Часть 1

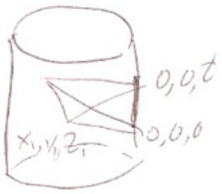
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

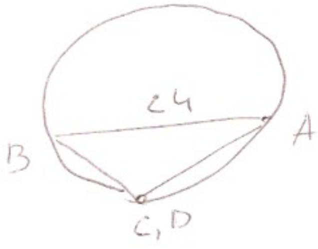
Шифр: **21102973**

ID профиля: **844347**

Вариант 21

ЧЕРНОВИК

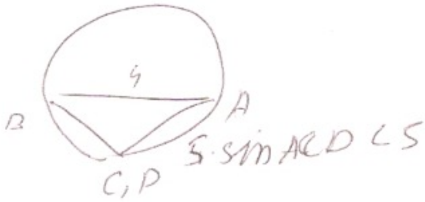


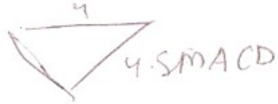


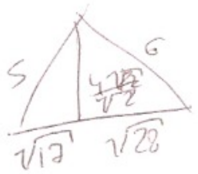
$(x_2-x_1)^2+\ldots=4^2$

$x_1^2+\ldots z=$

APC = BPC







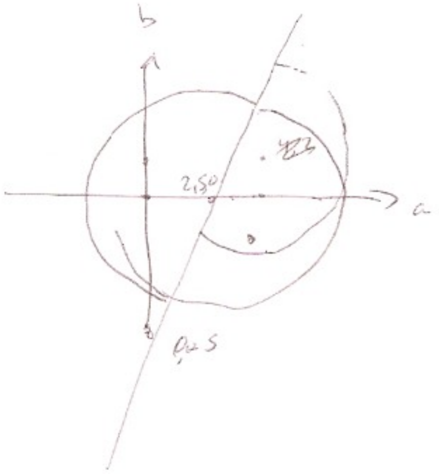
~~sin~~

$\sin\alpha=$

$\sqrt{28}\pm\sqrt{17}$

21102973 (U844347 M1303666)

ЧЕРНОВИК

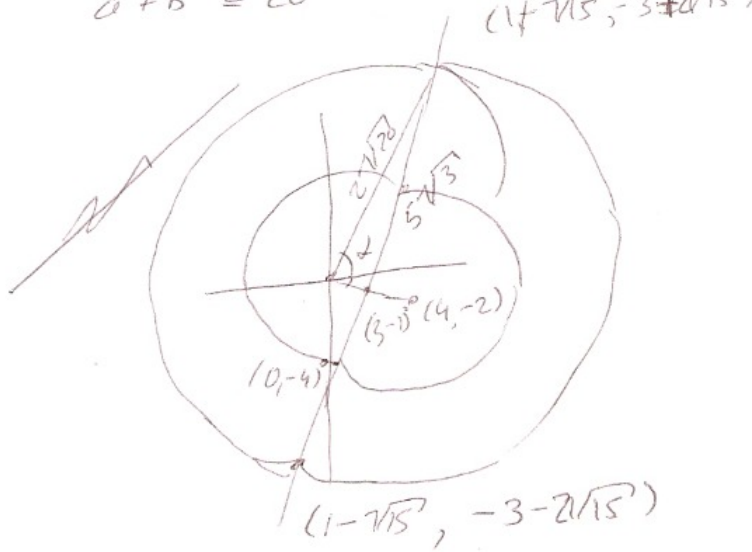


if $8a-4b\le 20$:

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le \sqrt{20}^2$

if $8a-4b \ge 20$:

$a^2+b^2 \le 20$



$(a-4)^2+(b+2)^2=20$

$8a-4b=20$

$2a-b=5$

~~$a^2+b^2=2\sqrt{20}$~~

$x_0^2+y_0^2=(2\sqrt{20})^2$

$2x_0-y_0=5$

$x_0^2+y_0^2=80$

$2x_0-y_0=5$

$x_0^2+(2x_0-5)^2=80$

$5x_0^2-20x_0+25=80$

$x_0^2-4x_0-11=0$

$x_0=\frac{4\pm\sqrt{16+44}}{4}=1\pm\sqrt{15}$

$\cos\alpha=\frac{1}{4}$

$S_1=\pi\,(2\sqrt{20})^2\cdot\frac{2\arccos(\frac{1}{4})}{2\pi}=80\cdot\arccos(\frac{1}{4})$

$S_2=5\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{15}$

$2(80\cdot\arccos(\frac{1}{4})+5\sqrt{15})$

ЧЕРНОВИК

$(a+7d)(a+16d) > (7a+21d)+27$

$S=7a+21d$

$7\cdot16$
112
130

$(a+10d)(a+13d) < (7a+21d)+60$

$a^2+23ad-7a+7\cdot16d^2-21d-27>0$

$a^2+23ad-7a+10\cdot13d^2-21d-\cancel{27}<0$

~~$a^2+16ad+7\cdot16d^2-21d-27>0$~~

$7\cdot16d^2-21d-27>10\cdot13d^2-21d+60$

$33>18d^2$

$\sqrt{\frac{11}{16}}\ \sqrt{\frac{12}{30}}>d$

$d=1$

$(a+7)(a+16) > (7a+21)+27$

$a^2+23a+112>7a+21+27$

$a^2+16a+64>0$

$(a+8)^2>0$

$a^2+16a+130-21-60<0$

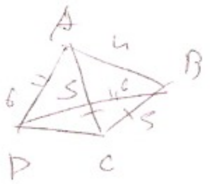
$a^2+16a+49<0$

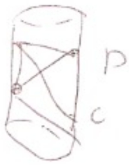
$a_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot49}}{2}=$

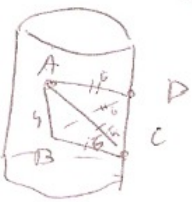
$=-8\pm\sqrt{15}$

$-11\le a\le-5$

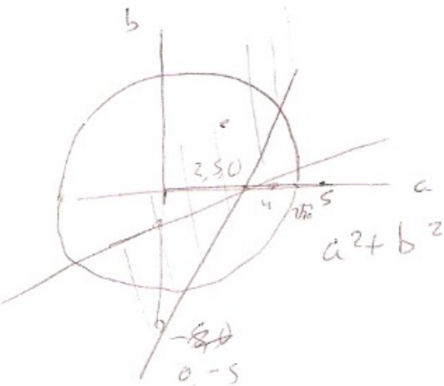
$a\ne-8$







$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le\sqrt{20}$



$a^2+b^2\le\min(8a-4b, 20)$

$8a-4b\le20 \Leftrightarrow 2a-b\le5$

$a^2-8a+b^2+4b\le0$

$(a-4)^2+(b+2)^2\le20$

21102973 (U844347 M1303666)

чистовик, стр №1.

Задача №1

Пусть $a_1 = a$ - начальный член, d - разность последовательности. Тогда из условия:

$a, d \in Z, d > 0;$

$S = 7 \cdot a + \frac{6 \cdot 7 \cdot d}{2} = 7a + 21d \Rightarrow$

$\begin{cases} (a+7d)(a+16d) > 7a+21d+27, \\ (a+10d)(a+13d) < 7a+21d+60 \end{cases} \Rightarrow$

$a^2 + 23ad - 7a + 112d^2 - 21d - 27 > 0,$

$0 > a^2 + 23ad - 7a + 130d^2 - 21d - 60.$

Складывая полученные неравенства:

$18d^2 < 33$. Но тогда $d < 2 \Rightarrow d = 1$.

Подставляя в изначальные неравенства:

$\begin{cases} (a+7)(a+16) > 7a+21+27, \\ (a+10)(a+13) < 7a+21+60, \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a^2 + 16a + 64 > 0, \\ a^2 + 16a + 49 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} (a+8)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -8 \\ \left(a - \frac{-16 - \sqrt{16^2 - 4 \cdot 49}}{2}\right)\left(a - \frac{-16 + \sqrt{16^2 - 4 \cdot 49}}{2}\right) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -8 - \sqrt{15} < a < -8 + \sqrt{15} \Rightarrow -11 \leq a \leq -5.$

$\neq -8$ подходят

21102973 (U844347 M1303666)

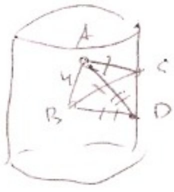
ЧИСТОВИК, стр №2.

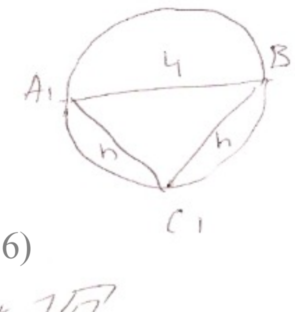
Задача №2.

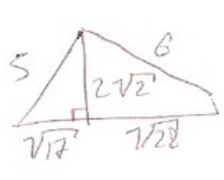
Заметим, что у $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ стороны AC и CB равны, AD и DB равны, а сторона CD - общая. Тогда $\triangle ACD = \triangle BCD$ по трем сторонам. Тогда перпендикуляры из A и B на CD равны между собой, и равны проекциям (по длине) отрезков AC, BC, AD и BD на ~~поверхность~~ плоскость, содержащую верхнюю грань цилиндра (т.к. из условия очевидно, что плоскости треугольников ACD и BCD перпендикулярны ей). Обозначим их длину за $h<5$. В силу $\triangle ACD = \triangle BCD$ точки A и B равноудалены от верхней грани цилиндра, а потому, пусть при проекции $\triangle ACB$ на эту грань, получается $\triangle A_1C_1B_1$, где $A_1B_1 = AB = 4$, $A_1C_1 = C_1B_1 = h$. Из теоремы синусов:

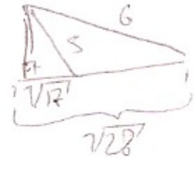
$R = \frac{4}{2\sin A_1C_1B_1}$, где R - радиус $\odot(A_1C_1B_1)$.

Он минимален при $\sin A_1C_1B_1 = 1$ и h в этом случае есть $\frac{4}{\sqrt{2}} < 5$. А потому существует ровно 2 треугольника ACD, для которых $AC = 5$, $AD = 6$, $h = 2\sqrt{2}$. Выразив проекции сторон AC и AD на CD через теорему Пифагора можно получить, что $CD = 2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$. Оба ответа подходят









21102973 (U844347 M1303666)

Ответ: $2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$

Чистовик, стр №3.
Задача №3.

Изобразим на графике все точки с коо-тами (a, b), такими, что

$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$. Если

$8a-4b \le 20$, то $a^2+b^2 \le 8a-4b \Rightarrow$

$(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$. В этом случае, это часть ~~окружности~~ круга с центром в точке $(4, -2)$ и радиусом $\sqrt{20}$, ограниченная прямой $8a-4b \le 20$.

Аналогично иначе

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 20 \\ 8a-4b \ge 20. \end{cases}$

Заметим, что точка $(2, -1)$ лежит на прямой $2a-b=5$, и прямая проходящая через точки $(0,0)$ и $(4, -2)$, перпендикулярна ей $\Rightarrow$ они симметричны относительно прямой $2a-b=5$. В силу равенства радиусов в первом и во втором случаях „куски" кругов также симметричны.

Тогда любая точка из M должна находиться на расстоянии $\le \sqrt{20}$ для некой точки из описанных ранее, что, как несложно заметить $\Leftrightarrow$ точка находится на расстоянии $\le 2\sqrt{20}$ до одной из точек $(0,0)$ или $(4, -2)$.

Окружности, построенные данным образом, будут пересекаться (и пересекать прямую $2x-y=5$) в точках $(1+\sqrt{15}, 3+2\sqrt{15})$, $(1-\sqrt{15}, 3-2\sqrt{15})$

Найдем площадь треугольника

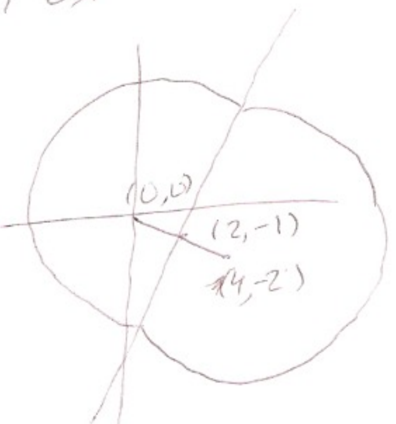
Чистовик, стр № 4

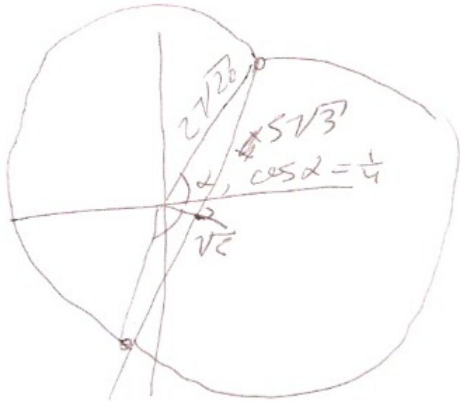
Задача №3

и сектора по отдельности:

$S_1 = \pi \cdot \frac{2\pi - 2\arccos(\frac{1}{4})}{2\pi} \cdot (2\sqrt{10})^2 = 8(\pi - \arccos(\frac{1}{4}))$

$S_2 = 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{15}$.





В силу симметрии

Ответ: $160(\pi - \arccos(\frac{1}{4})) + 10\sqrt{15}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102973**

ID профиля: **844347**

Вариант 21

ЧЕРНОВИК

$\log_{2x-3}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$x \geq \frac{3}{2}$

$x \neq 2$

$(2x-5)(x+1)$

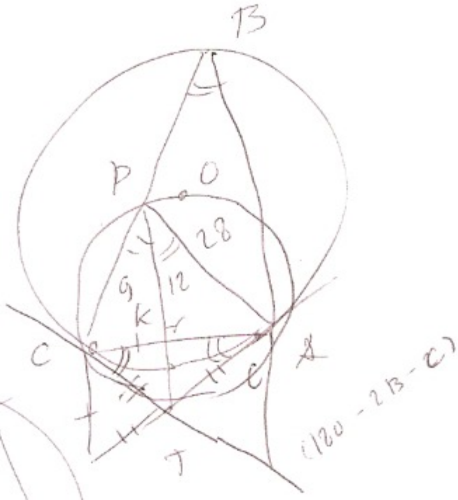
$2x^2-3x+5 = 2(x-\frac{3}{4})^2 + 3\frac{7}{8} > 1$

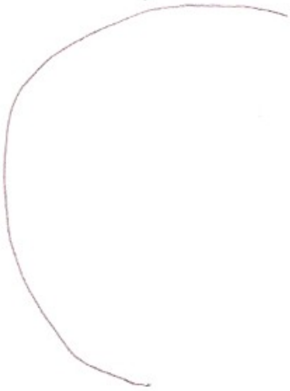
$x \geq -1$, $x \neq 1$

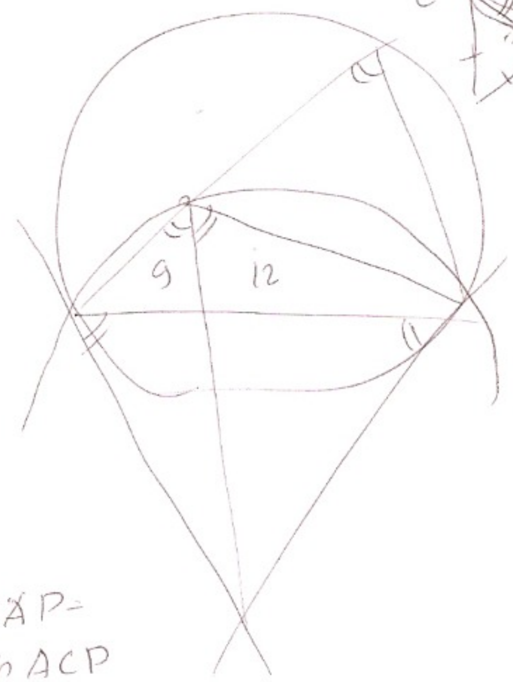
$\log_{2x-3} x+1)$

$2\log_a b^2$, $2\log_c a$, $\log_b c$

$\log_a b = \log_c a$







$(\frac{3}{7}AC)^2 + (AC)^2 = 2?$

$AP \cdot AK \cdot \sin CAP =$

$= CP \cdot CK \cdot \sin ACP$

$CP \cdot PK \cdot \sin B = 18$

$AP \cdot PK \cdot \sin B = 24$

$\sin\alpha = \frac{\sin B}{AC} \cdot CP$

21102973 (U844347 M1303667)

ЧЕРНОВИК

$a = 5^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$

$b = 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$

$\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 18$

$\max(\beta_1, \dots \beta_3) = 16$

$\alpha_1 = 1, \ \alpha_3 = 18$ 18 вар

$\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 18$ 18 вар

$\alpha_3 = 1, \alpha_1 = 12$ 18 6

$(18 \cdot 6 - 22 \cdot 6) \cdot$

$(16 \cdot 6 - 22 \cdot 6)$

$16 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 6$

$6 \cdot 16 \cdot 6 + 18 \cdot 6 +$

$+ 6 \cdot 6 + \frac{12^2}{4} - 12 \cdot 6$

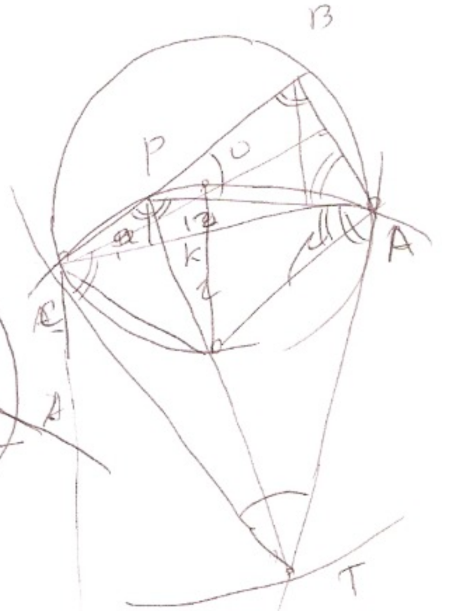
$(16 \cdot 6 + 12 \cdot 6)(1)(14 \cdot 6 + 1) -$

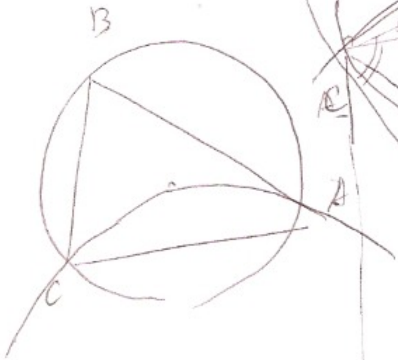
$- 4 \cdot 6$

$(+ 12^2 - 4 \cdot 6)$

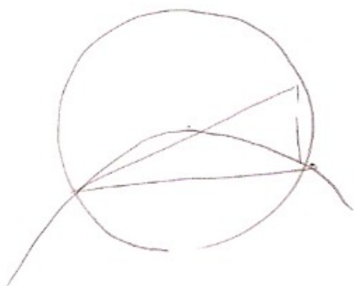
1, 1, 2
1, 2, 1
2, 1, 1
1, 2, 2
2, 1, 2
2, 2, 1

$38 \cdot 17 \cdot 15$





1, 1, 2
1, 2, 2
1, 2, 1
1, 2, 2
2, 1, 1
2, 1 2,
2, 1, 1
2, 1, 2
2, 1, 2
2, 1 2
1, 2, 1
1, 2, 1



$\frac{AT}{AP}$

$\frac{AK}{CK} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$9 \cdot \frac{KT}{PK} = 12$

$\frac{AP \cdot PK \sin B}{2} = 12$

21102973 (U844347 M1303667)

$AK(CA - AK) = PK \cdot KT$

$TK \cdot TP = TA^2 \quad PK \cdot PT = PA^2$

~~Чистовик, стр №1~~ ЧЕРНОВИК

~~Задача №1~~

Пусть $a = 5^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$, $b = 5^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$,

$c = 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$. Тогда

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$,
$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 18$.

Есть 16·6 способов выбрать из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равное 1, равное 18 и между 1 и 18. Аналогично для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Тогда 16·6·16·6 способов, когда среди $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, и среди $\beta_1\cdot\beta_2\cdot\beta_3$ нет одинаковых. Если среди $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть, а среди $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — нет, то 18·6·[illegible]·6, наоборот — 16·6·[illegible]·6

21102973 (U844347 M1303667)

Чистовик, стр 1.

Задача №4

Пусть $a = 5^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$, $b = 5^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$, $c = 5^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$.

Тогда

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$,

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 18$

Способов из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выбрать число, равное 1, равное 18 и между (включ) 1 и 18 — $6\cdot 18$, где 6 способов мы посчитали дважды ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 18$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 18$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 18$)

Аналогично для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Итого $(6\cdot 18 - 6)(6\cdot 16 - 6)$ вариантов, где дважды мы посчитали те, где ($\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ или $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$ и т.п.)

итого ~~6·16·6·18 − 6·6·16~~ $36\cdot 17\cdot 15 - 6$ вариантов

Чистовик, стр №2

Задача №6

Заметим, что $\angle AOC = 2\angle ABC =$

$= \angle TAC + \angle TCA = 180^\circ - \angle ATC \Rightarrow$

A, O, C, T лежат на одной окружности.

Тогда

$\angle APT = \angle ACT = \angle CAT = \angle CPT \Rightarrow$

PK - биссектриса $\angle APC \Rightarrow$

$\frac{AK}{CK} = \frac{AP}{CP} = \cancel{\sqrt{\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}}} = \cancel{\frac{2}{\sqrt{3}}}\ \frac{4}{3}$

Также $\angle APB = \angle ATC \Rightarrow$

$\angle PAB = 180^\circ - \angle ABC - \angle APB = 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ABC) -$

$- \angle ABC = \angle ABC \Rightarrow AP = PB \Rightarrow$

$\frac{AP}{CP} = \cancel{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{4}{3} = \frac{BP}{CP} = \frac{S_{BAP}}{S_{CAP}} = \frac{S_{ABC}}{S_{CAP}} - 1$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{7}{3}(S_{CPK} + S_{APK}) = 49$

21102973 (U844347 M1303667)

Чистовик, стр. 13.

Задача 15.

$\sqrt{2x-3} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$,

$2x-3 = 1 \Leftrightarrow x \neq 2$

$2x^2-3x+5>0 \Leftrightarrow 2(x-\frac{3}{4})^2+3\frac{7}{8}>0 \Rightarrow x\in(-\infty, +\infty)$

$2x^2-3x+5 \neq 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty, +\infty)$

~~вогд~~ $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

$x+1\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$

$2x^2-3x+5>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty, +\infty)$