Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103017**

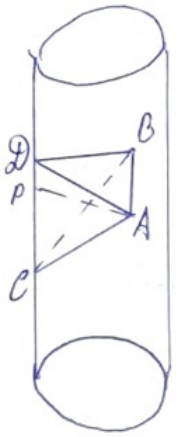
ID профиля: **863618**

Вариант 21

Чистовик.

Вариант 21

№2



$AB=4$

$AC=CB=5$

$AD=DB=6$

$CD \parallel$ оси цилиндра

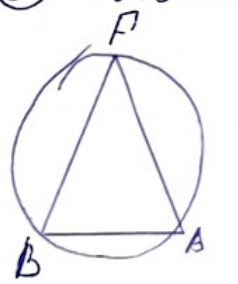
$CD-?$

① Раз $CD \parallel$ оси цилиндра то $BA \parallel$ основанию цилиндра в противном случае не было бы двух равнобедренных треугольников

② ~~Рассмотрим~~ (Высоты Δ CBD и CAD) $=F$

т.к $CBD=CAD$, $BF=FA$

③ Рассмотрим ΔBFA

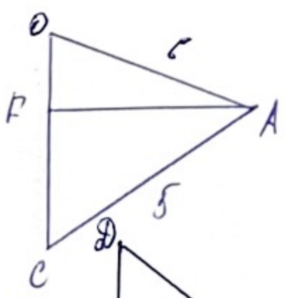


BA - хорда

Значит $\min R \geq 2$

④ Рассмотрим $R=2$

BA - диаметр $\Rightarrow$ $FA=BF=2\sqrt{2}$

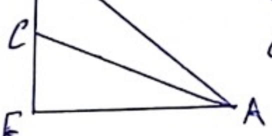


$DF=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}$

$CF=\sqrt{25-8}=\sqrt{17}$

$CD=\sqrt{17}+\sqrt{28}$

⑤



$DP=\sqrt{28}$

$CF=\sqrt{17}$

$CD=\sqrt{28}-\sqrt{17}$

⑥ Проверяем, что треугольники из ④, ⑤ - возможные

Ответ: $CD=\sqrt{28}\pm\sqrt{17}$

1

чистовик

Вариант 21

№1

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1-7(a_1+3)>27-7\cdot16 \\ a_1^2+23a_1-7(a_1+3)<60-10\cdot13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1+64>0 \\ a_1^2+16a_1+49<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8)^2>0 \\ (a_1+8)^2<15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\neq 8 \\ a_1+8\in(-\sqrt{15}, +\sqrt{15}) \end{cases}$$

Тогда так как все элементы последовательности положительные и целые, то $a_1+8\in[-3;3]$

Ответ: a_1 может принимать все целые значения от -3 до 3 (включая сами числа).

№3

21103017 (U863618 M1304268)

Чистовик.

Вариант 21

№1

Пусть $\{a_n\}$ - возрастающая последовательность с шагом d (так как она возрастающая, то $d>0$), посчитаем её сумму

$$a_1+\ldots+a_7 = 7\frac{a_1+a_7}{2} = 7(a_1+3d)$$

Запишем данные нам условия в виде системы уравнений

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > 7(a_1+3d)+27 \\ a_{11}a_{14} < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+7d)(a_1+16d) > 7(a_1+3d)+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1+7\cdot16d > 7(a_1 3d)+27 \\ a_1^2+23da_1+10\cdot13d < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1-7(a_1+3d) > 27-7\cdot16d \\ a_1^2+23da_1-7(a_1+3d) < 60-10\cdot13d \end{cases}$$

Левая часть неравенств совпадает, а так как их знак отличается, то сложим их

$$60-10\cdot13d > 27-7\cdot16d$$

$$33 > 18d$$

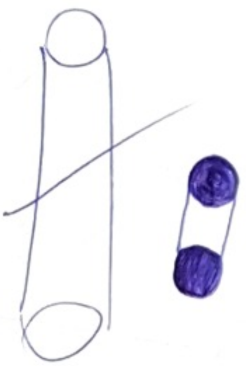
Получаем, что максимальное $d=1$, тогда подставим его в систему неравенств, чтобы найти a_1

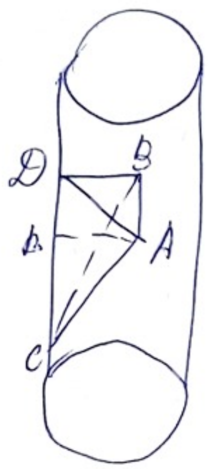
21103017 (U863618 M1304268)

Черновик

$$\begin{cases} a_8 a_{17} > 7(a+3d)+27 \\ a_{11} a_{14} < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+7a)(a_1+16a) > 7(a_1+3d)+27 \\ (a_1+10d)(a_1+13d) < 7(a_1+3d)+60 \end{cases}$$





21103017 (U863618 M1304268)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103017**

ID профиля: **863618**

Вариант 21

Чистовик

21 вариант

№4

$$НОД\ (a, b, c) = 35$$

$$НОК\ (a, b, c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$$

$a = 5^{a_1} \cdot 7^{a_2}$

$b = 5^{b_1} \cdot 7^{b_2}$

$c = 5^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

Тогда

$$\begin{cases} \max(a_1, b_1, c_1) = 18 \\ \max(a_2, b_2, c_2) = 16 \\ \min(a_1, b_1, c_1) = 1 \\ \min(a_2, b_2, c_2) = 1 \end{cases}$$

1. Рассмотрим варианты
a_1, b_1, c_1

1.1 a_1, b_1, c_1 – различны, тогда посчитаем кол-во вариантов.

- одно число равно 1
- одно число равно 18
- третье число равно от 2 до 17

$2 \cdot 3 \cdot 16$ вар

1.2

Если среди a_1, b_1, c_1 есть повторы, то:

- два числа равны 1, другое 18
- или наоборот

$2 \cdot 3$ вар

Итого комбинаций a_1, b_1, c_1:

$(2 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 3)$

Чистовик
вариант 21

Аналогично $a_2\ b_2\ c_2$

$(2\cdot 3\cdot 14+2\cdot 3)$

2 перемножаем

$(6\cdot 17)\cdot(6\cdot 15)=9180$

Ответ: 9180.

№6

а) $\angle ABC=\alpha \Rightarrow$

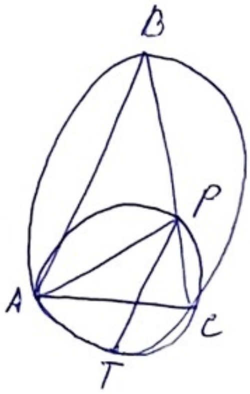
$\angle AOC=2\alpha \Rightarrow \angle CAT=\angle ACT=\alpha \Rightarrow \angle AOC+\angle ATC=\pi \Rightarrow$

T лежит на окружности описанной около $APC \Rightarrow$

$\angle APC=\angle AOC=2\alpha$, и $\angle TPC=\alpha \Rightarrow$ PK биссектриса

$\angle BAP=\angle APC-\angle ABC=\alpha=\angle ABC \Rightarrow$

$\triangle APB$ - равнобедренный $\Rightarrow AP=BP$



$\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}$

$\frac{S_{APB}}{S_{APC}}=\frac{BP}{PC}=\frac{AP}{PC}\Rightarrow$

$S_{ABC}=S_{APB}+S_{APC}=S_{APC}\left(1+\frac{AP}{PC}\right)=\left(S_{APK}+S_{CPK}\right)\left(1+\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}\right)=\left(S_{APK}+S_{CPK}\right)^2=49$