Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102972**

ID профиля: **356938**

Вариант 21

Чистовик Лист №1 Вариант 21

№1

$a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$
$S = a_1 + \ldots + a_7$
$a_8 \cdot a_{17} > S + 27$
$a_{11} \cdot a_{14} < S + 60$
$? a_1$.

Пусть d – разность прогрессии. $d > 0$ (возр. посл.)

Тогда:

$a_1 + \ldots + a_7 = S = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1 + 7d)(a_1 + 16d) = a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2$

$a_{11} \cdot a_{14} = (a_1 + 10d)(a_1 + 13d) = a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 d + 112d^2 > 7a_1 + 21d + 27 \\ 7a_1 + 21d + 60 > a_1^2 + 23a_1 d + 130d^2 \end{cases} +$$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 112d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 60 > \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 27 + \cancel{a_1^2} + \cancel{23a_1 d} + 130d^2$

$18d^2 < 33$

$d^2 < \frac{33}{18}$ $(d > 0)$

$d < \frac{\sqrt{11}}{3}$ $\sqrt{11} > 3$ $(11 > 9)$

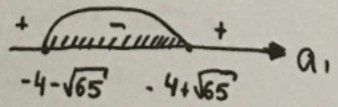
Т.к. все члены целые, то и разность должна быть целой.

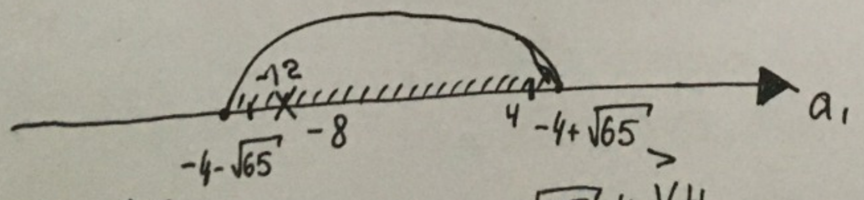
Значит, $d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 23a_1 + 112 > 7a_1 + 48 \\ a_1^2 + 23a_1 + 130 < 7a_1 + 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1 + 64 > 0 \Rightarrow (a_1 + 8)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -8 \\ a_1^2 + 16a_1 + 49 < 0 \Rightarrow a_1 = -4 \pm \sqrt{16 + 49} = -4 \pm \sqrt{65} \end{cases}$$

Метод интервалов:





$<$

$-4-\sqrt{65} \vee 8$

$4+\sqrt{65} \vee 8$

$\sqrt{65} \vee 4$

$65 > 16$

$>$

$4+\sqrt{65} \vee 12$

$65 > 64$

$>$

$\sqrt{65} - 4 \vee 4$

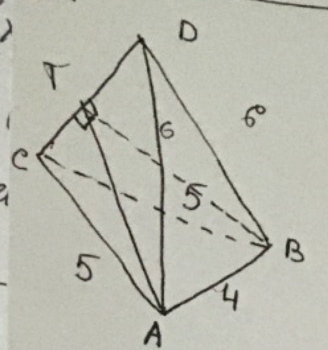
$\sqrt{65} \vee 8$

$65 > 64$

Ответ: $a \in \{-12; -11; -10; -9; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

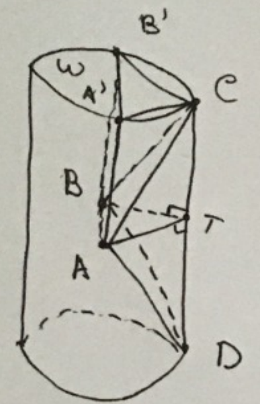
Чистовик Лист №2 Вариант 21

№2.



$CB = AC = 5$
$AB = 4$
$AD = DB = 6$
Впис. в цилиндр.
$r_{цил}$ - min

? CD



Впишем тетраэдр так, чтобы CD было образующей цилиндр., ~~Ин~~ Если это не так, то просто сожмём цилиндр т.к. r не изменится.

1) $AA' \parallel CD$
$A' \in \omega$

2) $BB' \parallel CD$
$B' \in \omega$.

Если точки A' или B' лежат не на окр. ω., то тогда её радиус будет больше, потому что $\triangle A'B'C$ останется таким же.

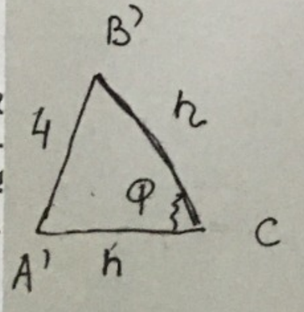
3) $AB = A'B' = 4$ ($AA'B'B$ - пар-м по постр.)

4) Опустим перпенд. из точки A и B на CD.
Т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ (3 стороны) то ч перпенд. равны и приход. в одну точку. $AT = BT = h$.

5) $CT = \sqrt{25 - h^2}$ (т. Пиф.)

6) $ATCA'$ - п/у ($\angle CTA = 90°$) => $CA' = X = \sqrt{25 - CT^2} = h$. (т. Пиф.)

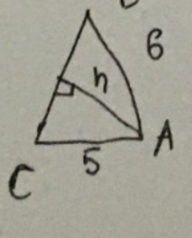
7) Аналогично $CB' = h$



8) Для того, чтобы $r_y = min$, нужно чтобы $\sin\varphi = min$. или $\cos\varphi = max$.

9) $16 = 2h^2 - 2h^2\cos\varphi$ (т. cos)
$\cos\varphi = 1 - \frac{8}{h^2} \rightarrow max \Leftrightarrow h \rightarrow min$.

10) В $\triangle ACD$ $h \leq 5$, (против большего угла лежит большая сторона)



~~А, Значит, $\angle DCA = 90°$ => $CD = \sqrt{11}$ (т. Пиф.)~~

Значит $\angle DCA \rightarrow 180°$ => $CD \rightarrow 11$. Но угол DCA не боль => $CD = \sqrt{11}$

Ответ: ~~$CD \rightarrow 11$~~ $CD = \sqrt{11}$

21102972 (U356938 M1296761)

Чистовик Лист №3 Вариант 21

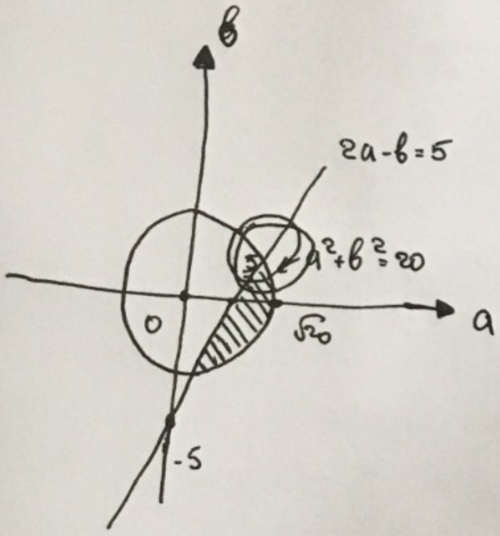
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 20\\ a^2+b^2\le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

Решим 2 нер-во.

I случай

$8a-4b\ge 20$

$$\begin{cases}2a-b\ge 5\\ a^2+b^2\le 20\end{cases}$$



Найдем точки пересечения.

$2a-b=5$

$b=2a-5$

$a^2+(2a-5)^2=20$

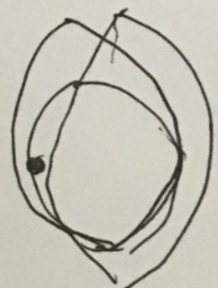
$a^2+4a^2-20a+25=20$

$5a^2-20a+5=0$

$a^2-4a+1=0$

$a=2\pm\sqrt{3}$

$b=(4\pm2\sqrt{3}-5)=-1\pm2\sqrt{3}$

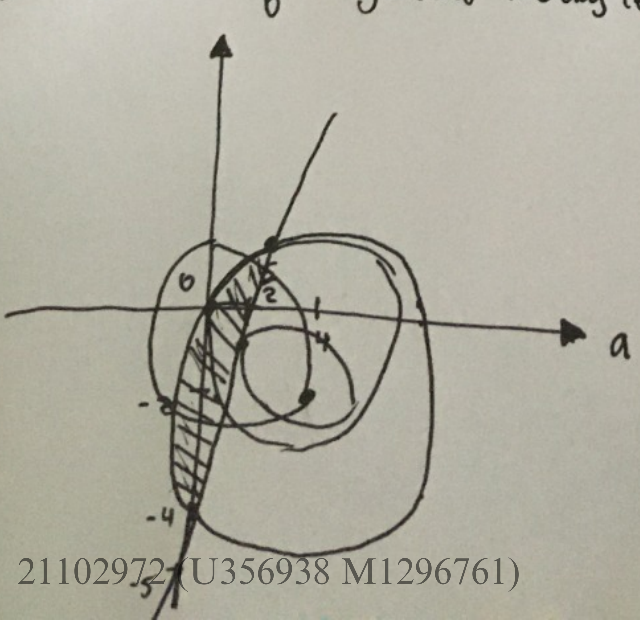


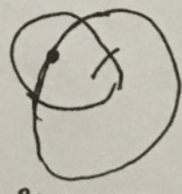
Подставив точку (0;0) Получаем заштрихованную область

II случай

$$\begin{cases}2a-b\le 5\\ a^2+b^2\le 8a-4b\end{cases}\quad (a-4)^2+(b+2)^2\le 20$$

Подставив точку (4;-2) получаем заштрих область.





Найдем точки пересечения.

$b=2a-5$

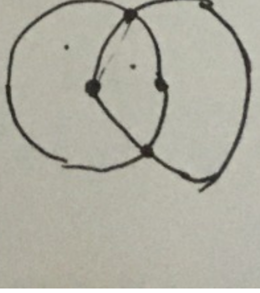
$(a-4)^2+(2a-3)^2=20$

$a^2-8a+16+4a^2-12a+9=20$

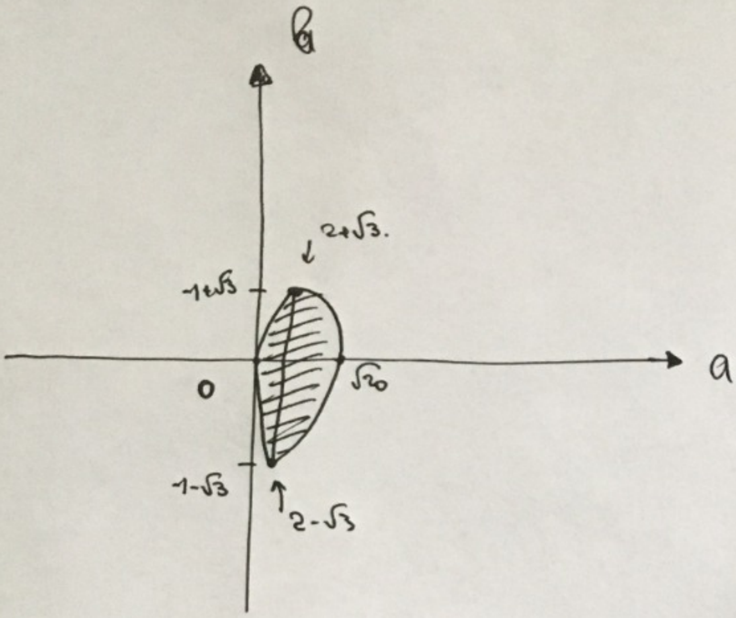
$a^2-4a+1=0$

$a=2\pm\sqrt{3}$

$b=-1\pm2\sqrt{3}$

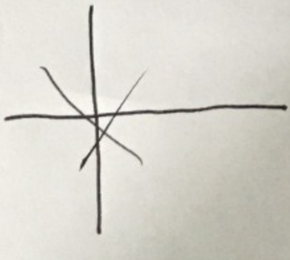


Итого:



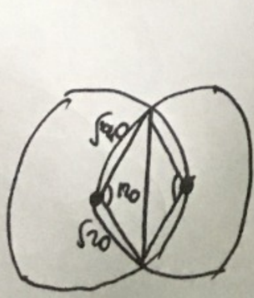
Теперь на каждую точку из данного мн-ва нужно натянуть окр. с радиусом $\sqrt{20}$.

~~Площадь половины заштрих. области.~~



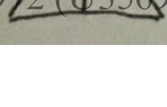
В данной фигуре все внутренние точки не будут играть роли при подсчёте площади.

А все внешние точки разбиваются на пары с расстоянием между ними – $\sqrt{20}$.



Значит, ответ будет $\left(40\pi - \frac{2}{3}20\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 20\right)\cdot$ ~~S фиг~~ l · фигуры

l – длина фигуры.



$\frac{r^2\cdot\sin 120}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{2}$

11

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=S$

$a_8 \cdot a_{17} > S+27$

$a_{11} \cdot a_{14} < S+60$

$\times \begin{array}{r}16\\7\\\hline 112\end{array}$

$d>0$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$

$a_1=a_1$

$a_7=a_1+6d$

$S=\dfrac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$

$+\begin{array}{r}21\\27\\\hline 48\end{array}$ $\quad -\begin{array}{r}112\\48\\\hline 64\end{array}$

$-\begin{array}{r}130\\81\\\hline 49\end{array}$

$a_8 \cdot a_{17} = (a_1+7d)(a_1+16d) = a_1^2+23a_1d+112d^2$

$a_{11}\cdot a_{14} = (a_1+10d)(a_1+13d) = a_1^2+23a_1d+130d^2$

$$\begin{cases} a_1^2+23a_1d+112d^2 > 7a_1+21d+27 \\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < 7a_1+21d+60 \end{cases} +$$

$7a_1+21d+60 > a_1^2+23a_1d+130d^2$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+112d^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+60 > \cancel{7a_1}+\cancel{21d}+27+\cancel{a_1^2}+\cancel{23a_1d}+130d^2$

$33 > 18d^2$

$d^2 < \dfrac{33}{18}$ $\qquad d<\dfrac{\sqrt{11}}{3}$ $\qquad d\in\mathbb{Z}$

$d<\sqrt{\dfrac{33}{18}}=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$ $\qquad d=1$

$a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27$

$a_1^2+16a_1+64>0$

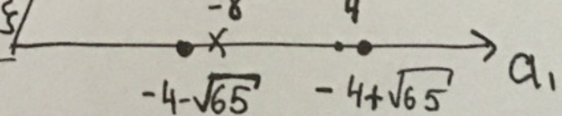
$(a_1+8)^2>0$

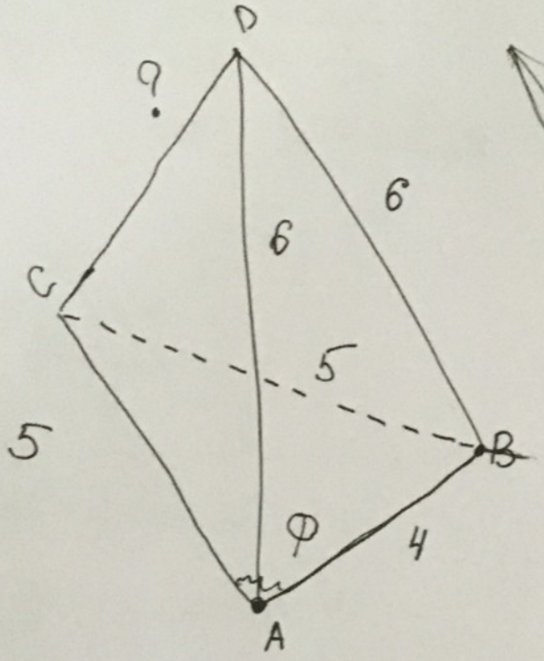
$a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+81$

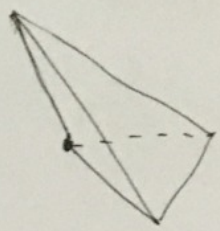
$a_1^2+16a_1+49<0$

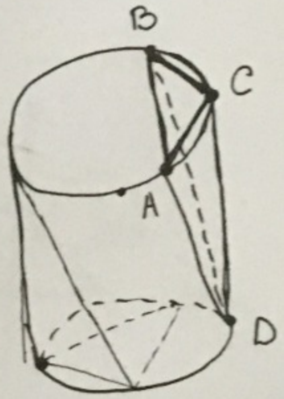
$a_1 = -4\pm\sqrt{16+49} = -4\pm\sqrt{65}$

$\boxed{a_1 \in \{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}}$









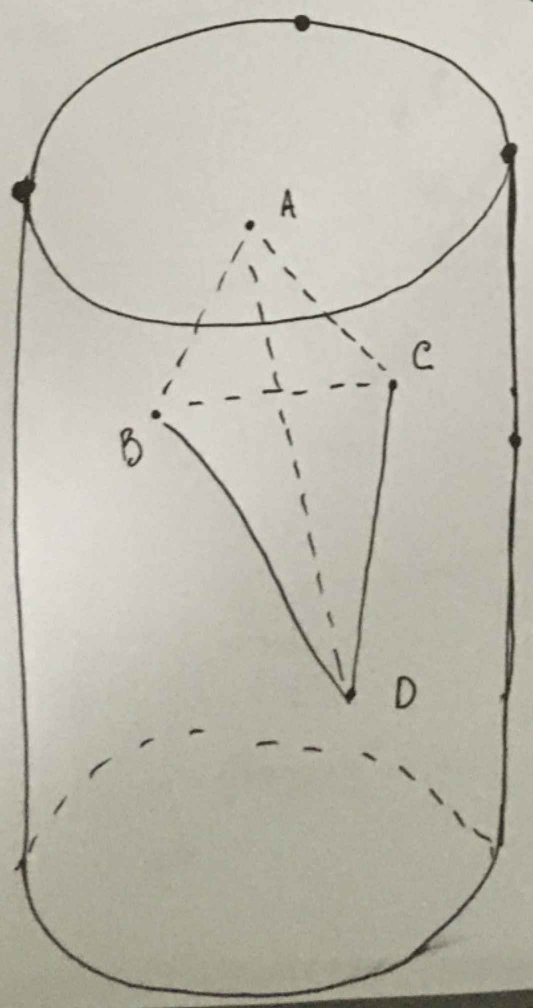
$$\cancel{25}=\cancel{25}+\cancel{16}-\cancel{2}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cos\varphi$$

$$\cos\varphi=\frac{2}{5}$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

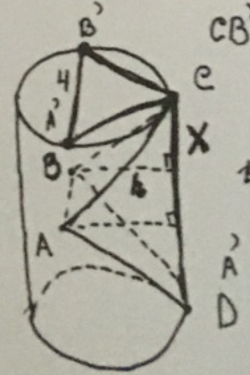
$$2R=\frac{5}{\sqrt{21}/5}$$

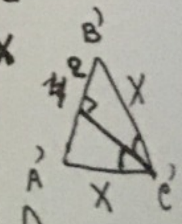
$$\boxed{R=\frac{25}{2\sqrt{21}}}$$



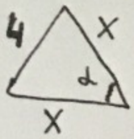
$$CA'=\sqrt{AC^2-h^2}=\sqrt{25-h^2}$$

$$CB'=\sqrt{25-h^2}$$





4



$\sin\alpha - \min$

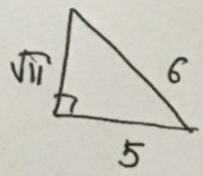
$16 = 2x^2 - 2x^2\cos\alpha$

$(-\cos\alpha + 1) = \frac{8}{x^2}$

$\cos\alpha = 1 - \frac{8}{x^2} = 1 - \frac{8}{25-h^2}$

$\angle ACD = 90^\circ \Rightarrow AC \in$ верхн. крышке.

$\boxed{CD = \sqrt{11}}$

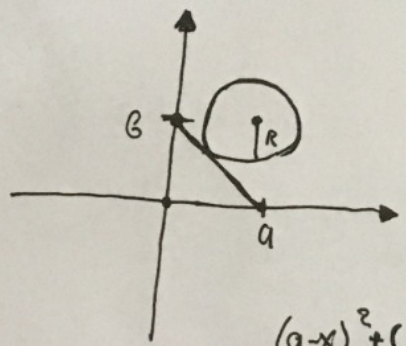


$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)\end{cases}$$

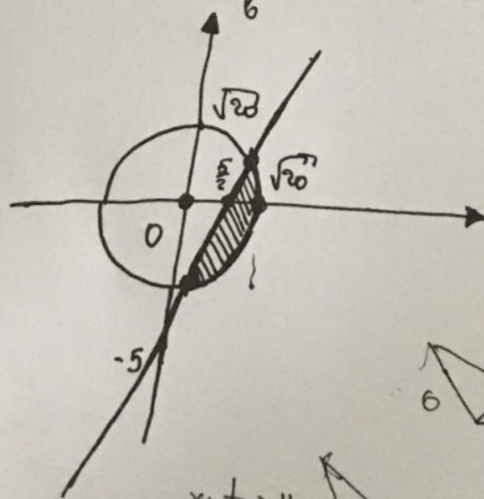
$8a - 4b \ge 20$

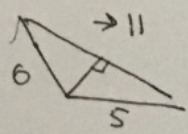
$\boxed{2a - b \ge 5}$

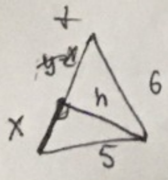
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 20 \\ a^2+b^2 \le 20 \\ 2a-b \ge 5\end{cases}$$



$\underline{(a-x)^2+(b-y)^2 \le 20}$





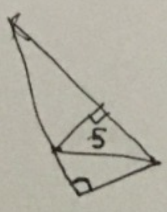


$x \to 5$

$t \to 6$

$x + t \to 11$

t^2

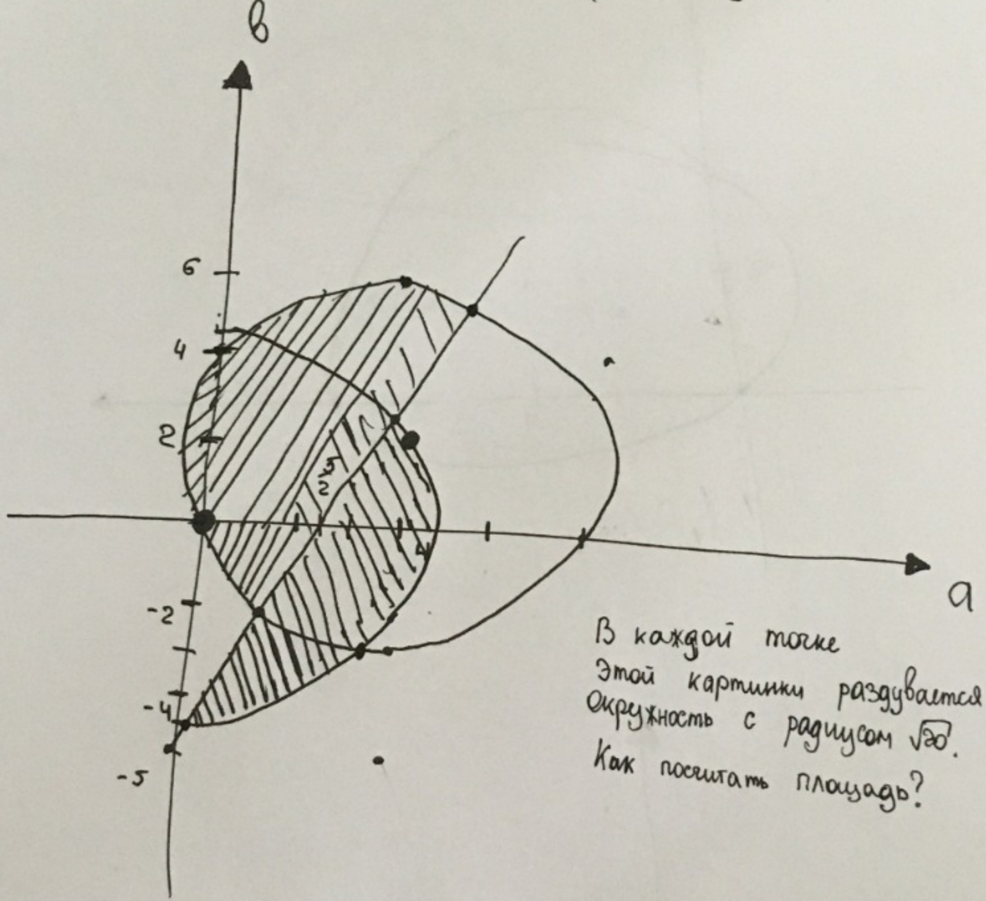


$25 - x^2 = 36 - \cancel{y^2 + 2yx - x^2} \to \min.$

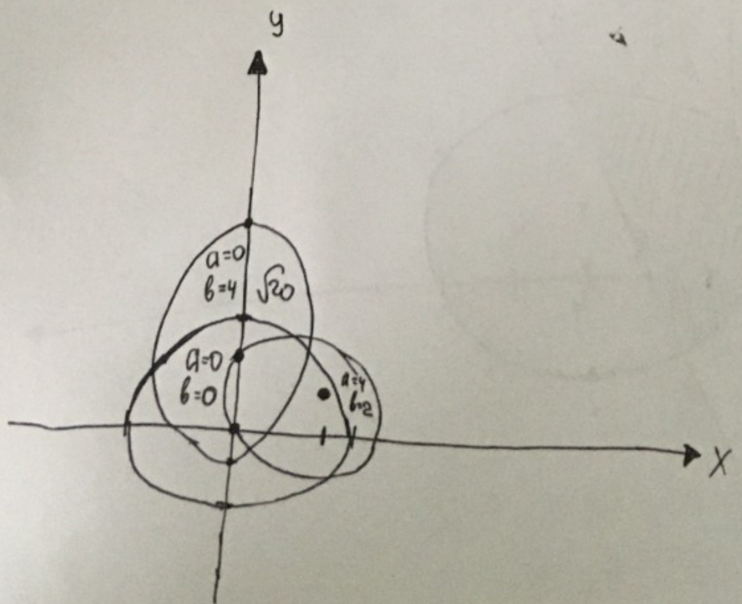
$x + t$

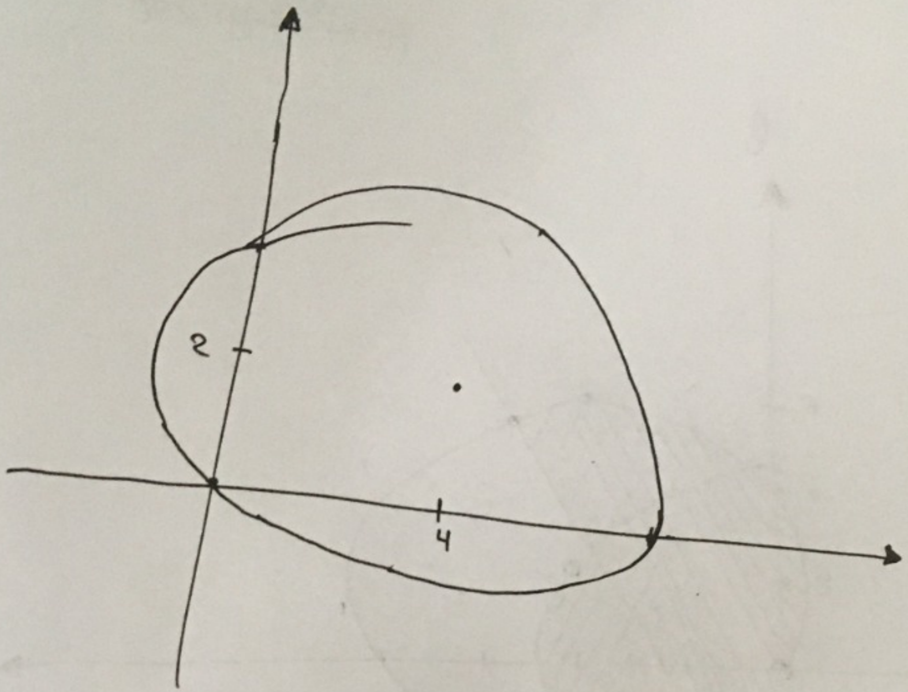
$a^2+b^2 \le \min(8a-4b, 20)$

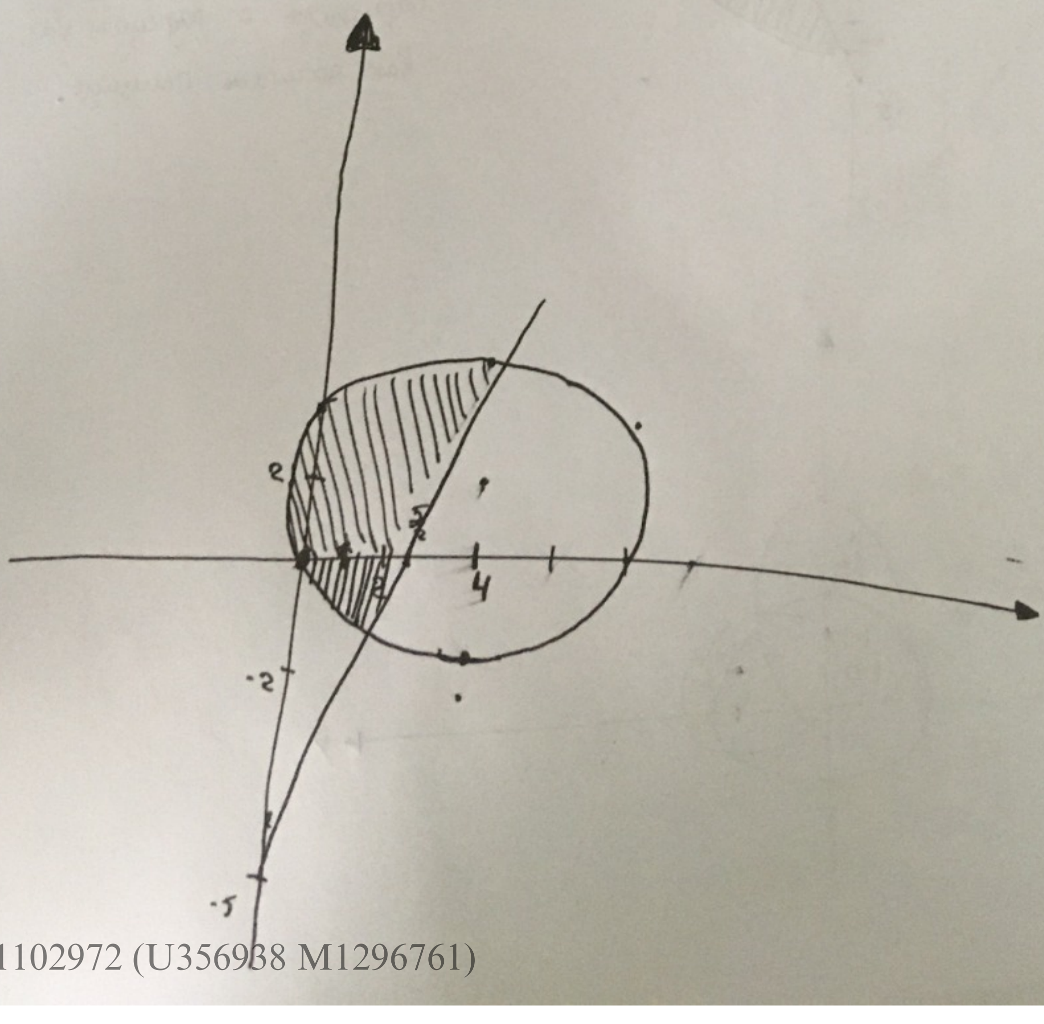
$\cancel{(a-x)^2+(b-y)^2 \le 20}$



В каждой точке этой картинки раздувается окружность с радиусом $\sqrt{20}$. Как посчитать площадь?




2
4

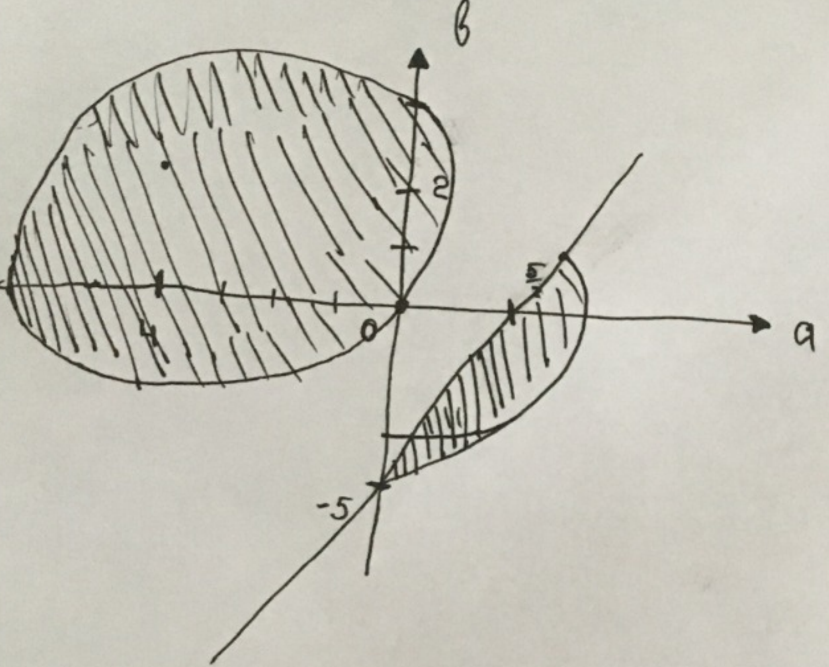

2
4
-2
-5

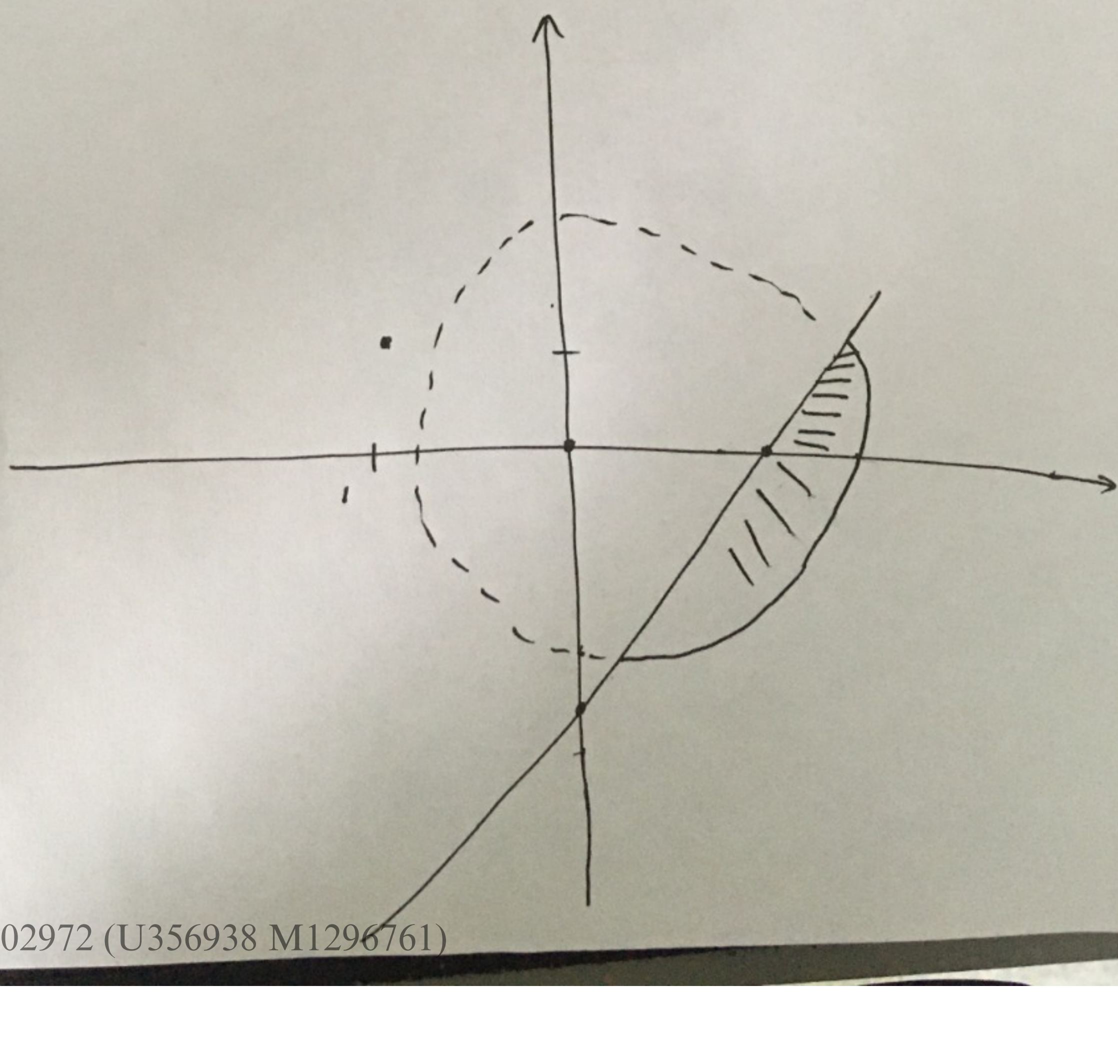
II случай

$(a-x)^2+(y-b)^2 \le 20$

$a^2+b^2 \le 8a-4b$ $\qquad$ $a^2-8a+b^2-4b \le 0$

$2a-b<5$ $\qquad$ $(a-4)^2+(b+2)^2 \le 20$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102972**

ID профиля: **356938**

Вариант 21

1.

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2$

+

$a=5^x\cdot 7^y$

$b=5^t\cdot 7^z$

$c=5^l\cdot 7^q$

~~max~~
~~min(x,t,l)=1~~
~~min(y,z,q)=1~~
~~max~~

$2y^2-20^2=9\cdot 49$

$3\cdot 7$

$\min(x,t,l)=1$

$\max(x,t,l)=18$

$\min(y,z,q)=1$

$\max(y,z,q)=16$

$l=1$ $x=18$ $t\in[1;18]$ 18

$t=18$ $x\in[1;18]$ 18

36 108

$q=1$ $y=16$ $z\in[1;16]$ 16

$z=16$ $y\in[1;16]$ 16

32 96

$29\times 3=87$

108×96: 648, 972, 10368

$\boxed{10368}$

$18\frac{17}{12}\cdot 19\frac{5}{12}$

$29\times 4=116$

$28\frac{3}{4}+9\frac{2}{3}-20$

$9\frac{3}{4}+8\frac{2}{3}$

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$

$t,\ t,\ (t-1)$

ОДЗ

$2x-3>0$

$2x-3\neq 1$

$x+1>0$

$2x^2-3x+5>0$

$2x^2-3x+5\neq 1$

$\frac{9}{2}$ 7 $\frac{4}{21}$

$2x^2-3x+5=$

~~$(2x-3)(x+1)$~~

$2x^2-3x+5>0\neq 1$

~~$D=9-$~~

$\frac{1}{2}\log_u v$

$2\log_q u$

$\log_v q$

$t\cdot(t+1)^2=4$

$t^3+2t^2+t-4=0$

$u=2x-3$

$v=x+1$

$q=2x^2-3x+5$

$\frac{1}{2}\log_u v\cdot 2\log_q u\cdot\log_v q=$

$=4$

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$D<0$

$t^2(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

$\boxed{t=2}$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

21102972 (U356938 M1296762)

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$

$\cancel{\log}: \ (\sqrt{2x-3})^2 = x+1$

$2x-3 = x+1$

$\boxed{x=4}$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 = 2$

$\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) = 1$

$2x-3 = 2x^2-3x+5$

$2x^2-5x+2=0$

$x = \frac{5\pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\boxed{\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}}$

$\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$

$x^2+2x+1 = 2x^2-3x+5$

$x^2-5x+4=0$

$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}}$

$x = \frac{1}{2}$ нино

1 нино

2 нино

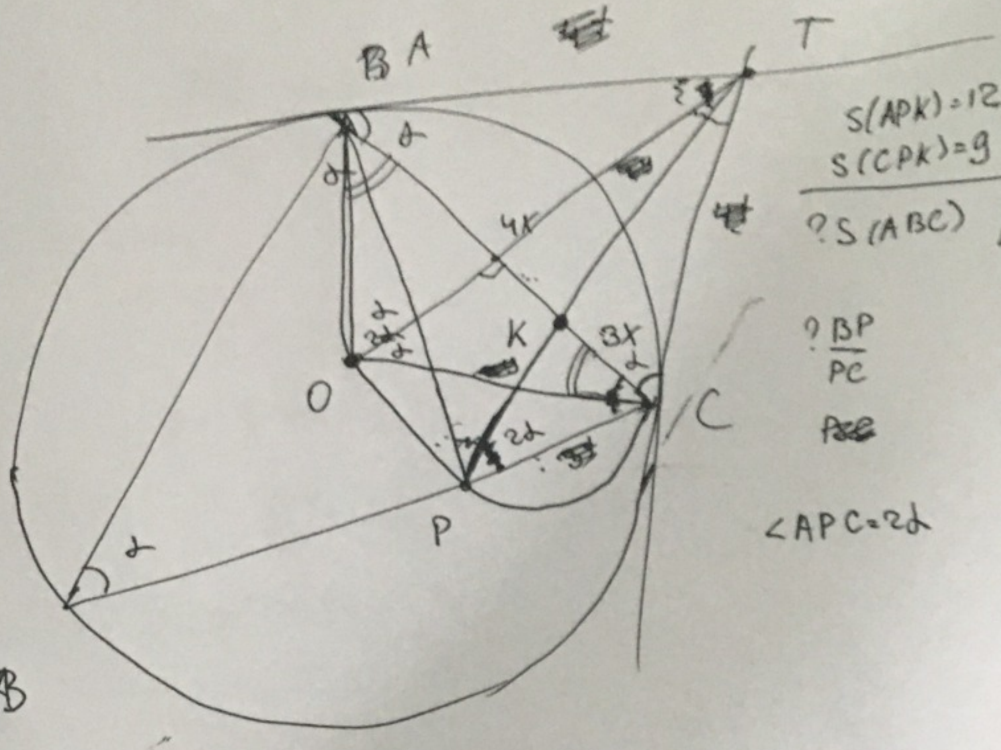
4

$x=4$

$\log_{2\cdot16-3\cdot4+5}(2\cdot4-3)^2 = \log_{25}25 \ \cancel{\boxed{\frac{1}{2}}} = 1$

$\log_5 25 = 2.$

Ответ: $x=4$.



$S(APK)=12$

$S(CPK)=9$

$?S(ABC)$

$?\frac{BP}{PC}$

$\angle APC = 2\alpha$

$$\frac{AK\cdot KP}{CK\cdot KP}=\frac{12}{9} \qquad \frac{AK}{CK}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin\angle KTC}{\sin\angle KTA}=\frac{3}{4}$$

$$24\ AP\cdot \sin\angle APT\cdot TP\cdot\frac{1}{2}= TP\cdot \sin\angle PTC\cdot TC\cdot\frac{1}{2}$$

$$9\cdot A\cancel{P}\cdot \cancel{P}K\cdot \sin\angle APK = 12\,\cancel{T}K\cdot TC\cdot \sin\angle KTC$$

$$\frac{AP}{TK}=\frac{4\cdot\angle KTC}{3\,\angle APK}$$

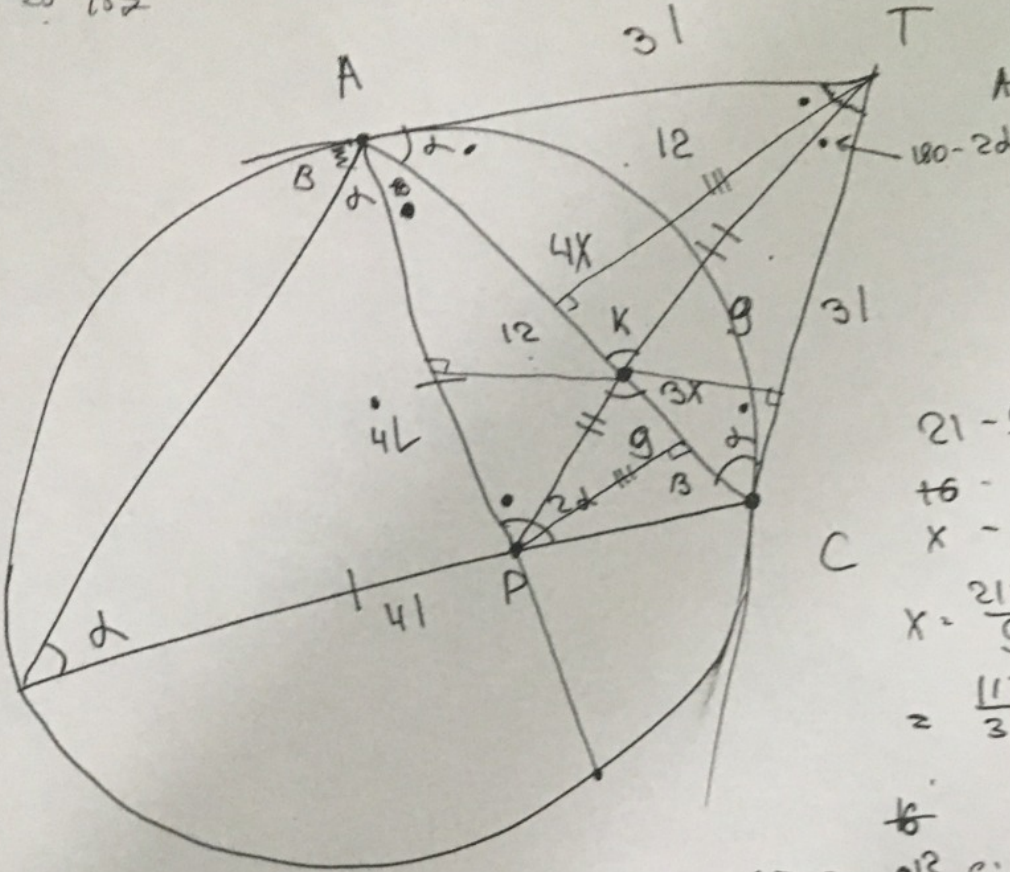
$$AT\cdot TK\cdot \sin\angle ATK\cdot\frac{1}{2}=12$$

$$AP\cdot PK\cdot \sin\angle APK\cdot\frac{1}{2}=12$$

$$AT\cdot\sin\angle ATK = AP\cdot\sin\angle APK$$

$$\frac{AT}{AP}=\frac{\sin\angle APK}{\sin\angle ATK}$$

$\cancel{4x} \cdot AP \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin B = \cancel{4x} \cdot \cancel{AT} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha$



AP = PB

21 - 9

16

x - 16

$x = \frac{21 \cdot 16}{9} =$

$= \frac{112}{3}$

$\cancel{16}$

$\Delta BPA \sim \Delta ATC$

$9l^2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = 21$

$\frac{BP}{AT} = \frac{AB}{AC}.$

$\frac{29 \cdot 9}{261}$

$\frac{S(KCT)}{S(AKT)} = \frac{3}{4}$

$\cancel{8}x l \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} = \cancel{8}$

$xl = \frac{2}{\sin\alpha}$

$tg\,\alpha = \frac{3}{7}$

$AP \cdot PC = AT^2$

$4\,KP \cdot PC \cdot \sin\angle KPC = 3TK \cdot AT \cdot \sin\angle ...$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1} = \frac{1}{\frac{9}{49} + 1} = \frac{49}{58}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\frac{285}{-20}\,\big|\,\frac{5}{152}$

21102972 (U356938 M1296762)

Чистовик Лист №1 Вариант-21

№4

$НОД(a; b; c) = 5 \cdot 7$

$НОК(a; b; c) = 5^{18} \cdot 7^{16}$.

Пусть $a = 5^{\gamma} \cdot 7^{x}$

$b = 5^{B} \cdot 7^{y}$

$z = 5^{\alpha} \cdot 7^{z}$.

Других множителей не может присутствовать, т.к. $НОК(a, b, c)$ содержит только 5 и 7.

НОД чисел содержит те числа, (простые) которые встречаются в числах минимальное число раз но не 0.

То есть $НОД(a, b, c) = 5^{\min(\gamma, B, \alpha)} \cdot 7^{\min(x, y, z)}$.

Аналогично $НОК(a, b, c) = 5^{\max(\gamma, B, \alpha)} \cdot 7^{\max(x, y, z)}$.

$$\begin{cases} \min(\gamma, B, \alpha) = 1 \\ \max(\gamma, B, \alpha) = 18 \\ \min(x, y, z) = 1 \\ \max(x, y, z) = 16. \end{cases}$$

Пусть $\gamma = 1$, а $B = 18$.

Тогда $\alpha \in [1, 18]$ и $\alpha \in N$

То есть есть 18 возможных вариантов.

Аналогично если $B = 18$, а $\gamma = 1$.

Значит, всего комбинаций удовлетворяющим первым двум условиям $3 \cdot 36 = 108$.

Аналогично вторым двум условиям удовлетворяет $3 \cdot 32 = 96$ вариантов.

Значит, всего возможных случаев $108 \cdot 96 = 10368$.

Ответ: 10368.

Чистовик Лист №2 Вариант-21

№5

$\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$; $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$; $\log_{(x+1)}(2x^2-3x+5)$

Пусть число, которому равны 2 логарифма есть t.

ОДЗ

$2x-3>0$
$2x-3\neq 1$
$x+1>0$
$x+1\neq 1$
$2x^2-3x+5>0$
$2x^2-3x+5\neq 1$

Тогда
$2x-3=u$
$x+1=v$
$2x^2-3x+5=q$

Значит, получаются 3 логарифма.

$2\log_u v$; $2\log_q u$; $\log_v q$ с учётом, что $2x-3>0$.

Их произведение.

$2\log_u v\cdot 2\log_q u\cdot \log_v q=4$

Значит, $t^2(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	$\boxed{0}$

$(t-2)(t^2+t+2)=0 \Rightarrow \boxed{t=2}$
$D=1-8<0$

Следовательно, какой-то из логарифмов - 2.

1) $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)=2$ $\quad 2x-3=x+1$ $\quad \boxed{x=4}$

2) $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2=2$ $\quad 2x-3=2x^2-3x+5$
$2x^2-5x+8=0$
$\cancel{x=}$ $D=25-64<0$.

3) $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)=2$ $\quad x^2+2x+1=2x^2-3x+5$
$x^2-5x+4=0$
$\boxed{x=\left[\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right.}$

Возможные варианты $x=1$; $x=4$.

$x=1$ не подходит по ОДЗ т.к. $2\cdot 1-3=-1<0$.

При $x=4$ нужно проверить, что $\log_{(2x^2-3x+5)}(2x-3)^2\neq 1$. Т.к. остальные равны 2.

4 Чистовик Лист№3 Вариант-21

$\log_{(2\cdot16-3\cdot4+5)}(2\cdot4-3)^2=\log_{25}25=1.$

Проверим остальные.

$\log_{\sqrt{2\cdot4-3}}(4+1)=\log_{\sqrt{5}}5=2$

$\log_{(4+1)}(2\cdot16-3\cdot4+5)=\log_5 25=2.$

Значит, $x=4$ подходит.

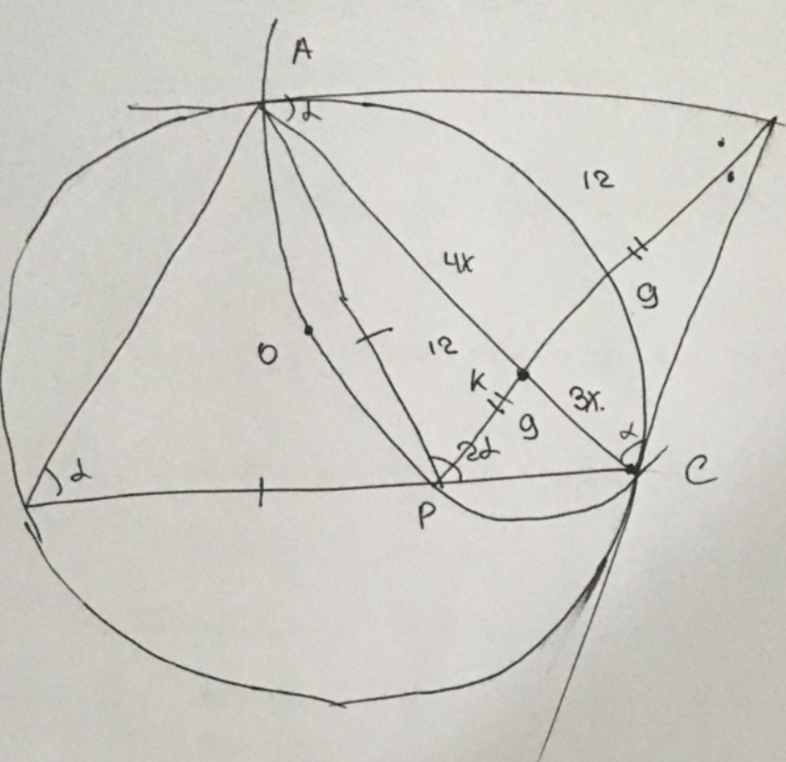
Ответ: $x=4.$

Чистовик Лист N 5 Вариант 21

Чистовик Лист N 4 Вариант-21

O - центр ω
ω - опис. около $\triangle ABC$
$A; O; P; C \in \Omega$
TA, TC - кас. к ω.
$S(APK) = 12$
$S(PKC) = 9$

? $S(ABC)$



1) $\angle TAC = \angle TCA = \alpha$ (кас. из 1 точки)

2) $\angle ABC = \angle TAC = \alpha$ (~~угл~~ т. про кас. и хорду)

3) $\angle AOC = 2\angle ABC$ (впис = центр.)

4) $\angle AOC = \angle APC$ (опир. на одну дугу $\overset{\smile}{AC}$.) $\angle APC = 2\alpha$.

5) $\angle APC = \angle PAB + \angle ABP$ (внешн. угол) => $\angle BAP = \alpha$

6) $\angle BAP = \angle ABP = \alpha$ => $\triangle ABP$ - р/б (признак) => $BP = AP$.

7) $S(APK) = AK \cdot KP \cdot \sin\angle AKP = 12$

8) $S(CKP) = CK \cdot KP \cdot \sin(180 - \angle AKP) = 9$ / => $\frac{AK}{CK} = \frac{4}{3}$ => $AK = 4x$, $CK = 3x$

9) $\frac{S(TAK)}{S(TKC)} = \frac{AK}{AC}$ (общ. высота) $= \frac{4}{3}$.

10) $\frac{S(TAK)}{S(TKC)} = \frac{AK \cdot KT \cdot \sin\angle AKT \cdot \cancel{\frac{1}{2}}}{PK \cdot KC \cdot \sin\angle PKC \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{3}$ / => $\frac{AK}{\cancel{KC}} \cdot \frac{TK}{PK} = \frac{4}{3}$ => $\frac{TK}{PK} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ => $TK = PK$

$\angle AKT = \angle PKC$ (верт.)

11) CK - мед ($PK = TK$) => $S(TKC) = S(CKP) = 9$

12) AK - мед ($PK = TK$) => $S(APK) = S(AKT) = 12$.

13) ~~S(AKT)~~ =

$\angle ATC = 180 - 2\alpha$ (сумма ∠ D.)

21102972 (U356938 M1296762)

Чистовик Лист N 5 Вариант 21

$\angle APC + \angle ATC = 180 \Rightarrow ATCP$ — можно впис. в окр.

$\Rightarrow \angle APT = \angle ACT$ (опир. на одну дугу) $= \alpha$

$\left.\begin{array}{l}\angle APK = \alpha \\ \angle APC = 2\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \angle TPC = \alpha \Rightarrow PK$ — бис.

$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC}$ (PK - бис.) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{4}{3}$ ($BP = AP$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S(ABP)}{S(APC)} = \frac{4}{3}$ (общ. высота) $\Rightarrow S(ABP) = 28.$

$S(ABC) = S(ABP) + S(APC) = 28 + 21 = \boxed{49}$

~~$AP \cdot BP \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = AT \cdot TC \cdot$~~

$AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = 21$ $S(APC)$

$\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$ $AP = 4y$
$PC = 3y$

$tg\,\alpha = \frac{3}{7}$ $\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{58}}$ $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{58}}$

$\sin 2\alpha = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2 \cdot 49}{58} - 1 = \frac{20}{29}$

$12y^2 \cdot \frac{21}{29} \cdot \frac{1}{2} = 21$ $(S(APC))$

$y^2 = \frac{29 \cdot 21}{21 \cdot 12} = \frac{29}{12}$ $y = \frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow AP = 2\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{3}}$
$PC = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{29}.$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$ (т. cos.)

~~$AC^2 = 4 \cdot \frac{29}{3} + \frac{3}{4} \cdot 29 - \dots \cdot \frac{20}{29}$~~

$AC^2 = \frac{29}{3} + \frac{3}{4} \cdot 29 - 2 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{20}{29}$

$AC^2 = 9\frac{2}{3} + 21\frac{3}{4} - 20 = 10\frac{5}{12}$

$AC = \sqrt{10\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{125}{12}}$

$AC^2 = 126 + \frac{261}{4} - 120 = 6 + \frac{261}{4} = \frac{285}{4}$

~~$AC = \frac{\sqrt{285}}{2}$~~

Ответ: $S(ABC) = 49$
$AC = \frac{\sqrt{285}}{2}$ $\sqrt{10\frac{5}{12}}$ $\sqrt{\frac{125}{12}}$