Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103124**

ID профиля: **803749**

Вариант 21

Чистовик

1.

$$S_7 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = (a_1 + 3d)7$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 - 7a_1 - 21d - 27 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 - 7a_1 - 21d - 60 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) = 18d - 33 < 0$$

$$18d < 33$$

$$d < \frac{33}{18} \approx 1, \ldots$$

по условию:

$$\begin{cases} d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d = 1.$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 - 7a_1 - 21 - 27 > 0 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 - 7a_1 - 21 - 60 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Чистовик.

1. (продолжение)

(1) $a^2+16a_1+64>0$

$D=0$ $(256-256)$

$a_1=-8$ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$

$\Rightarrow$ $a_1\neq-8$ (т.к. нер-во >0)

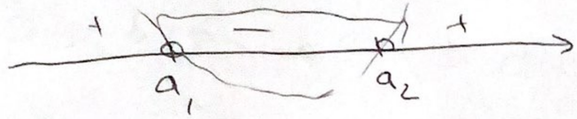
$a_1\in(-\infty;-8)\cup(-8;+\infty)$

(2) $a_1^2+16a_1+49<0$

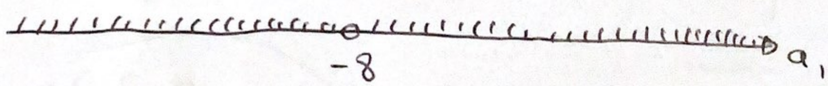
$D=256-196=60=\left(2\sqrt{15}\right)^2$

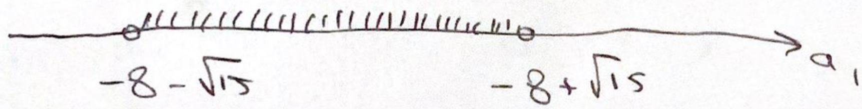
$a_1=\frac{-16+2\sqrt{15}}{2}=-8+\sqrt{15}$

$a_2=\frac{-16-2\sqrt{15}}{2}=-8-\sqrt{15}$



$a_1\in\left(-8-\sqrt{15};-8+\sqrt{15}\right)$

(1) 

(2) 

$\sqrt{15}\approx3,\ldots$

Тогда a_1 может быть равно:

$-11;-10;-9;-7;-6;-5;$

$\boxed{\text{Ответ: } -11;-10;-9;-7;-6;-5;}$

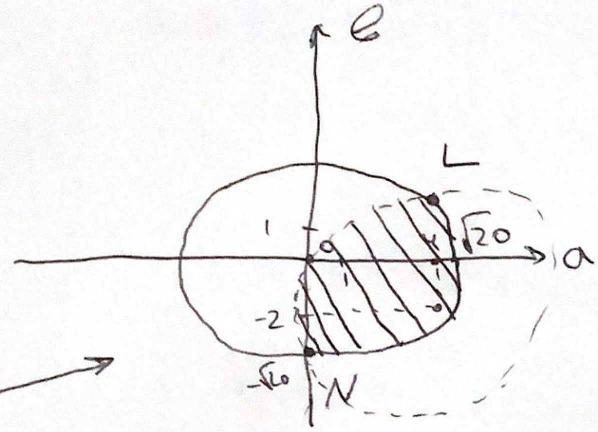
Чистовик.

~~3/4~~ $\boxed{3/4}$

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b,20)\ (1)\end{cases}$$

Рассмотрим вариант $a^2+b^2\le 20$:

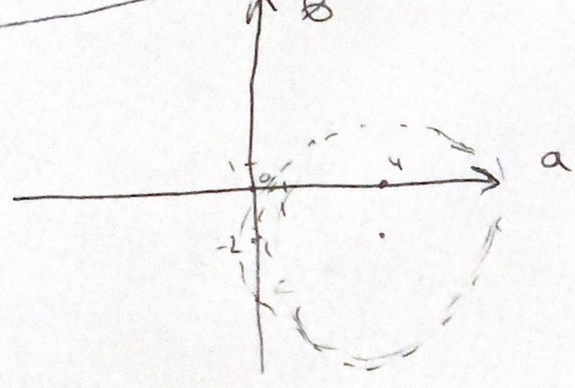


Рассмотрим вариант $a^2+b^2\le 8a-4b$:

$$a^2-8a+b^2+4b\le 0$$

$$(a^2-8a+16)-16+(b^2+4b+4)-4\le 0$$

$$(a-4)^2+(b+2)^2\le 20$$



Чистовик.

~~4~~ 4

$\boxed{4/4}$

№3 продолжение

Пересечением 2 кругов будет решением (1)

Фигура M есть множество кругов с $r=\sqrt{20}$ и центром в (1)

Найдём L и N:

$$\begin{cases} a^2+b^2=20 \\ (a-4)^2+(b+2)^2=20 \end{cases}$$

$-8a+16+4b+4=0$

$4b=8a-20$

$b=2a-5$

$a^2+4a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0$

$D=16-4=12$

$a=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$(2\pm\sqrt{5})^2+b^2=20$

$4\pm4\sqrt{3}+3+b^2=20$

$b^2=13\mp4\sqrt{3}$

$L=(2+\sqrt{3};\sqrt{13-4\sqrt{3}})$

$N=(2-\sqrt{3};\sqrt{13+4\sqrt{3}})$

$S=3\pi\cdot R^2=60\pi$

$\boxed{\text{Ответ: } 60\pi}$

$\boxed{\text{Черновик!}}$

Камера→Формат → ~~нат~~ наиболее совместимый

№1.

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$ $\quad a_8 \cdot a_{17} > S + 27$

~~$a_n = a_{n-1} + d$~~

a

$S = \boxed{\frac{a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n} =$

$=$

$a_8 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 17d$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 17d) > \frac{a_1 + \cancel{a_1 + d}\, a_1 + 7d}{2} \cdot 7$

$$\left[\begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{14} < S + 60 \\ a_8 a_{17} > S + 27 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} (a_1 + 11d)(a_1 + 14d) > \frac{a_1 + a_1 + 7d}{2} \cdot 7 + 27 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 17d) < \frac{a_1 + a_1 + 7d}{2} \cdot 7 + 60 \end{cases}$$

$a_1^2 + 14da_1 + 11da_1 + 11 \cdot 14d^2 \ \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 7$

$a_1^2 + 25da_1 + 11 \cdot 14d^2 < \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 7$

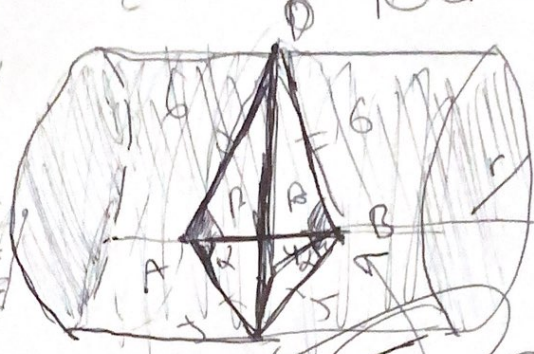
Черновик

1 3 4 5 6 42000 6756

100 ... 7

84

86



70

35

×20

$\frac{2}{3}$

70 − 14

84 84

$S_{осн} = \sqrt{7(2)(2)(3)} = \sqrt{7\cdot 12} = \boxed{\sqrt{84}}$

$\frac{4+5+5}{2} = 7$

8a − 4b

a, b = (0; 0) 0

a, b = (1; 0) 8

a, b (1; 1) 4

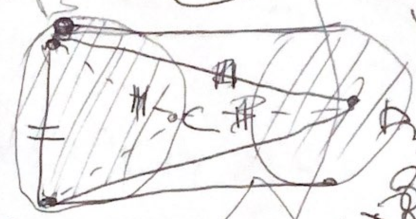
a, b (0; 1) −4

a, b (2; 0)

84
×84
336
+336
3696

4900

80



$\sqrt{84} = \frac{1}{2} h \cdot 5$

84
×84
336
+672
7056

$h = \frac{\sqrt{84}\cdot 2}{5}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 20$

$\frac{\sqrt{84}\cdot 2}{3\ \ 5}$

$a^2 + b^2$

$(a-4)^2$

min(8a − 4b, 20)

86
×86
516
+516

$\frac{6756}{225}$

$\frac{4\sqrt{84}}{15}$

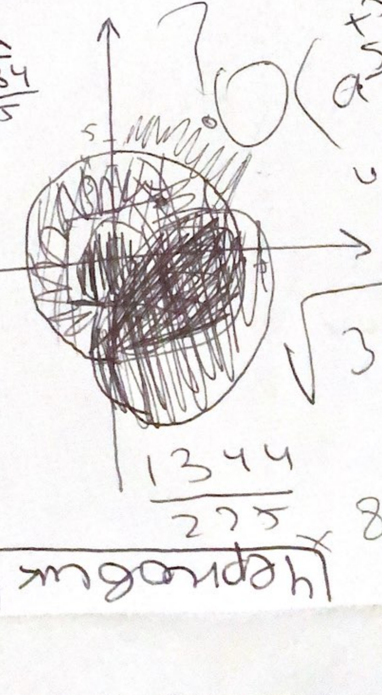
6 → min

$\frac{4\sqrt{84}}{15}$

$\sqrt{20}$

4, 5

84
×16
504
+84
1344



8100
−1344
6756

$\sqrt{36 - \frac{16\cdot 84}{225}}$

225
×36
1350
+675
8100

$\frac{1344}{225}$

8100 − 1344

84

черновик

-> ~~наи~~ наиб...

Черновик!

$2a_1^2 + 50a_1d + 28\cdot 11d^2 < (2a_1 + 7d)\cdot 7$

$2a_1^2 + 50a_1d + 28\cdot 11d^2 < 14a_1 + 49d$

~~$a_1 +$~~

$a_1^2 + 17a_1d + 8a_1d + 8\cdot 17d^2 < \frac{2a_1+7d}{2}\cdot 7$

$25a_1d$

$2a_1^2 + \cancel{34a_1}\, 50a_1d + 16\cdot 17d^2 < (2a_1+7d)7$

$2a_1^2 + 50a_1d + 16\cdot 17d^2 < 14a_1 + 49d$

$$\begin{cases} \overbrace{2a_1^2 + 50a_1}^{x}d + 28\cdot 11d^2 > 14a_1 + 49d \\ \underbrace{2a_1^2 + 50a_1d}_{y} + 16\cdot 17d^2 < 14a_1 + 49d \end{cases}$$

$14a_1 + 49d - 28\cdot 11d^2 < x$

$\underbrace{14a_1 + 49d}_{y} - 16\cdot 17d^2 > x$

$y - 28\cdot 11d^2 < x$

$y - 16\cdot 17d^2 > x$

$y - x < 28\cdot 11d^2$

$y - x > 16\cdot 17d^2$

Черновик.

$$\begin{array}{r} \times 84 \\ 84 \\ \hline 336 \\ +672 \\ \hline 7056 \end{array}$$

N3

80

64

$$\begin{array}{r} 8100 \\ -1344 \\ \hline 6756 \end{array}$$

1822

$$\begin{array}{r} \times 83 \\ 83 \\ \hline 249 \\ 664 \\ \hline 6889 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 84 \\ 16 \\ \hline 504 \\ +84 \\ \hline 1344 \end{array}$$

7089

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 20 \\ a^2+b^2 \leq \min(8a-4b, 20) \end{cases}$$

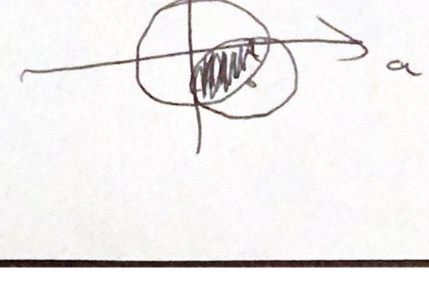
пусть $8a-4b \to \min$

$a^2+b^2 \leq 8a-4b$

$a^2-8a+b^2-4b \leq 0$

$(a^2-8a+16)-16+(b^2-4b+4)-4$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \leq 20$



[черновик] 21

$$S_7 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = (a_1 + 3d)\,7$$

$$\begin{cases} (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) > 7a_1 + 21d + 27 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) < 7a_1 + 21d + 60 \end{cases}$$

$\left\{ \cancel{a_1^2 + 23a_1d + 7 \cdot 16d^2 > 7a_1} \right.$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times\, 16 \\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1d + 112d^2 - 7a_1 - 21d - 27 > 0 \\ a_1^2 + 23a_1d + 130d^2 - 7a_1 - 21d - 60 < 0 \end{cases}$$

$18d - 33 < 0$ $\quad d < \frac{33}{18}$

$d > 0$ $\quad d = 1$ $\quad 64$

$\cancel{d \geq}$

$a^2 + 23a_1 + 112 - 7a_1 - 21 - 27 > 0$

$a_1^2 + 23a_1 + 130 - 7a_1 - 21 - 60 < 0$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \quad a_1 \in R \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \end{cases}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103124**

ID профиля: **803749**

Вариант 21

Чистовик.

$\boxed{1/2}$

№ 4

$НОД(a; b; c) = 35$

$НОК(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$

$$\left.\begin{aligned} a &= 5^{i_1} \cdot 7^{j_1} \\ b &= 5^{i_2} \cdot 7^{j_2} \\ c &= 5^{i_3} \cdot 7^{j_3} \end{aligned}\right) \text{ т.к. НОК состоит из 5 и 7}$$

$i_1 = 1$	$i_2 = 18$	$i_3 = 2 \ldots 17$ (16 вар.)
$i_1 = 2 \ldots 17$	$i_2 = 18$	$i_3 = 1$ (16 вар.)
$i_1 = 1$	$i_2 = 2 \ldots 17$	$i_3 = 18$ (16 вар.)
$i_1 = 18$	$i_2 = 1$	$i_3 = 2 \ldots 17$ (16 вар.)
$i_1 = 18$	$i_2 = 2 \ldots 17$	$i_3 = 1$ (16 вар.)
$i_1 = 2 \ldots 17$	$i_2 = 1$	$i_3 = 18$ (16 вар.)
$i_1 = 1$	$i_2 = 1$	$i_3 = 18$ (1)
$i_1 = 1$	$i_2 = 18$	$i_3 = 1$ (1)
$i_1 = 18$	$i_2 = 1$	$i_3 = 1$ (1)
$i_1 = 1$	$i_2 = 18$	$i_3 = 18$ (1)
$i_1 = 18$	$i_2 = 18$	$i_3 = 1$ (1)
$i_1 = 18$	$i_2 = 1$	$i_3 = 18$ (1)

Чистовик.

2/2

№4 продолжение.

Всего $16 \cdot 6 + 6 = 102$ вариантов систем i

Аналогично для j: $14 \cdot 6 + 6 = 90$

Тогда всего вариантов $a; b; c$: $102 \cdot 90 = 9180$

$\boxed{\text{Ответ: } 9180}$

[redacted] Черновик

НОД$(a; b; c) = \boxed{35}$

НОК$(a; b; c) = \boxed{5^{18}\cdot 7^{16}}$

$\frac{a}{35}$ $\frac{b}{35}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$ $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$\log_{\sqrt{2x-3}}$

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\sqrt{2}$

$5^2\cdot 5^{16}\cdot 7^{16}$

$5^2\cdot 35^{16}$

a $25\cdot 35^{16}$

НОК

$25\cdot 35^{16}$

$\frac{a}{35}$

$a = 35\cdot k$

$b = 35\cdot n$

$c = 35\cdot q$

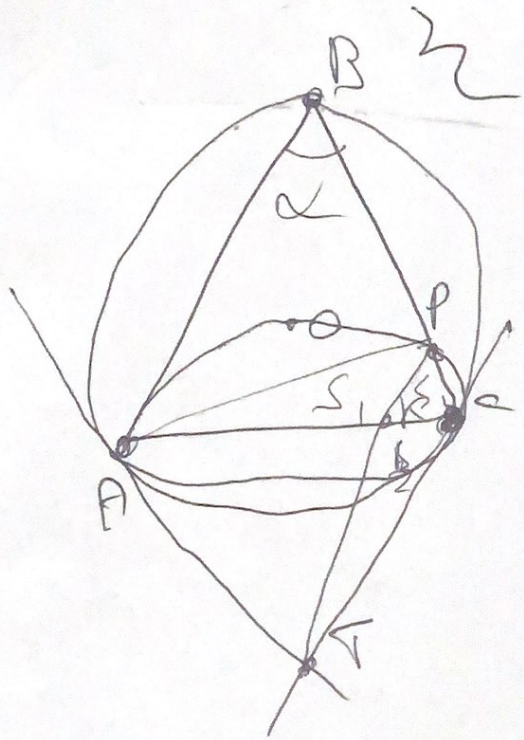
$k, n, q \in \mathbb{Z}$

$a =$

25^3

НОК$(25; 3$

Черновик



$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$

$S_1 = 12$

$S_2 = 9$

log

1. $\log^{x+1}$

$\log_{\sqrt{2x-3}} x+1 = \log_{x+1}{}^2 x^2-3x+5$

$\frac{1}{\boxed{\log_{x+1}} \sqrt{2x-3}} = \log_{x+1} 2x^2-3x+5$

$\frac{1-\log_{x+1}\sqrt{2x-3}\,\log_{x+1} 2x^2-3x+5}{\log_{x+1}\sqrt{2x-3}} = 0$

$\boxed{\text{Черновик}}$

$$1 - \log_{x+1}\sqrt{2x-3} \cdot \frac{1}{\log_{x+1}2x^2-3x+5}$$

$$\frac{\log_{2x^2-3x+5}\sqrt{2x-3}}{\log_{x+1}2x} = 0$$

$$\log_{x+1}\sqrt{2x-3}$$

$$\log_{\boxed{2x^2-3x+5}}\sqrt{2x-3} = 1$$

$$\cancel{(2x^2-3x+4)}(\sqrt{2x-3} - 2x^2-3x+5)$$

$\cancel{2-9}$ — $\sqrt{2x-3} = 2x^2-3x+5$

$$2x-3 = 4x^4+9x^2+25-$$

$$-2\cdot 2x^2\ 3x - 2\ 3x\ 5+$$

$$+2\ 2x^2\ 5$$

arctg $\frac{5}{7}$

Чорновик.

$$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$$

$$(2x-3)^2 = \sqrt{(2x-3)^4}$$

$$\boxed{\sqrt{\sqrt{(2x-3)^2}}}$$

$$\boxed{2x-3>0}$$

$$\sqrt[4]{(2x-3)^2} =$$

$$(2x-3)^2 = t$$

$$\log_{\sqrt[4]{t}}(x+1) = \log_{2x^2-3x+5} t$$

$$\frac{1}{4}$$

$$4\log_t(x+1) = \log_{2x^2-3x+5} t$$

2

$\boxed{\text{Черновик}}$

$i = 2 \ldots 17$ 1 18

$i_1 = 1$

i_2

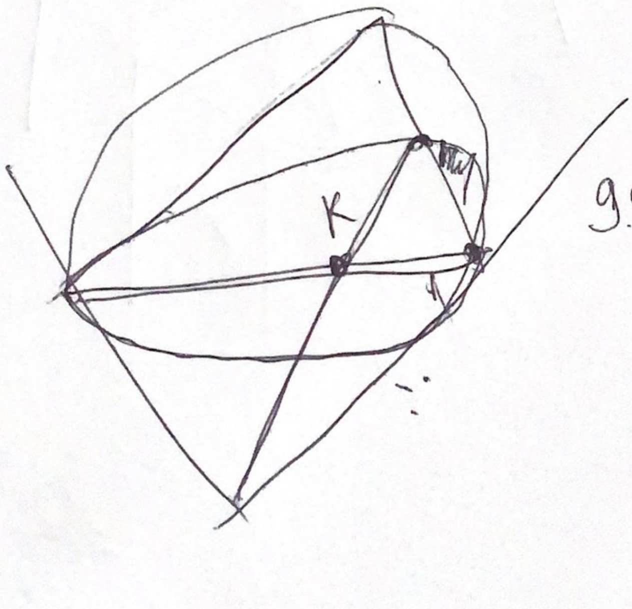
$i_1 = 2 . 17$

$i_1 = 1$ $i_2 = 1$ $i_3 = 12$

$i_2 = 1$ $i_3 = 18$

$\times 102$
90

$\times 102$
90
9180



9.999

Черновик

$a = 5^{i_1} \cdot 7^{j_1}$
$b = 5^{i_2} \cdot 7^{j_2}$
$c = 5^{i_3} \cdot 7^{j_3}$
т.к. НОК состоит из 5 и 7.

(16 вар.)
(16 вар.)
$i_2 = 2\dots17$ $i_3 = 18$ (16 вар.)
$i_1 = 18$ $i_2 = 1$ $i_3 = 2\dots17$ (16 вар)
$i_1 = 18$ $i_2 = 2\dots17$ $i_3 = 1$ (16 вар.)

$i_1 = 2\dots17$	$i_2 = 1$	$i_3 = 18$	(16 вар.)
$i_1 = 1$	$i_2 = 1$	$i_3 = 18$	(1)
$i_1 = 1$	18	1	(1)
18	1	1	(1)
1	18	18	(1)
18	18	1	(1)
18	1	18	(1)

Всего $16 \cdot 6 + 6 = 102$ – вариантов систем i.
Аналогично для j; $14 \cdot 6 + 6 = 90$.
Тогда всего вариантов a, b, c: $102 \cdot 90 = 9180$.