -\sqrt{15} - 8 < -11$

$3 < +\sqrt{15} < 4 \Rightarrow -5 < \sqrt{15} - 8 < -4$

$\Rightarrow a_1 = -11, -10, -9, -7, -6, -5$

Ответ: $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$

Чистовик (3 стр)

№ 2

1) Пусть т. M – середина AB, тогда $DM \perp AB$ и $CM \perp AB$, т.к. и DM, и CM – – высоты и медиана в равнобедренных $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ соответственно (т.к. по условию $AC = CB$ и $AD = DB$)

2) Так как CD лежит на боковой поверхности цилиндра и параллелен оси цилиндра, то плоскость $CMD \perp$ основанию цилиндра, а AB параллелен основанию цилиндра.

3) Тогда, чтобы получить минимальное значение радиуса цилиндра, необходимо, чтобы AB был его ~~длин~~ диаметром, поскольку диаметр не превосходит длину хорды.

4) Из п. 3 следует, что расстояние от т. M до отрезка CD тоже равно радиусу цилиндра

5) $CM = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$, т.к. CM – высота и медиана равнобедренного треугольника ABC

$DM = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{36-4} = \sqrt{32}$, т.к. DM – медиана и высота равнобедренного треугольника ABD

Чистовик (4В стр)

№2 (продолжение)

б) Пусть т. H – основание перпендикуляра из т. M на отрезок DC, тогда при каждом целом значении MH будет радиусом

$\Rightarrow \quad DC = DH + HC$, где:

$$DH = \sqrt{DM^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{32-4} = \sqrt{28}$$

и $HC = \sqrt{CM^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{21-4} = \sqrt{17}$

$$DC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$$

Ответ: $DC = \sqrt{28} + \sqrt{17}$

№3.

Преобразуем исходную систему и изобразим её в осях $(a;b)$. Два уравнения данной системы равносильны этой:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 20 & (1) \\ a^2 + b^2 \leq 8a - 4b & (2) \end{cases}$$

Второе уравнение задаёт окружность $(a-4)^2 + (b-2)^2 \leq 20$.

Первое тоже задаёт окружность с огромным радиусом.

Первое уравнение системы воспринимается как целое

21103143 (U285742 M1295339)

4

№2 Черновик.

1) Пусть т. M – середина AB. По условию тогда: OH и CM – ~~перпендикуляра~~ ⊥ AB

2) Т.к. CD лежит на боковой поверхности цил., то плоскость CMD ⊥ основ. цилиндра, AB ∥ основанию цилиндра

3) Тогда, чтобы получить миним. значение радиуса цилиндра, необходимо, чтобы AB было его диаметром. т.к. D не превосходит длину хорды

4) Получается, что расстояние от т. M до CD тоже равно радиусу цилиндра

5) $CM=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$, т.к. CM – медиана, $DM=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}$, т.к. DM – медиана

Пусть т. H – основание перпендикуляра из т. M на DC, тогда при каждом условии MH будет радиусом

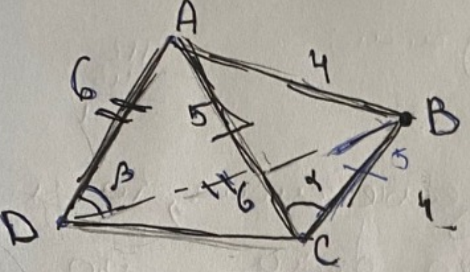
$\Rightarrow$ DC состоит из DH и HC, где $DH=\sqrt{32-4}=\sqrt{28}$; $HC=\sqrt{21-4}=\sqrt{17}$

№ 1

Черновик

S_7 $\quad a_1; a_2; a_3; a_4 \ldots$

$a_8 a_{17} > S_7 + 27$; $a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$



$AB = 4$; $AC = CB = 5$

$16 = 50 - 2 \cdot 25 \cdot \cos\alpha$

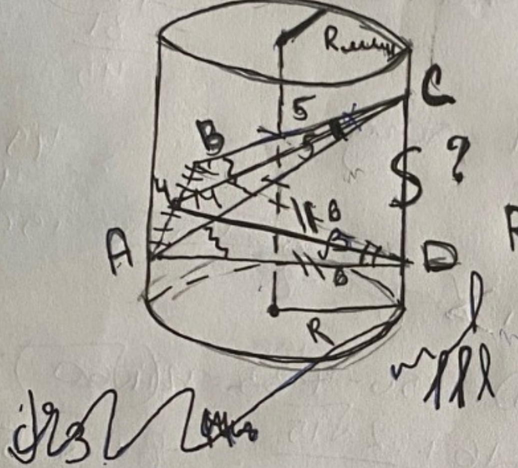
$50\cos\alpha = 34$

$\cos\alpha = \frac{34}{50} = 0{,}68$

$16 = 72 - 2 \cdot 36 \cdot \cos\beta$

$72\cos\beta = 56$

$\cos\beta = \frac{56}{72} = \frac{28}{36} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$



R

Rкасат.

Наименьший радиус

Арифметич. прогрессия

S_7 ~~$a_8 a_{17} > S_7 + 27$; $a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$~~

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad a_{16} \quad a_{17}$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20 \\ a^2 + b^2 \le \min(8a - 4b, 20) \end{cases}$$

$S_м$ − ?

$(a_1+7d)\cdot(a_1+16d) = a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27$

$(a_1+10d)\cdot(a_1+13d) = a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60$

из II вычтем I, получим:

$18d^2 < 33$

$$\begin{array}{r} 112 \\ -\ 48 \\ \hline 64 \end{array}$$

т.к. все члены прогр. – целые числа, то и разность прогрессии должна быть натуральным

$$\begin{array}{r} 130 \\ -\ 81 \\ \hline 49 \end{array}$$

Представим, что $d = 1$, тогда:

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 4 \\ \hline 196 \end{array}$$

$a_1^2+16a_1+64>0$

$(a_1+8)^2>0 \Rightarrow a_1 \ne -8$

-8

$a_1^2+16a_1+49<0$ $\quad D = 256-\cancel{4\cdot 33}^{\,196} = (\sqrt{60})^2$

$a_1 = \frac{-16+2\sqrt{15}}{2} = -8+\sqrt{15}$

$a_2 = \frac{-16-2\sqrt{15}}{2} = -8-\sqrt{15}$

$-8-\sqrt{15}$ $\quad -8+\sqrt{15}$

-8

1 2 3 4 5 6

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103143**

ID профиля: **285742**

Вариант 21

Чистовик. 2 часть. Страница 5

№ 4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=35 & (1) \\ НОК(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16} & (2) \end{cases}$$

1) Если НОД такой, то из (1) следует, что каждое из чисел a, b и c делятся и на 5, и на 7 без остатка.
При этом, существует число, у которого 5 и 7 в разложении равно 1.
Из этого следует, что никаких делителей кроме 5 и 7 в разложении нет.

2) Из (2) следует, что у каждого из чисел в разложении есть 18 пятёрок и 16 семёрок.
Тогда задача равносильна тому, что нужно подсчитать количество троек чисел по степеням так, что среди них есть число 1, число 18 и третье число, находящееся в промежутке от 1 до 18, и количество троек числа, среди которых есть число 1, число 16 и третье число от 1 до 16.
Если 1 две, или 18 встречается 2 раза, то таких вариантов троек 6. Аналогично для 16.

21103143 (U285742 M1295340)

Членовин. 2 часть. Страница 6.

№ 4 (продолжение)

3) Если третье число не совпадает с первыми двумя, то мы выбираем 3 способами позицию для 1, двумя способами позицию для старшей степени и оставшиеся 14 вариантов позиций для третьего числа (в случае со степенями семёрок) и 16 вариантов позиций для степеней пятёрок

В итоге: $(6+6\cdot 14)(6+6\cdot 15\cdot 17) = 6\cdot 6\cdot 15\cdot 17 = 9180$

№ 5

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}(x+1) = 2\log_{2x-3}(x+1)$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$$

Пусть $b=\sqrt{2x-3}$, $a=x+1$, $c=2x^2-3x+5$, тогда:

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{\sqrt{b}} a \quad (1)$$

$$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = \log_c b^2 \quad (2)$$

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+5) = \log_a c \quad (3)$$

(1) $\log_{\sqrt{b}} a = 2\log_b a$

(2) $\log_c b^2 = 2\log_c b$

$$\log_a c = \frac{4}{\log_b a \cdot \log_c b}$$

21103143 (U285742 M1295340)

№5 (продолжение)

Далее: Чисковши. 2 часть. Страница 7

1) $\log_b a = \log_c b = \dfrac{4}{\log_b a \cdot \log_c b + 1}$

2) $\log_b a = \dfrac{4}{\log_b a \cdot \log_c b} = \log_c b + 1$

3) $\log_b a + 1 = \dfrac{4}{\log_b c \cdot \log_c b} = \log_c b$

1) $x = 2$; $y = 2$

2) $x = 2$; $y = 2$

3) $x = 1$, $y = 2$

1) $\log_{2x-3}(x+1) = 2$

$4x^2 - 12x + 9 = x + 1$

$4x^2 - 13x + 8 = 0$

~~$\log_{2x}(x^2$~~ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = 2$

$4x^4 - 13x^3 + 29x^2 - 32x + 28 = 0$

~~$x \in \varnothing$~~ $x \in \varnothing$

2) $4x^2 - 13x + 8 = 0$

$2x^2 - 3x + 5 = 2x - 3$

$2x^2 - 5x + 8 = 0$

$x \in \varnothing$

3) $2x - 3 = x + 1$

$x = 4$

$x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 3x + 5$; $x^2 - 5x + 4 = 0$

$D = 5^2 - 4^2 = 3^2$

$x_1 = \dfrac{5+3}{2} = 4$; $x_2 = \dfrac{5-3}{2} = 1$

Ответ: 4, 1

$$\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 15 \\ \hline 180 \\ 36 \\ \hline 540 \end{array}$$

Черновик

$$\begin{array}{r} \times\ 54 \\ 117 \\ \hline 378 \\ 54 \\ \hline 9180 \end{array} \Big| \, 6$$

$$\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$90 \cdot 6 + 90 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 17$

$\cancel{\frac{20}{34}} = \cancel{\frac{10}{17}} = \frac{5}{8{,}5}$

$2\log_{2x-3}(x+1)$

$2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

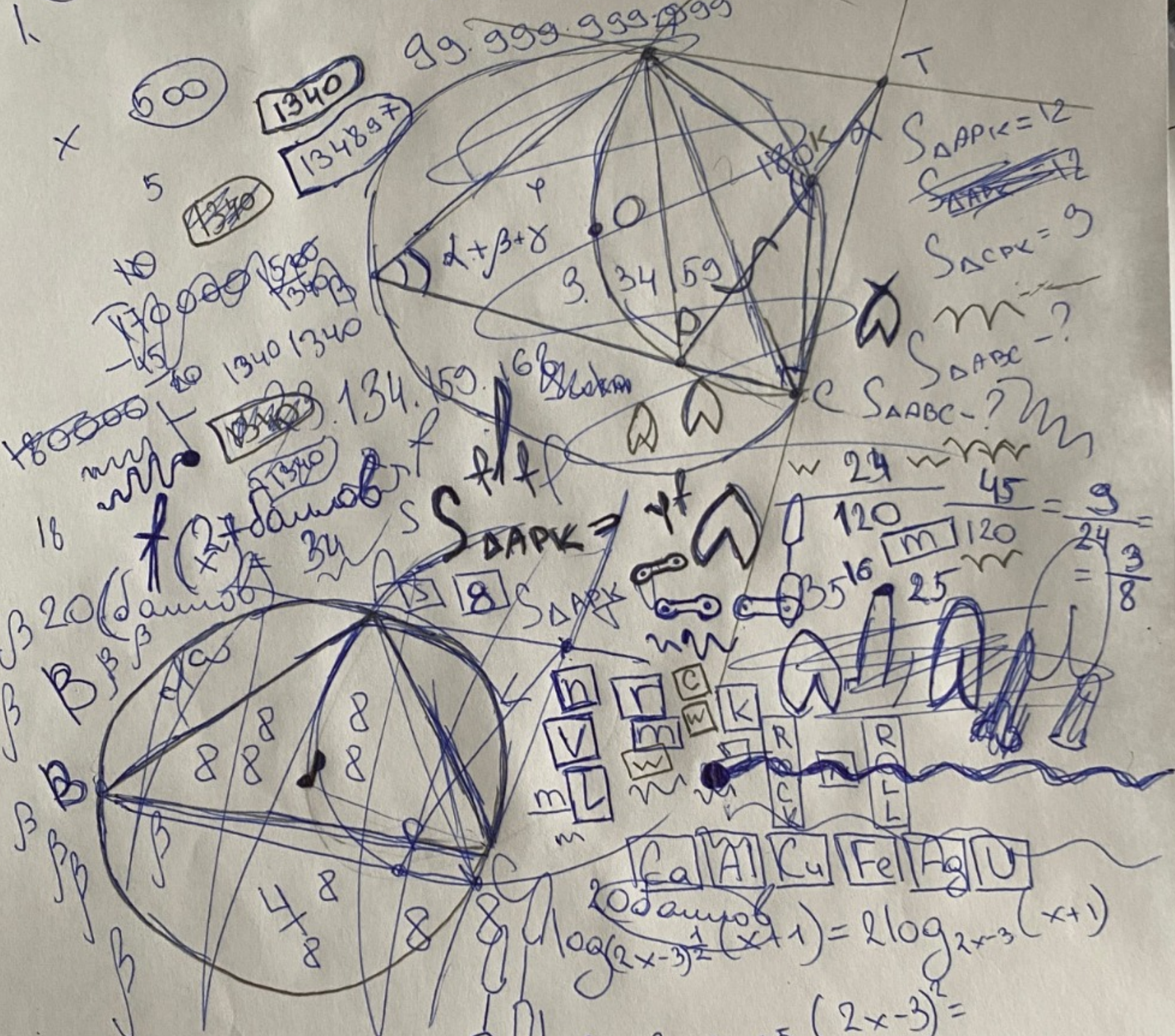
$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$2x^2-3x+5=0;\ D=9-4\cdot 2\cdot 5$

№5

Черновик

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1), \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2, \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$



20 баллов

$\log_{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}(x+1)=2\log_{2x-3}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=$

$=2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)$

$(1000-1)(1000-1)=1000000-2001$

$(1000-1)(1000000-2001)=$

$=1000000000-2001000-1000000+$

$+2001=$

$=9.$

21103143 (U285742 M1295340)