Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103057**

ID профиля: **850572**

Вариант 21

Иимтовик

№1

Пусть d - разность ар. прог.:

По условию имеем:

$\begin{cases} a_8 a_{17} > S+27 \\ a_{11} a_{14} < S+60 \end{cases}$ $\begin{cases} a_8 a_{17} - 27 > S \\ a_{11} a_{14} - 60 < S \end{cases}$ $\Rightarrow a_8 a_{17} - 27 > a_{11} a_{14} - 60$

$(a_1+7d)(a_1+16d) - 27 > (a_1+10d)(a_1+13d) - 60$

$a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 - 27 > a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 - 60$

$$8d^2 < 33$$

Так как $d>0$, $d \in Z$ (так как любой член прогрессии целый $\Rightarrow$ разность целая)

$$d < \sqrt{\frac{33}{8}} < 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=2 \end{array}\right.$$

1) $d=1$ $\quad S = \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 = (a_1+3) \cdot 7 = 7a_1 + 21$

1.1) $a_8 a_{17} > S+27$

$(a_1+7)(a_1+16) > 7a_1+48$

$a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0$

$(a_1+8)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -8$

1.2) $a_{11} a_{14} < S+60$

$(a_1+10)(a_1+13) < 7a_1 + 81$

$a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0$

$D = 16 \cdot 16 - 4 \cdot 49 = 256 - 196 = 60$

$a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{60}}{2} = -8 \pm \sqrt{15}$

$a_1 \in (-8-\sqrt{15}; \sqrt{15}-8)$, но $a_1 \in Z$

$-12 < -8-\sqrt{15} < -11$ $\Rightarrow a = -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5$

$-5 < \sqrt{15} - 8 < -4$ $\quad a \neq -8$ (из 1.1)

Значит $a = -11; -10; -9; -7; -6; -5$

1

2

Чистовик

№1

2) $d=2$ $\quad S=\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+6)\cdot 7=7a_1+42$

$\cancel{2.1)\ a_8 a_{17} > S+27}$

$\cancel{(a_1+14)(a_1+32) > 7a_1+69}$

$\cancel{a_1^2+39a_1+379>0}$

$\cancel{D=39^2-4\cdot 379=1521-1516=5}$

$\cancel{a_{1,2}=\frac{-39\pm\sqrt{5}}{2} \quad a\in\left(-\infty;-\frac{39+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-39}{2};+\infty\right)}$

$\cancel{-21<-\frac{39+\sqrt{5}}{2}<-20 \qquad -19<\frac{\sqrt{5}-39}{2}<-18}$

~~Итого~~ $\cancel{a\in[-22;-21]\cup[-18;+\infty),\ a\in\mathbb{Z}}$

$$\begin{array}{r} 32\\ \times\ 14\\ \hline 128\\ 32\ \\ \hline 448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 448\\ -\ 69\\ \hline 379 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 39\\ \times\ 39\\ \hline 351\\ 117\ \\ \hline 1521 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 379\\ \times\ 4\\ \hline 1516 \end{array}$$

2.2) $a_{11}a_{14} < S+60$

$(a_1+20)(a_1+26) < 7a_1+102$

$a_1^2+39a_1+418<0$

$D=1521-4\cdot 418<0$ $\Rightarrow$ нет корней $(a_1^2+39a_1+418>0)$ $\Rightarrow$ случай $d=2$ не подходит

Ответ: $a_1=-11;-10;-9;-7;-6;-5$

2

Чистовик

№3

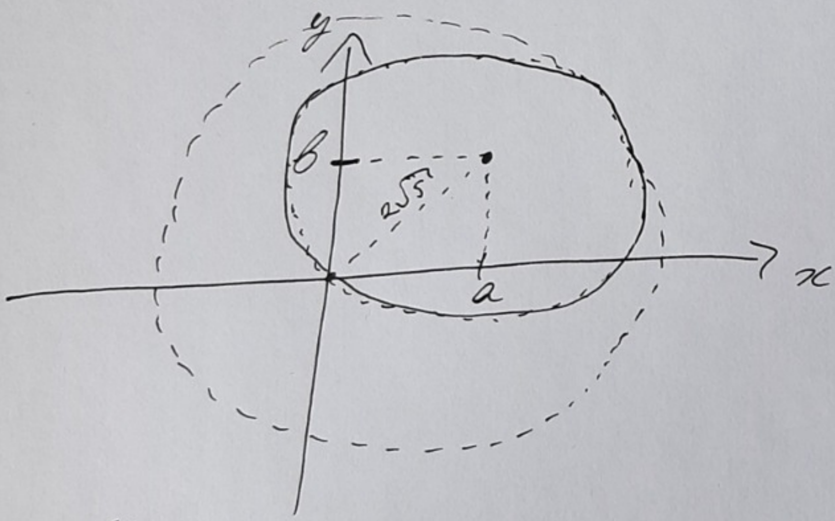
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(6a-4b; 20) \end{cases}$$

Первое неравенство задает круг с центром $(a;b)$ и радиуса $2\sqrt{5}$

1) Пусть $20 \le 8a-4b$ $b \le 2a-5$

Второе нер-во имеет вид: $a^2+b^2 \le 20$.

Это значит, что при данном условии нам подходят всевозможные круги радиуса $2\sqrt{5}$, ~~часть~~ центры которых расположены на расстоянии меньше либо рав-ны $2\sqrt{5}$ от точки $(0;0)$.



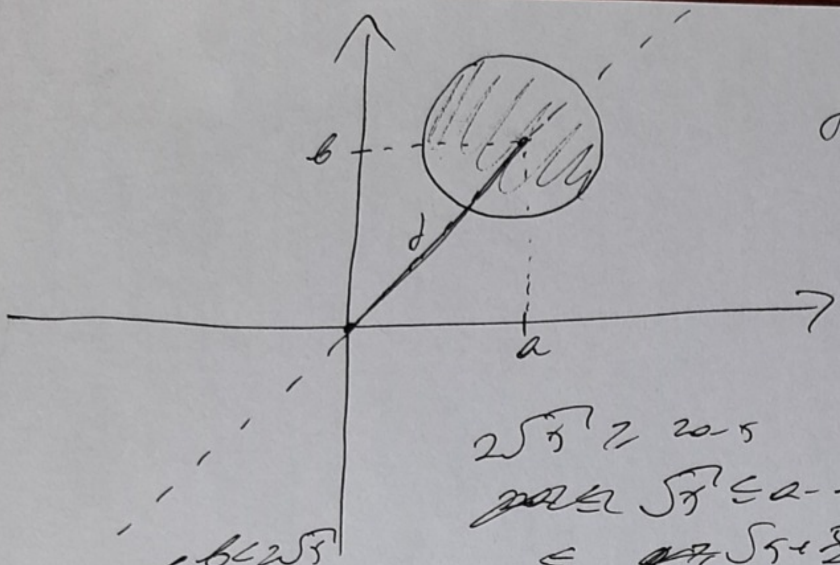
Условие, что $b \le 2a-5$ ~~выполнено~~ выполнено, ~~так как по нер-ву треугольника $b \le 2\sqrt{5}+a$ $a \le 2\sqrt{5}$~~

~~В [illegible]~~ По нер-ву треуг $a \ge 2\sqrt{5}+b \Rightarrow b \le -2\sqrt{5}+a < 2a-5$ ~~всегда~~

Площадь ~~такой~~ такой фигуры равна площади круга с ~~радиусом~~ радиусом $2\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$S = \pi R^2 = \pi \cdot (4\sqrt{5})^2 = 80\pi$

3



$d = a^2 + b^2$

$d \le \min(|8a - 4b|; 20)$

$8a - 4b < 20$
$2a - b < 5$

$2\sqrt{5} \geq 2a - 5$
$\sqrt{5} \le a - \frac{5}{2}$
$\sqrt{5} + \frac{5}{2} \le a$

$b < 2\sqrt{5}$

$b \geq 2a - 5$

$\cancel{b \le 2\sqrt{5} + a}$

$\sqrt{5} \vee 2 - \frac{5}{2}$

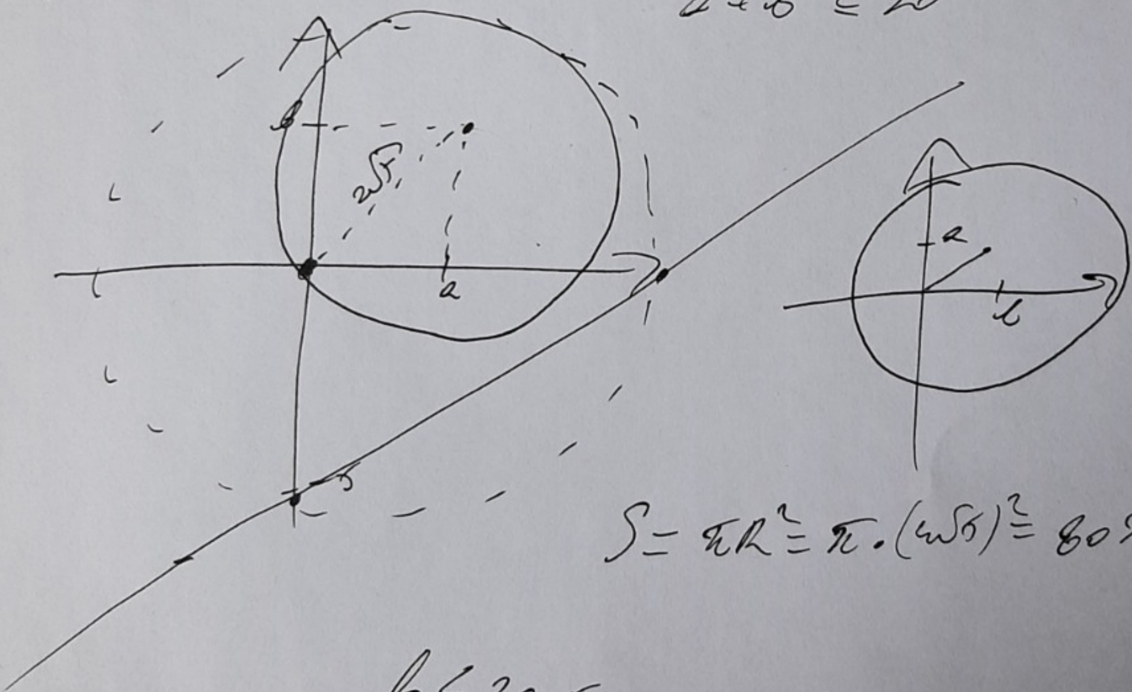
$8a - 4b > 20$
$2a - b > 5$

$b < 2a - 5$

$a \geq \sqrt{5} + \frac{5}{2}$

1) $20 \le 8a - 4b$ $\quad$ $b \le 2a - 5$

$a^2 + b^2 \le 20$



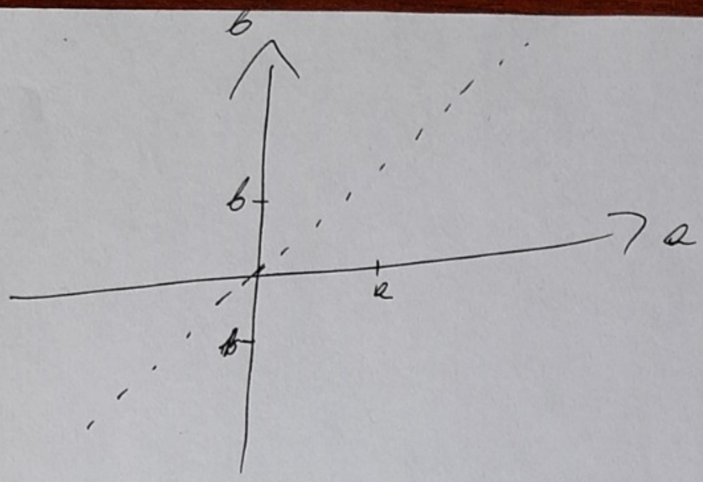
$S = \pi R^2 = \pi \cdot (4\sqrt{5})^2 = 80\pi$

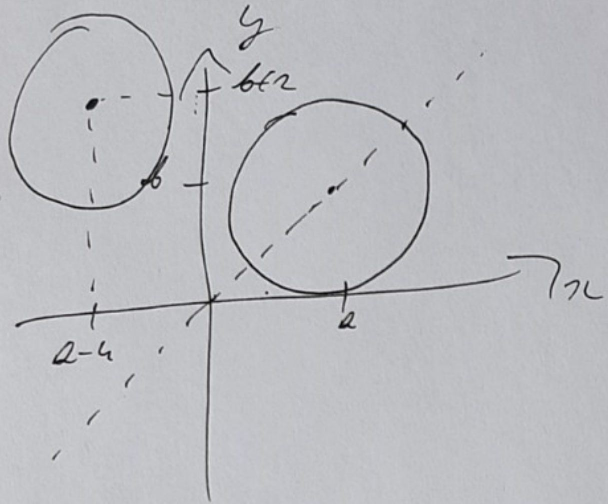
$b \le 2a - 5$

$a^2 + b^2 \le 8a - 4b$
$(a-4)^2 + (b+2)^2 \le 20$

$\cancel{2\sqrt{5} + b}$
$a - 2\sqrt{5} < 2a - 5$
$5 - 2\sqrt{5} < a$

21103057 (U850572 M1296835)





$(a-x)^2+(b-y)^2\le 20$

$\cancel{a=b}$

$b=a$

$2a-b\le 5$

$8a-4b\le 20$

$a^2+b^2\le 8a-4b$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le 16+4=20$

$$\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=S$$

$$\begin{cases} \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7+27< a_8 a_{17}=(a_1+7d)(a_1+16d) \\ \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7+60 > (a_1+10d)(a_1+13d) \end{cases}$$

$$14a_1+42d+54<2a_1^2+\cancel{32da_1+14da_1}^{46da_1}+112d^2$$

$$a_1^2+23da_1-7a_1+\overset{56}{}d^2-\overset{21}{}d-27>0$$

$$56d^2+(23a_1-21)d+a_1^2-7a_1-27>0$$

$$D=(23a_1-21)^2-4(a_1^2-7a_1-27)$$

$$7a_1+\overset{21}{}d+60>a_1^2+\cancel{13a_1d+10a_1d}^{23a_1d}+130d^2$$

$$130d^2+(23a_1-21)d-7a_1+a_1^2-60<0$$

$$D\geq 0 \quad D=(23a_1-21)^2-4\cdot\overset{520}{130}(-7a_1+a_1^2-60)>0$$

$$529a_1^2-966a_1+441+3640a_1-520a_1^2+31200>0$$

$$9a_1^2+2654a_1+31641>0$$

$$a_1^2+(23d-7)a_1+56d^2-21d-27>0$$

$$D=(23d-7)^2-4(56d^2-21d-27)=$$

$$=529d^2-322d+49-224d^2+84d+108=$$

$$=305d^2-238d+157=$$

$$D=238^2-4\cdot 305\cdot 157$$

$$\begin{array}{r} 23\\ \times 23\\ \hline 69\\ 46\\ \hline 529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46\\ \times 21\\ \hline 46\\ 92\\ \hline 966 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21\\ \times 21\\ \hline 21\\ 42\\ \hline 441 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3640\\ -966\\ \hline 2654 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23\\ \times 14\\ \hline 92\\ 23\\ \hline 322 \end{array}$$

$7a_1+21d+60>a_1^2+27a_1d+130d^2$

$a_1^2+(27d-7)a_1+130d^2-21d-60<0$

$D=(27d-7)^2-4(130d^2-21d-60)>0$

$525d^2-322d+49-520d^2+84d+240>0$

$9d^2-238d+289>0$

$D=238^2-36\cdot 289$

$40<39+\sqrt{5}<42$

$\frac{39+\sqrt{5}}{2}<21$

$7(a_1+3d)<(a_1+7d)(a_1+16d)$

$7a_1+21d-a_1^2-23a_1d-112d^2<0$

$-38<\sqrt{5}-39<-36$

$a_1^2+23a_1d-7a-21d+112d^2>0$

$a_1^2+(23d-7)a_1+112d^2-21d+27$

$D=(23d-7)^2$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$\begin{cases} a_8a_{17}-27>5 \\ a_{11}a_{14}-60<5 \end{cases}$

$a_8a_{17}-27>a_{11}a_{14}-60$

$\cancel{(a_8a_{17})}$

$a_1^2+23a_1d+112d^2-27>a_1^2+23a_1d+130d^2-60$

$33>8d^2$

$8d^2<33$

$d^2<\frac{33}{8}$ $\quad d>0$

$d<\sqrt{\frac{33}{8}}\approx 2$ $\quad d\in Z$

$d=1,2$

$-4<-\sqrt{15}<-3$

$3<\sqrt{15}<4$

$2A<\sqrt{5}-75<2B$

$2A+75<\sqrt{5}<2B+75$

$\frac{-77}{2}=$

$=-16.5$

21103057 (U850572 M1296835)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103057**

ID профиля: **850572**

Вариант 21

Чистовик

№4

Если НОД$(a,b,c)=35$, то степень вхождения простых 5 и 7 в числа $a, b, c \geq 1$, но хотя бы 1 из чисел должно иметь простое 5 или 7 в первой степени. То есть, если $a=5^k \cdot 7^m \ldots$ $b=5^l \cdot 7^t \ldots$ $c=5^f \cdot 7^d \ldots$, то хотя бы 1 из чисел k, l, f равно 1 и хотя бы 1 из чисел m, t, d равно 1.

Если НОК$(a,b,c)=5^{18} \cdot 7^{16}$, то a, b, c в разложении на простые имеют только числа 5 и 7. $\Rightarrow a=5^k \cdot 7^m$ $b=5^l \cdot 7^t$ $c=5^f \cdot 7^d$ и каждое из чисел $k, l, f \leq 18$, а каждое из чисел $m, t, d \leq 16$, но хотя бы одно из чисел k, l, f равно 18, а из чисел m, t, d равно 16.

Рассмотрим сначала степени 5, а именно числа k, l, f. Одно или два из них равно 1 и одно или два из них равно 18. Есть 3 случая на числа k, l, f:

1) 2 числа равны 1, третье равно 18. — 3 способа выбрать число равное 18, остальные однозначно 1. Всего: 3

2) 2 числа равны 18, третье равно 1 — 3 способа. Всего: 3

3) 1 число равно 18, 1 число равно 1, третье число выбираем из чисел от $[2; 17]$ (16 чисел). Тремя способами выберем число равное 18, двумя равное 1, на ост-ся 16 вар-ов. Всего: $3 \cdot 2 \cdot 16 = 96$

Теперь рассмотрим степени 7, числа m, t, d. Снова 3 случая на числа m, t, d:

1) 2 из чисел равны 16, одно число 1. Всего: 3 вар-та.

2) 2 из чисел равны 1, одно число 16. Всего: 3 вар-та

Чистовик

№4

3) 1 число равно 16, 1 число равно 1, последнее число берём из промежутка [2; 15] (14 чисел). 3 способами выберем число равное 1, 2 сп-ми равное 16, на ост-ся 14 вар-ов. Всего: $3 \cdot 2 \cdot 14 = 84$

Простые 5 и 7 независимы в числах a, b, c. Вариантов выбрать степени пятки для числа a, b, c равно $96 + 3 + 3 = 102$; для семи $3 + 3 + 84 = 90$. Всего троек чисел (a, b, c) $102 \cdot 90 = 9180$

Ответ: 9180.

2

21103057 (U850572 M1296836)

Черновик

№5

Заметим, что произведение чисел равно 4.

~~Но~~ Пусть $2x-3=a$ $x+1=b$ $2x^2-3x+5=c$

ОДЗ:

$a,c,b>0$, $a,b,c\neq 1$

~~$a\neq 1$~~ ~~$c\neq 1$~~ $\log_{\sqrt{a}} b = 2\log_a b$ $\log_c a^2 = 2\log_c a$

Имеем: $2\log_a b \cdot 2\cdot \log_c a \cdot \log_b c = 4$

Если 1 из ~~а~~ логарифмов равен другому, а оставшийся на 1 меньше любого из них, то пусть равные логарифмы равны a. Имеем: $a\cdot a(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)(a^2+a+2)=0$ $\quad |:(a^2+a+2)>0$ $(D<0)$

$a=2$

~~Чтобы условие выполнялось какой-то из логарифмов должен~~

Значит: $\left[\begin{array}{l} 2\log_a b = 2 \ (1) \\ 2\log_c a = 2 \ (2) \\ \log_b c = 2 \ (3) \end{array}\right.$

(1): $\log_a b = 1$, на ОДЗ:

$a=b$

$2x-3=x+1$

$x=4$

Проверим: ~~ОДЗ:~~ ~~$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$~~

$a=5$ $b=5$ $c=25$ (ОДЗ удов-ет)

~~$2\log$~~ $\log_{\sqrt{a}} b = 2$ $\log_c a^2 = 1$ $\log_b c = 2$

Условие выполнено.

3

21103057 (U850572 M1296836)

(

Чистовик

№5

(2): $\log_c a = 1$ на ОДЗ:

$c = a$

$2x^2 - 3x + 5 = 2x - 3$

$2x^2 - 5x + 8 = 0$

$D = 25 - 64 < 0$ — нет решений

(3) $\log_b c = 2$, на ОДЗ:

$c = b^2$

$2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 1 + 2x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 4 \quad x = 1$

$x = 1$ не удов. ОДЗ: $(2x - 3 < 0)$

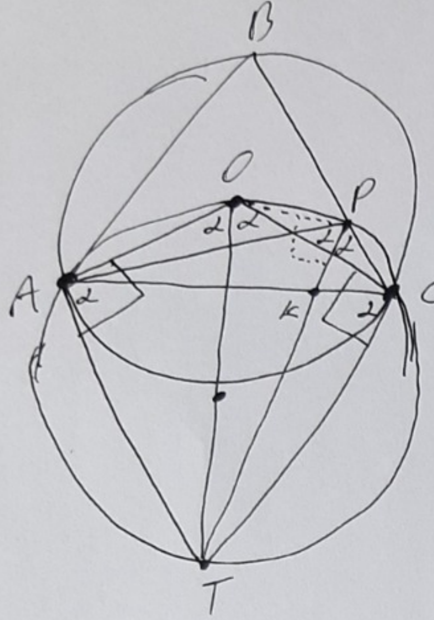
$x = 4$ — подходит (из (1))

Ответ: $x = 4$.

4

Чистовик

№6



Дано:

$S_{APK}=12$

$S_{CPK}=9$

Найти

а) S_{ABC}

б) AC

Решение:

Проведём окр-ти, как на рисунке. OA и OC – радиусы ~~[illegible]~~ в касательные в точки касания $\Rightarrow OA \perp AT$, $OC \perp CT$. $OATC$ – вписанный ($\angle OAT+\angle OCT=180°$), но через точки O, A, C окр-сть уже проведена $\Rightarrow$ т. T лежит на окр-сти. $AT=TC$ (отр-ки кас-ых) $\Rightarrow \angle AOT=\angle OCT$

Пусть $\angle AOT=\angle OCT=\alpha \Rightarrow \angle CAT=\angle ACT=\alpha$ (~~[illegible]~~ опир-ся на равные дуги) $\angle ACT=\alpha=\angle APT$ (опир-ся на равные дуги)

$\angle TPC=\angle TOC=\alpha$ (аналог-но)

~~[illegible]~~ т.к $\angle OCT=90°$, то OT – диаметр $\Rightarrow \angle OPT=90°$

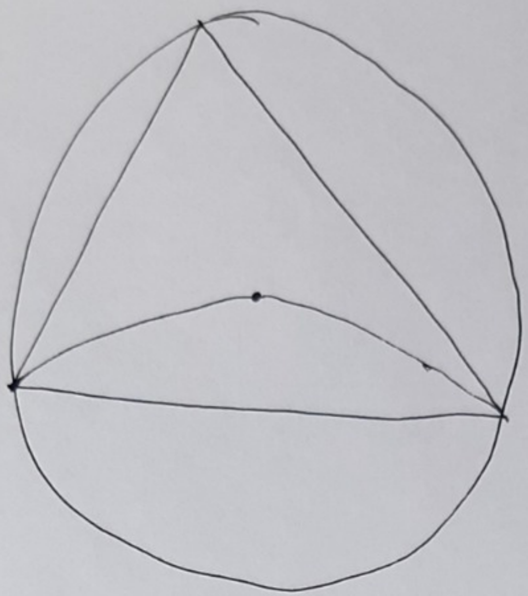
$\Rightarrow OP$ – бис-са $\angle APB$ (угол между бис. смеж. углов равен $90°$)

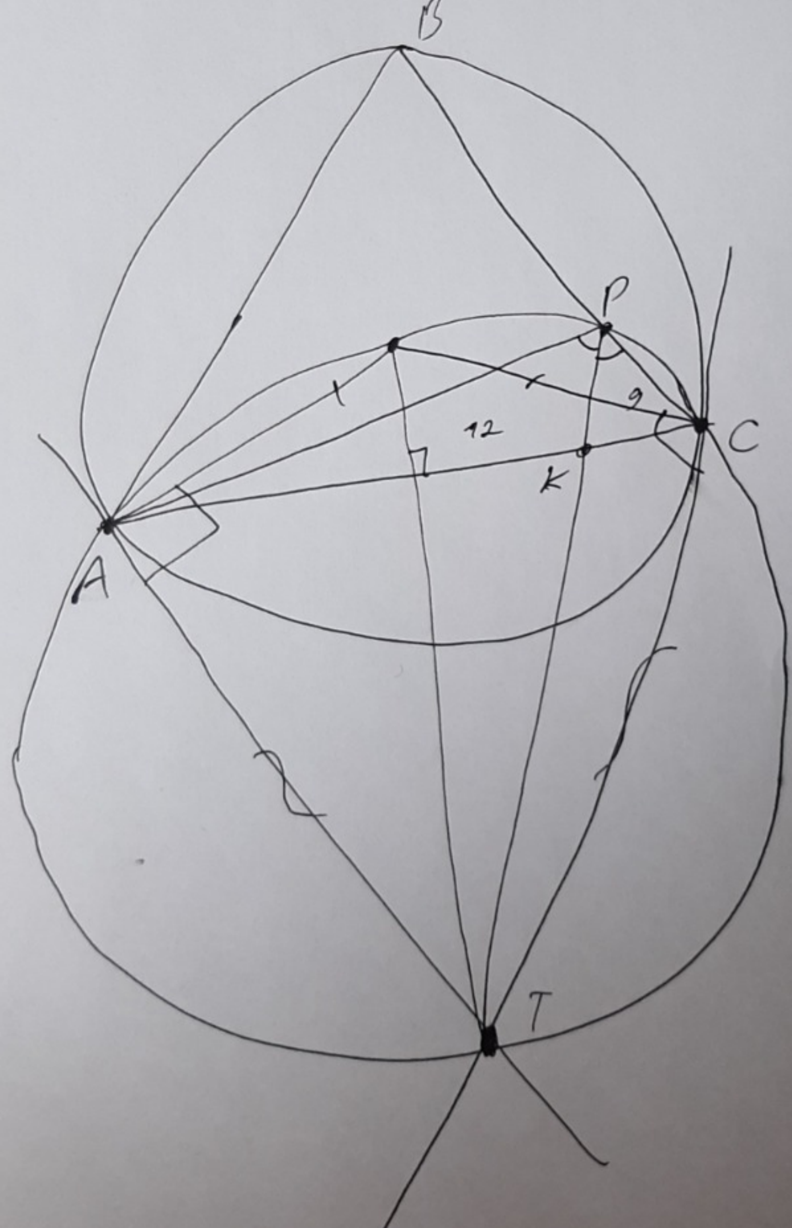
5

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot AK}{\frac{1}{2}h\cdot KC}=\frac{AK}{KC}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

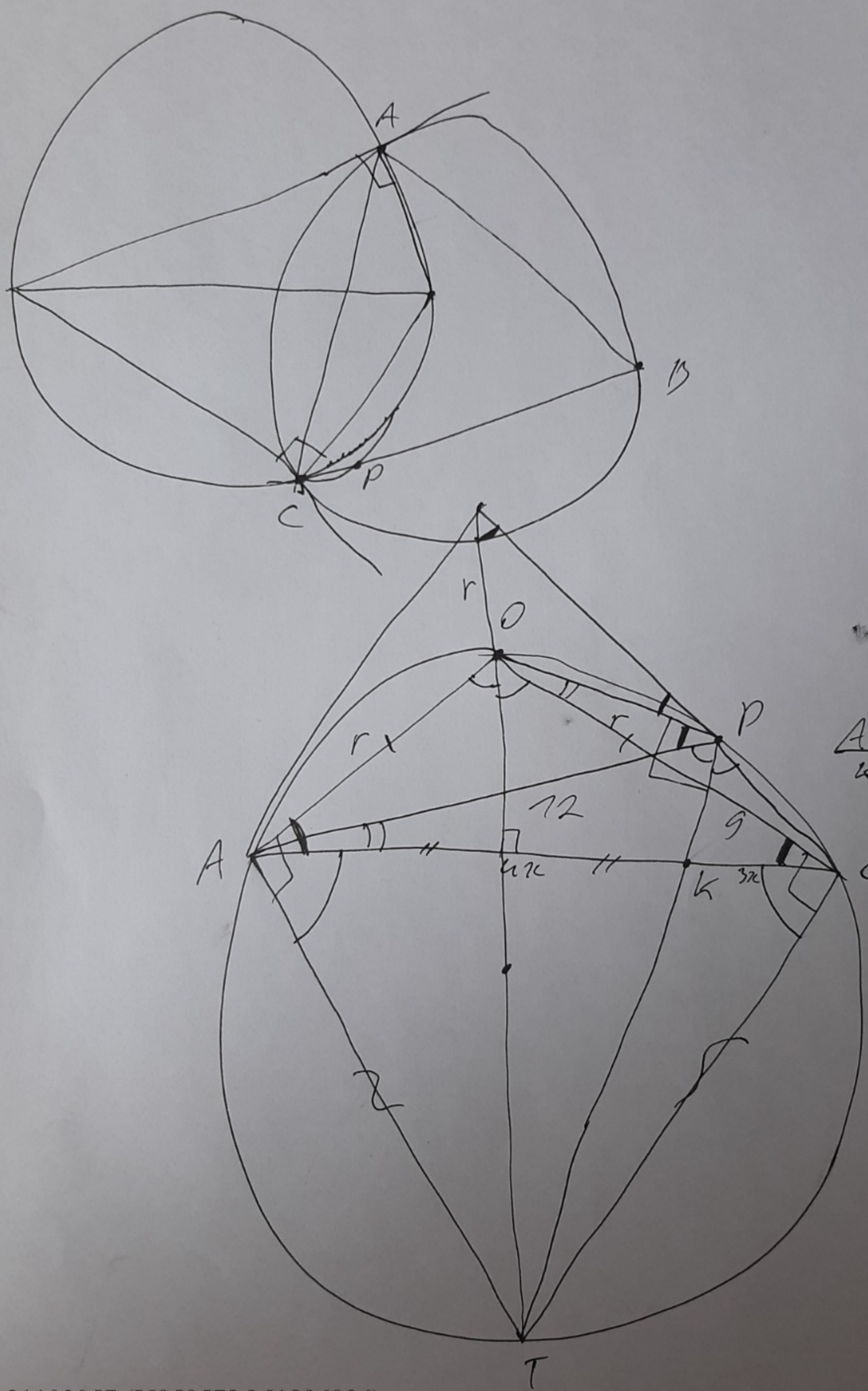
т.к PK – бис-са $\angle APC$, то по св-ву бис-сы $\frac{AK}{KC}=\frac{4}{3}=\frac{AP}{PC}$

$\angle ABC=\alpha$ (угол между хордой и кас-ой)



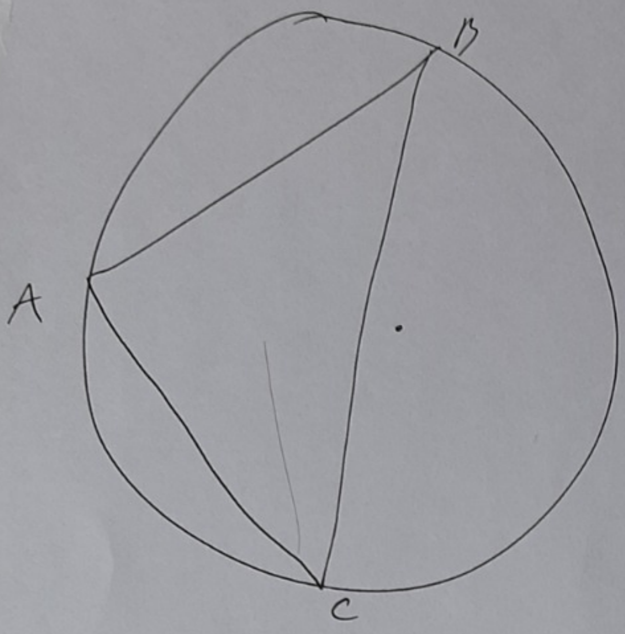


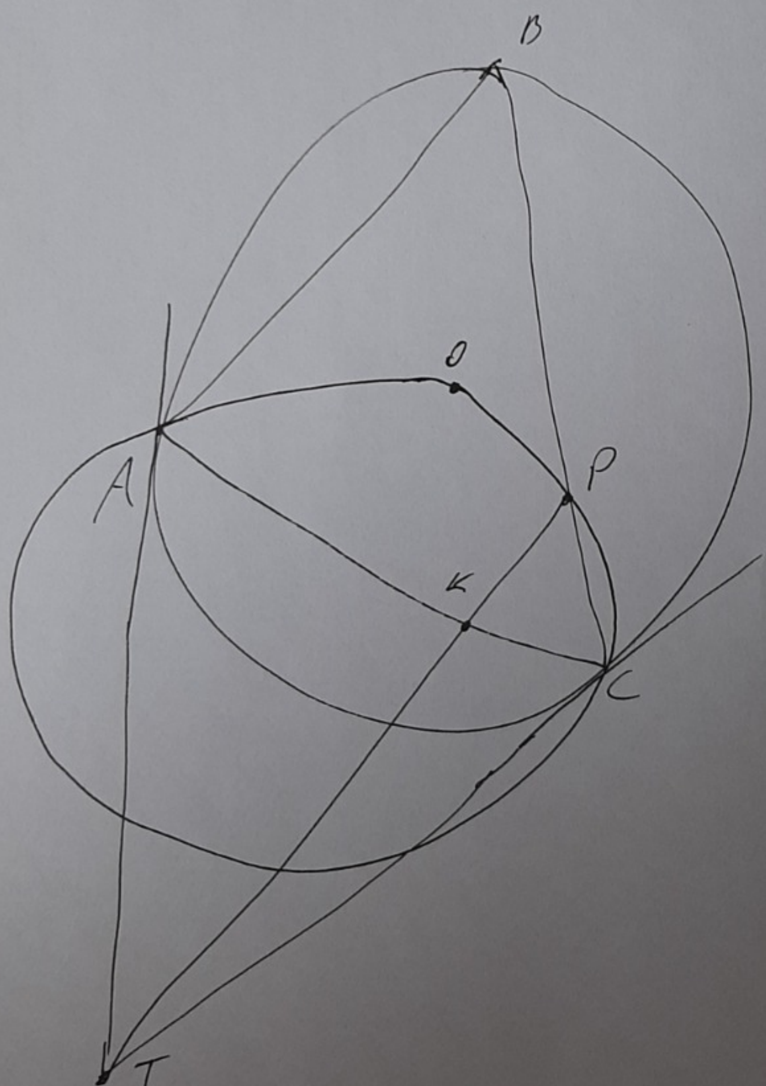
$\frac{BC}{PC}$



$\frac{AK}{KC} = \frac{4}{3}$

21103057 (U850572 M1296836)





$S_{APK} = 72$
$S_{CPK} = 9$

21103057 (U850572 M1296836)

7.5

$a = 7 \cdot 5$

$b = 7 \cdot 5$

$c = 7 \cdot 5$

$a = 7^{k} \cdot 5^{m}$

$b = 7^{p} \cdot 5^{d}$, $k, m, p, d, t, s \in N$

$c = 7^{t} \cdot 5^{s}$

$MAX(k; p; t) = 16$ есть ст. 1

$MAX(m; d; s) = 16$ и есть ст. 16.

Ответ.

$\left[\begin{array}{l} k, p, t \text{ сод } 16 \text{ и } 1 \\ 1^{16} \end{array} \right.$

$[1; 16]$

$3 \cdot 2 \cdot 14$ $(1; 16)$

$\overline{k}$ $\overline{p}$ $\overline{t}$

1)

21103057 (U850572 M1296836)

~~log~~ $\cancel{\log_{2x-3}(x+1)^2}$

$\log_{2x-3}(x+1)^2 \cdot 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \cdot \log_{x+1}(2x^2-3x+5)=4$

a

$a \cdot b \cdot c = 4$

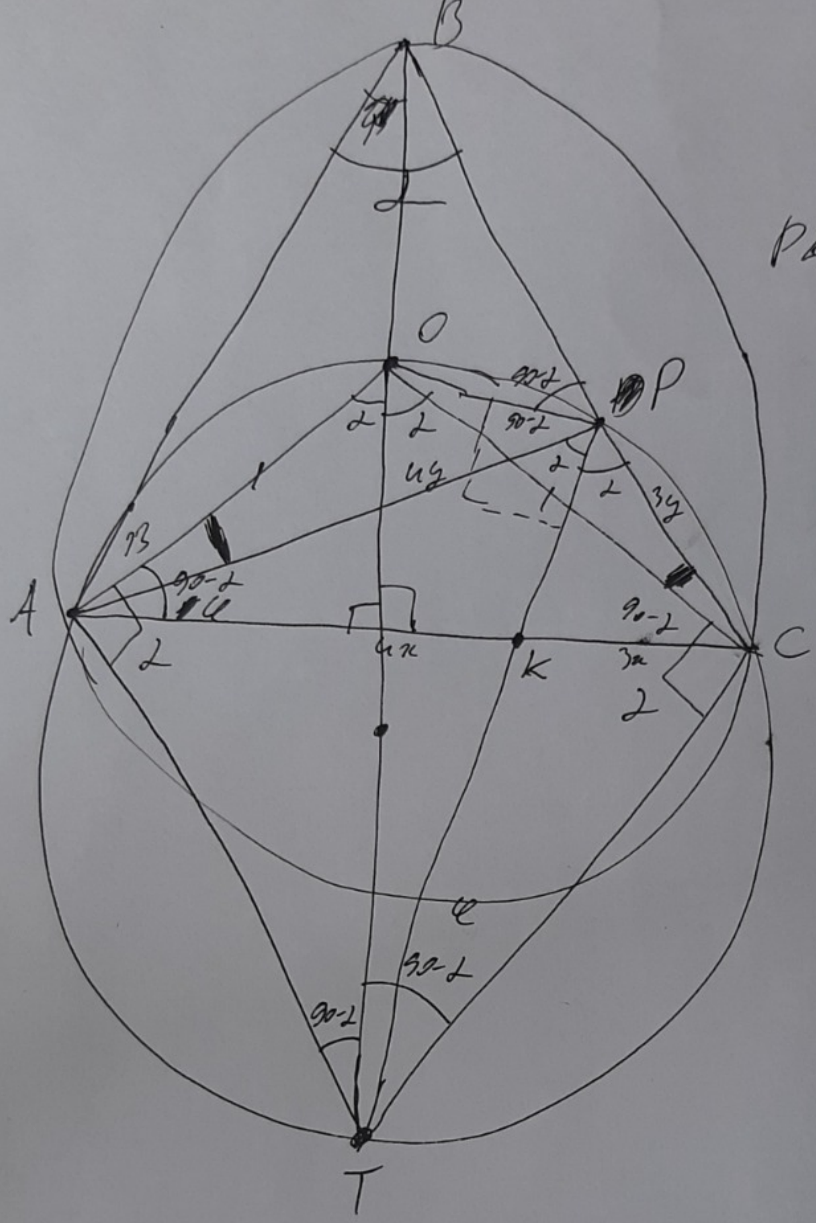
$a \cdot a \cdot (a-1) = 4$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$a = 2$

$$\begin{array}{l|l} a^3 - a^2 - 4 & a-2 \\ \hline -(a^3 - 2a^2) & a^2 + a + 2 \\ \quad a^2 & \\ -(a^2 - 2a) & \\ \quad 2a - 4 & \end{array}$$

$D = 1 - 8 =$



$PK \parallel AB$?

$S_{APK} = 12$

$S_{CPK} = 9$

$4y \cdot \sin\alpha \cdot PK = 12$

$3y \cdot \sin\alpha \cdot PK = 9$